



Marco Aurelio Riva Palacio y Santana

Pensamiento Matemático

Matemáticas 2

espacios
creativos

 **SANTILLANA**
Secundaria

Este



fue elaborado en Editorial Santillana por el equipo de la Dirección General de Contenidos.

- Fotografía de portada **Abraham Solís Saldaña**
- Fotografía **Shutterstock, Photostock, NOAA**

La presentación y disposición en conjunto y de cada página de **Matemáticas 2** de la serie **Espacios Creativos** son propiedad del editor. Queda estrictamente prohibida la reproducción parcial o total de esta obra por cualquier sistema o método electrónico, incluso el fotocopiado, sin autorización escrita del editor.

© 2019 **Marco Aurelio Riva Palacio y Santana**
D. R. © 2019 **EDITORIAL SANTILLANA, S.A. de C.V.**
Avenida Río Mixcoac 274 piso 4, colonia Acacias, C. P. 03240,
alcaldía de Benito Juárez, Ciudad de México

ISBN:
Primera edición:

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana. Reg. núm. 802

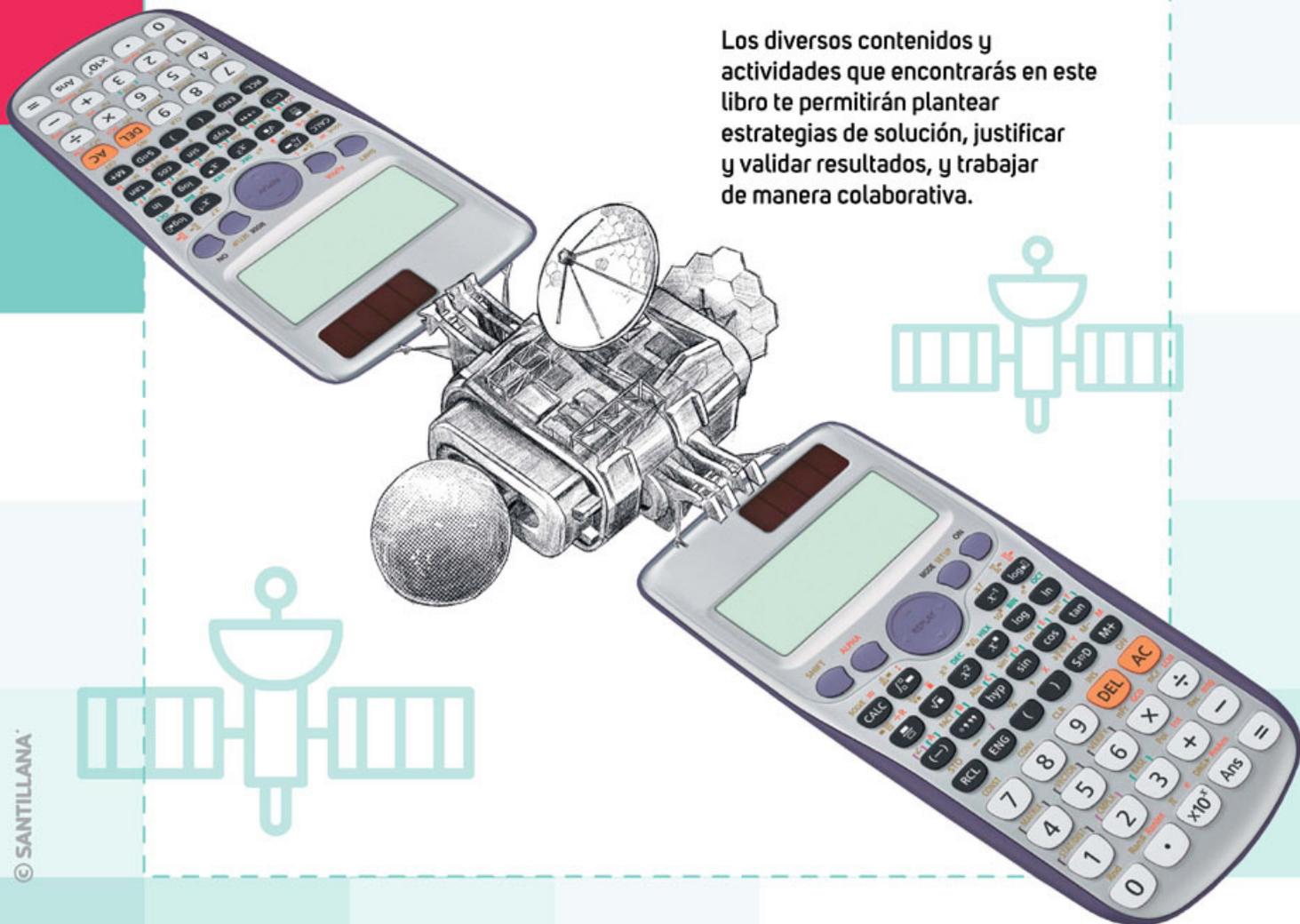
Impreso en México/Printed in Mexico

MATEMÁTICAS

Te damos la bienvenida a tu libro de **Matemáticas** de segundo de secundaria.

Esta obra representa para ti un espacio de construcción de conocimientos matemáticos y desarrollo de procedimientos y técnicas que te permitirán analizar fenómenos, interpretar información, encontrar patrones y resolver problemas.

Los diversos contenidos y actividades que encontrarás en este libro te permitirán plantear estrategias de solución, justificar y validar resultados, y trabajar de manera colaborativa.



Lo que estudiarás en Matemáticas a lo largo de tu educación básica se organiza en tres ejes temáticos, que agrupan a los aprendizajes esperados que construirás en el grado, como se muestra a continuación.

Número, álgebra y variación

Resolverás problemas de multiplicación y división con fracciones y decimales positivos.

Resolverás problemas de multiplicación y división con números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos.

Resolverás problemas de potencias con exponente entero y aproximarás raíces cuadradas.

Resolverás problemas de proporcionalidad directa e inversa y de reparto proporcional.

Resolverás problemas mediante la formulación y solución algebraica de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Analizarás y compararás situaciones de variación lineal y proporcionalidad inversa, a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica. Interpretarás y resolverás problemas que se modelen con este tipo de variación, incluyendo fenómenos de la física y otros contextos.

Verificarás algebraicamente la equivalencia de expresiones de primer grado, formuladas a partir de sucesiones.

Formularás expresiones de primer grado para representar propiedades (perímetros y áreas) de figuras geométricas y verificarás la equivalencia de expresiones, tanto algebraica como geoméricamente (análisis de las figuras).

Análisis de datos

Recolectarás, registrarás y leerás datos en histogramas, polígonos de frecuencia y gráficas de línea.

Usarás e interpretarás las medidas de tendencia central (moda, media aritmética y mediana), el rango y la desviación media de un conjunto de datos y decidirás cuál de ellas conviene más en el análisis de los datos en cuestión.

Determinarás la probabilidad teórica de un evento en un experimento aleatorio.



M

MATEMÁTICAS

En este libro desarrollarás **habilidades** para analizar, reflexionar, argumentar y resolver problemas matemáticos, así como distintas situaciones de tu vida. Uno de los objetivos de este material es que reconozcas cómo con las matemáticas se pueden explicar diversos fenómenos físicos y sociales.



Los satélites artificiales son naves espaciales que pueden orbitar alrededor de la Tierra.

Forma, espacio y medida

Deducirás y usarás las relaciones entre los ángulos de polígonos en la construcción de polígonos regulares.

Resolverás problemas que implican conversiones en múltiplos y submúltiplos del metro, litro, kilogramo y unidades del sistema inglés (yarda, pulgada, galón, onza, libra).

Calcularás el perímetro y área de polígonos regulares y del círculo a partir de diferentes datos.

Calcularás el volumen de prismas y cilindros rectos.



En la siguiente tabla se describe lo que aprenderás cada trimestre.

Trimestre 1

Resolverás problemas que requieran multiplicar y dividir números enteros, fraccionarios y decimales positivos y negativos. Analizarás y resolverás problemas de proporcionalidad directa e inversa y de reparto proporcional.

Avanzarás en el estudio del álgebra y enunciarás la fórmula que determina el número de diagonales de un polígono. Asimismo, deducirás la expresión para calcular la suma de los ángulos interiores de un polígono.

Además, leerás e interpretarás datos en polígonos de frecuencia, histogramas y gráficas de línea vinculados con distintos contextos.

Trimestre 2

Interpretarás el significado de obtener la raíz cuadrada de un número y explorarás distintos procedimientos para determinarla. Calcularás productos y cocientes de potencias.

Formularás expresiones para representar el perímetro de figuras geométricas y verificarás la equivalencia de estas. Construirás polígonos regulares e identificarás las propiedades que tienen los polígonos que cubren el plano. Diseñarás teselados.

Calcularás el perímetro y el área de polígonos regulares y del círculo.

Usarás e interpretarás las medidas de tendencia central, el rango y la desviación media de un conjunto de datos y decidirás cuál de estas describe mejor a un conjunto de datos.

Trimestre 3

Resolverás problemas que impliquen plantear y solucionar sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, utilizando distintos métodos: gráfico, igualación, sustitución y suma y resta.

Resolverás problemas que impliquen verificar algebraicamente la equivalencia de expresiones de primer grado, formuladas a partir de sucesiones.

Resolverás problemas que impliquen convertir unidades del Sistema Internacional de Unidades al Sistema Inglés y viceversa.

Calcularás el volumen de prismas y cilindros rectos. Avanzarás en el estudio de la probabilidad y reconocerás las características de la probabilidad frecuencial y teórica de un evento en un experimento aleatorio.



El sistema de posicionamiento global, conocido por sus siglas en Inglés como GPS, es una herramienta importante para las aplicaciones de navegación que funciona con información que proporcionan los satélites.

Índice

3

10

Presentación

Estructura de tu libro

Trimestre uno

18



Secuencia didáctica 1

Multiplicación con números fraccionarios y números decimales 20

- Resolverás problemas de multiplicación con números fraccionarios y números decimales.

Secuencia didáctica 2

Factores que dividen 24

- Resolverás problemas que impliquen la división entre números fraccionarios.

Secuencia didáctica 3

Multiplicación y división 30

- Resolverás problemas que impliquen la multiplicación y la división entre números fraccionarios y números decimales.

Secuencia didáctica 4

Multiplicación de números enteros 36

- Resolverás problemas que impliquen multiplicar números enteros.

Secuencia didáctica 5

División entre números enteros 42

- Resolverás problemas que impliquen dividir números enteros.

Uso de la tecnología 48

Secuencia didáctica 6

Multiplicación y división con números positivos y negativos 50

- Resolverás problemas de multiplicación y división con números enteros, fracciones y números decimales positivos y negativos.

Secuencia didáctica 7

Proporcionalidad directa e inversa 56

- Resolverás problemas de proporcionalidad directa e inversa.

Secuencia didáctica 8

Significado de reparto proporcional 62

- Resolverás problemas de reparto proporcional.

Secuencia didáctica 9

Diagonales 68

- Deducirás y usarás, al resolver problemas, el número de diagonales desde un vértice y diagonales totales que pueden trazarse en un polígono cualquiera.

Secuencia didáctica 10

Suma de los ángulos interiores 72

- Determinarás la suma de los ángulos interiores de un polígono.

Uso de la tecnología 76

Secuencia didáctica 11

Ángulo central y ángulo interior 78

- Deducirás y usarás las relaciones entre los ángulos (central, interior y exterior) de un polígono regular al resolver problemas.

¿Cómo aprenderemos?

Secuencia didáctica 12

Recolecta, registra y construye tablas de frecuencia

84

- Construirás e interpretarás datos en distintas representaciones.

Secuencia didáctica 13

Construcción de polígonos de frecuencia

90

- Leerás datos en polígonos de frecuencia y gráficas de línea.

¿Cómo lo hicimos?

96

Trimestre dos

98

**Secuencia didáctica 14**

Raíz cuadrada

100

- Interpretarás el significado de obtener raíces cuadradas y las calcularás por medio de aproximaciones y el ensayo y error.

Secuencia didáctica 15

Casos particulares: a^n , 1^n , 0^n

106

- Elaborarás, utilizarás y justificarás procedimientos para calcular productos de potencias enteras de la misma base.

Secuencia didáctica 16

Productos de potencias

112

- Elaborarás, utilizarás y justificarás procedimientos para calcular productos de potencias de una potencia.

Secuencia didáctica 17

Cociente de potencias de la misma base

118

- Resolverás problemas que impliquen obtener el cociente de potencias de la misma base.

Secuencia didáctica 18

Construcción del significado de potencia negativa

124

- Resolverás problemas de potencias con exponente entero y vincularás la potenciación y la radicación como operaciones inversas.

Uso de la tecnología

130

Secuencia didáctica 19

Expresiones algebraicas: cálculo del perímetro

132

- Formularás expresiones de primer grado para representar el perímetro de figuras geométricas y verificarás equivalencias de expresiones, tanto algebraica como geoméricamente (análisis de las figuras).

Secuencia didáctica 20

Cálculo del área de figuras geométricas

136

- Formularás expresiones para representar el área de figuras geométricas y verificarás equivalencias de expresiones, tanto algebraica como geoméricamente (análisis de las figuras).

Índice

Secuencia didáctica 21	
Construcción de polígonos regulares	140
▪ Construirás polígonos regulares con instrumentos geométricos a partir de diferentes datos.	
Secuencia didáctica 22	
Figuras que cubren el plano (propiedades de polígonos)	146
▪ Identificarás las propiedades de polígonos para cubrir el plano. Diseñarás teselados.	
Secuencia didáctica 23	
Área de polígonos	152
▪ Calcularás el área de polígonos al desarrollar y aplicar la fórmula correspondiente para cada caso.	
Uso de la tecnología	158
Secuencia didáctica 24	
Área del círculo	160
▪ Calcularás el área del círculo al desarrollar y aplicar su fórmula.	
Secuencia didáctica 25	
Nociones de dispersión	166
▪ Interpretarás la dispersión de uno o más conjuntos de datos.	
Secuencia didáctica 26	
¿Para qué sirve la desviación media?	172
▪ Analizarás la desviación media de un conjunto de datos. Resolverás problemas en los cuales se da sentido al cálculo de la desviación media.	
¿Cómo lo hicimos?	178

Trimestre tres

180



Secuencia didáctica 27	
Sistema de dos ecuaciones lineales	182
▪ Resolverás problemas de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas a través del método gráfico. Representarás a la incógnita en un sistema de dos ecuaciones lineales.	
Uso de la tecnología	190
Secuencia didáctica 28	
Construcción del concepto de igualdad	192
▪ Resolverás problemas de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas a través del método de igualación.	
Secuencia didáctica 29	
Método de sustitución y de suma y resta	198
▪ Resolverás problemas de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas a través del método de sustitución y de suma y resta.	

Secuencia didáctica 30

Sistemas de ecuaciones 2×2 204

- Resolverás problemas mediante la formulación y solución algebraica de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Secuencia didáctica 31

Variación inversa 210

- Analizarás la proporcionalidad inversa, a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica.

Secuencia didáctica 32

Expresión algebraica de proporcionalidad inversa 218

- Resolverás problemas que se modelan con la variación inversa, incluyendo fenómenos de la física y otros contextos.

Secuencia didáctica 33

Expresiones a partir de sucesiones 224

- Resolverás problemas que impliquen verificar algebraicamente la equivalencia de expresiones de primer grado, formuladas a partir de sucesiones

Secuencia didáctica 34

Múltiplos y submúltiplos 230

- Resolverás problemas que implican conversiones en múltiplos y submúltiplos del metro, litro y kilogramo.

Secuencia didáctica 35

Yarda, pie y pulgada 236

- Resolverás problemas que implican conversiones en múltiplos y submúltiplos de unidades del sistema inglés (yarda, pulgada, galón, onza y libra).

Secuencia didáctica 36

Sistema Inglés versus Sistema Internacional de Unidades 242

- Resolverás problemas que implican conversiones entre unidades del Sistema Internacional de Unidades y unidades del sistema inglés.

Uso de la tecnología

248

Secuencia didáctica 37

Volumen de prismas rectos 250

- Resolverás problemas que impliquen justificar y aplicar la fórmula del volumen de prismas cuya base sea un polígono regular.

Secuencia didáctica 38

Desarrollos planos 256

- Resolverás problemas que impliquen justificar y aplicar la fórmula del volumen del cilindro recto.

Secuencia didáctica 39

Probabilidad teórica de un evento 262

- Caracterizarás y construirás el significado de la probabilidad frecuencial y teórica de un evento en un experimento aleatorio.

¿Cómo lo hicimos?

268

Fuentes de información

270

Estructura de tu libro

¿Cómo aprenderemos?

En esta sección encontrarás una explicación sobre cómo serán tu aprendizaje y la convivencia en la clase de Matemáticas. También se describen las actividades que realizarás y la forma en que trabajarás a lo largo del curso.

¿Cómo aprenderemos?

Bienvenido al segundo curso de Matemáticas de secundaria! Desearnos que este ciclo cumpla con todas las expectativas que te creaste y continúes dando significado a los aprendizajes que adquiriste en grados anteriores. Es posible que tengas nuevos compañeros, para que te familiarices con ellos y con algunos aspectos de la asignatura, te invitamos a realizar lo siguiente.

1. Ponte de pie y preséntate. Nombra un tema o un concepto de las matemáticas que hayas trabajado el ciclo anterior y te haya resultado interesante. También comenta que de lo que has aprendido lo has podido usar en tu vida cotidiana.
2. Menciona una expectativa que tengas con respecto a las matemáticas ahora que estás en segundo de secundaria.
3. Escribe en tu cuaderno un propósito que te plantees para que se cumpla tu expectativa. Coméntaselo con tus compañeros.
4. Te invitamos a que periódicamente regreses a revisar tu propósito y a evaluar tus avances. La información que obtengas será valiosa para que puedas, en caso necesario, replantear tus estrategias para alcanzar los resultados esperados.
5. Ahora, revisa tu libro de texto. Identifica sus partes principales, observa las diversas formas como se propone que trabajes, las ilustraciones, etcétera.
6. De manera grupal comenten qué les pareció el libro de texto, qué llamó su atención, qué no les agradó y cómo les gustaría que se llevaran a cabo las actividades. Inviten al profesor a comentar la que ustedes expresen. Soliciten que les explique cómo serán evaluados.

Te proponemos algunas estrategias para tener un desempeño exitoso.

Organízate y planea. Escribe tu horario escolar y vincúlalo con tu horario personal. Incluye el uso de una agenda para registrar tus actividades y tareas. Esto te ayudará a prever una serie de acciones necesarias para alcanzar tus metas y concluir con éxito este y los demás cursos de secundaria.

7. Escribe tu horario, tenlo presente para organizar tu tiempo.

Hora	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes

© SANTILLANA

Establece un tiempo de estudio. Sé sistemático, organiza tus apuntes, haz esquemas, diagramas o fichas de trabajo con los contenidos y procedimientos aprendidos en clase, de manera que puedas consultarlos cuando te surja alguna duda.

Las matemáticas son un conjunto de conocimientos que se ha construido a lo largo de mucho tiempo. Por eso, considera que tus aprendizajes matemáticos no serán repentinos, sino que los irás adquiriendo poco a poco, a lo largo de periodos con diferentes tiempos. Por tanto, no te desesperes si no logras comprender algún contenido en la primera ocasión. Tu dedicación y perseverancia seguramente te llevarán a entender todo lo que se trabaja en clase.

Las matemáticas se han desarrollado siempre en sociedad, nunca como resultado del trabajo de una sola persona. Entonces, es importante que tengas en cuenta la relevancia de tu participación en la construcción de tus propios conocimientos, pero también en el desarrollo de las ideas de tus compañeros, así como otros tienen participación importante en el perfeccionamiento de tus habilidades y la adquisición de tus conocimientos matemáticos.



Trabaja en equipo favoreciendo que mejores el entendimiento de ideas, se construya una solución conjunta a la problemática que se presenta.

Dada la importancia del trabajo colaborativo en la construcción de los conocimientos matemáticos, es trascendental que a lo largo del curso te organices con otros compañeros e integres equipos para desarrollar las actividades que se proponen en el libro o que planteé el profesor.

Puedes formar los equipos de diversas maneras, por ejemplo, por número de lista, con tus compañeros de la misma fila o en parejas. Procura integrar equipos con diferentes compañeros para tener oportunidad de aprender de maneras diversas.

© SANTILLANA

Entrada de trimestre

Tu libro se organiza en tres trimestres, al inicio de cada uno encontrarás una breve introducción a los contenidos que trabajarás y una explicación de cómo se relacionan con los conocimientos que adquiriste en grados o trimestres anteriores.

Trimestre dos



Rais cuadrada, potencias, expresiones equivalentes...

En este trimestre resolverás problemas en los que sea necesario reconocer la relación entre un número. Para abordarlas seguirás los mismos procedimientos como analogía y serás capaz de resolverlas.

Considera el concepto de potencia, obtención, producto y cociente de potencias de la misma base y con igual o distinto exponente. Una regla para generalizarla para adición. También reconocerás el concepto de potencia negativa.

Formulemos ecuaciones para reconocer el patrón y, además de los números enteros y racionales, el sistema de números reales.

Considera potencias iguales, elevadas en potencias que son los potencias con cubo del patrón y división de potencias.

Deduce una fórmula para calcular el patrón y, además de los potencias iguales que resuelve con él. Por otro lado, analiza la transformación de conjuntos de datos y la media aritmética de los datos.

¿Te das cuenta de cómo está el mundo?



Al inicio de cada secuencia se indica el aprendizaje esperado y el contenido que se abordará.

Secuencias didácticas

Cada trimestre se organiza en secuencias didácticas que se dividen en varias sesiones de dos páginas para facilitar tu trabajo en el aula.

Método de sustitución y de suma y resta

Lee el problema y contexto.

1. Un veterinario cuenta con 50 galeras para premiar a sus mascotas. En total le da 10 animales entre perros y gatos, y al cada perro le da 5 galeras y a cada gato, 2. ¿Cuántos perros y cuántos gatos le da?

a) ¿Cuáles son las incógnitas?

b) Escribe el sistema de ecuaciones que representa la situación.

c) Elige la ecuación que consideras más sencilla. Despeja una incógnita y sustitúela.

d) ¿Por qué le resulta más difícil la ecuación para resolver el problema?

e) Sustituye la ecuación con la incógnita despejada en la otra ecuación. Escribe cómo quedará.

f) Aplica el método de sustitución y resuelve la ecuación.

g) ¿Cuál resultado obtiene?

h) Sustituye el valor encontrado en una de las ecuaciones.

i) ¿Cuál sucede al resolver cada una de las incógnitas con cada una de las ecuaciones originales se sustituye en la ecuación despejada? Compara los.

j) ¿Por qué resultó más complicado resolver en las dos ecuaciones originales?

* Compara tu procedimiento y tus resultados con los de otro compañero. Valoren sus resultados en ambas ecuaciones y con ayuda del profesor analicen las características más importantes de este método.

Método de sustitución

Resuelve en parejas.

1. Un acromotilista compró 3 animales de un tipo y 4 de medio kilo de aceite para motor y en total pagó \$340. Por un animal de un tipo y 3 de medio kilo pagó \$100. ¿Cuánto cuesta cada animal de cada tipo?

a) ¿Cuáles son las incógnitas?

b) Escribe el sistema de ecuaciones y el sistema de ecuaciones con números fraccionarios.

c) Despeja una incógnita en la ecuación que consideres más sencilla y sustitúela.

d) ¿Por qué eligieron despejar esa incógnita en esa ecuación?

e) Sustituye la ecuación en la otra ecuación.

f) Aplica el método de sustitución y resuelve en el sistema de ecuaciones.

g) Sustituye el valor encontrado en una de las ecuaciones.

h) Valoren sus resultados en ambas ecuaciones y compárenlos. Analicen los resultados y despejen la otra incógnita. Escriban el resultado en ambas ecuaciones.

Método de sustitución

El método de sustitución consiste en despejar una incógnita de una de las ecuaciones y sustituir en la otra ecuación el valor hallado. De esta modo se tiene una sola ecuación con una sola incógnita y se puede resolver más fácilmente.

Por ejemplo, en el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + 4y = 24 \\ x + 7y = 27 \end{cases}$$

Despejamos en la segunda ecuación: $x = 27 - 7y$. Sustituyendo este valor en la primera ecuación: $2(27 - 7y) + 4y = 24$, resolvamos las operaciones y agrupamos los términos semejantes obteniendo la ecuación: $54 - 14y + 4y = 24$, de donde obtenemos que $y = 6$. También se puede comenzar despejando primero la incógnita y y sustituyéndola en la otra ecuación.

¿Cómo vamos?

1. Resuelve un problema que se pueda resolver con cada sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} x + 3y = 4 \\ 2x + 4y = 2 \end{cases} \quad \text{M} \quad \begin{cases} 2x + 4y = 7 \\ 2x + 5y = 8 \end{cases}$$

En la página izquierda de cada secuencia didáctica se indica el eje y tema al que pertenece. En la parte derecha se anota el contenido que se está trabajando en cada sesión.

Cada secuencia didáctica consta de tres momentos:

¿Qué sabemos?

En esta fase te introducirás en el tema. Además identificarás los conocimientos que ya tienes y los que necesitas para continuar aprendiendo.

¿Qué estamos aprendiendo?

Mediante actividades individuales, en parejas o en equipo lograrás construir conocimientos matemáticos, que validarás con apoyo de tu profesor, y desarrollarás habilidades y actitudes que te permitirán aprender permanentemente.

¿Qué aprendimos?

La fase final de la secuencia didáctica consta de actividades que integran los aprendizajes. Esto permitirá valorar tus logros.

Las actividades son variadas, con un propósito educativo y promueven la construcción de conceptos. Algunas se acompañan de ilustraciones, esquemas, gráficas o fotografías con un sentido didáctico.

Durante el desarrollo de las secuencias didácticas encontrarás estos apartados:

Aprendo mejor

Son recomendaciones que te permiten crear un ambiente en el que puedas realizar, pensar, sentir y comunicarte mejor, lo cual te ayudará en tu aprendizaje. Esta sección también te será útil para identificar tus intereses y motivaciones.

¿Cómo vamos?

Este apartado te proporciona dos o tres actividades o problemas para que evalúes tu desempeño durante el desarrollo de la secuencia didáctica.

Otras fuentes

Encontrarás recomendaciones de fuentes electrónicas e impresas que te servirán para ampliar tus conocimientos y habilidades sobre el tema de la secuencia didáctica.

Glosario

Te proporciona la definición de términos matemáticos o de algunas palabras con el fin de facilitarte el estudio de los temas.

Suma de los ángulos interiores de un polígono

Investiga cómo se puede calcular la suma de los ángulos interiores de un polígono con el software Geogebra.

1. Realiza la siguiente actividad con el polígono de la imagen.

1. Mide la longitud de cada uno de los lados.
2. Selecciona la herramienta Polígono, como se muestra en la imagen.
3. Haz clic en los puntos de control de los puntos y forma un polígono después de que cada uno de ellos haya clic en el punto.



4. Toma un segmento del polígono. Para ello, selecciona la herramienta Segmento y haz clic en los puntos de control de los puntos que deseas seleccionar para formar el segmento.



5. ¿Cuántos ángulos se forman dentro de cada polígono al trazar los segmentos de la imagen?
6. Traza los segmentos de la imagen desde un vértice de un heptágono, o hazlo con un polígono ¿cuántos ángulos se forman en cada caso?

7. Al trazar más de un segmento desde un vértice del polígono que se muestra en la imagen, ¿cuántos ángulos se forman dentro del polígono? ¿cuántos ángulos se forman fuera del polígono? ¿cuántos ángulos se forman en total?
8. ¿Se puede usar la cantidad de ángulos que se forman al trazar los segmentos desde un vértice del polígono para encontrar la suma de los ángulos interiores del polígono?
9. ¿Puedes usar la cantidad de ángulos que se forman al trazar los segmentos desde un vértice del polígono para encontrar la suma de los ángulos interiores del polígono?

Número de lados del polígono	Cantidad de ángulos que se forman al trazar los segmentos	Suma de los ángulos interiores del polígono
3	1	180°
4	2	360°
5	3	540°
6	4	720°
7	5	900°
8	6	1080°

2. Completa la tabla con los datos necesarios en Geogebra.

Número de lados del polígono	Cantidad de ángulos que se forman al trazar los segmentos	Suma de los ángulos interiores del polígono
12	10	1800°
20	18	3240°

Compara tus conclusiones y los resultados con los de tu compañero.

Uso de la tecnología

Para que desarrolles tus habilidades digitales, practicarás algunos contenidos de la secuencia didáctica con apoyo de la tecnología.

¿Cómo lo hicimos?

En esta página te proponemos un espacio para que, junto con un compañero, adviertas cómo desarrollaste tus habilidades, valores y actitudes a lo largo del trimestre.

¿Cómo lo hicimos?

Actividad	Aplicación Educativa	Procesos	Medio de apoyo	Resultados
1. Medida de los ángulos interiores de un polígono	Geogebra	Comunicación, pensamiento crítico, resolución de problemas, trabajo en equipo, creatividad, colaboración.	Software de geometría dinámica.	Identificación de los ángulos interiores de un polígono, uso de la tecnología para medir los ángulos, uso de la tecnología para calcular la suma de los ángulos interiores de un polígono.
2. Medida de los ángulos interiores de un polígono	Geogebra	Comunicación, pensamiento crítico, resolución de problemas, trabajo en equipo, creatividad, colaboración.	Software de geometría dinámica.	Identificación de los ángulos interiores de un polígono, uso de la tecnología para medir los ángulos, uso de la tecnología para calcular la suma de los ángulos interiores de un polígono.

¿Cómo se relacionan entre los valores y las actitudes que desarrollaste en esta actividad?

¿Puedes hacer un ejemplo que relacione los valores y las actitudes que desarrollaste en esta actividad?

¿Qué aprendiste de esta actividad?

¿Qué te gustó más de esta actividad?

¿Qué te costó más de esta actividad?

¿Qué te ayudó más de esta actividad?

Fuentes de información

Para el alumno

- 1. Libro de Matemáticas de Secundaria. México: Santillana, 2018.
- 2. Libro de Matemáticas de Secundaria. México: Santillana, 2018.
- 3. Libro de Matemáticas de Secundaria. México: Santillana, 2018.
- 4. Libro de Matemáticas de Secundaria. México: Santillana, 2018.
- 5. Libro de Matemáticas de Secundaria. México: Santillana, 2018.
- 6. Libro de Matemáticas de Secundaria. México: Santillana, 2018.
- 7. Libro de Matemáticas de Secundaria. México: Santillana, 2018.
- 8. Libro de Matemáticas de Secundaria. México: Santillana, 2018.
- 9. Libro de Matemáticas de Secundaria. México: Santillana, 2018.
- 10. Libro de Matemáticas de Secundaria. México: Santillana, 2018.

Electrónicas

- 1. Libro de Matemáticas de Secundaria. México: Santillana, 2018.
- 2. Libro de Matemáticas de Secundaria. México: Santillana, 2018.
- 3. Libro de Matemáticas de Secundaria. México: Santillana, 2018.
- 4. Libro de Matemáticas de Secundaria. México: Santillana, 2018.
- 5. Libro de Matemáticas de Secundaria. México: Santillana, 2018.
- 6. Libro de Matemáticas de Secundaria. México: Santillana, 2018.
- 7. Libro de Matemáticas de Secundaria. México: Santillana, 2018.
- 8. Libro de Matemáticas de Secundaria. México: Santillana, 2018.
- 9. Libro de Matemáticas de Secundaria. México: Santillana, 2018.
- 10. Libro de Matemáticas de Secundaria. México: Santillana, 2018.

Para la elaboración de este libro

Impresos

- 1. Libro de Matemáticas de Secundaria. México: Santillana, 2018.
- 2. Libro de Matemáticas de Secundaria. México: Santillana, 2018.
- 3. Libro de Matemáticas de Secundaria. México: Santillana, 2018.
- 4. Libro de Matemáticas de Secundaria. México: Santillana, 2018.
- 5. Libro de Matemáticas de Secundaria. México: Santillana, 2018.
- 6. Libro de Matemáticas de Secundaria. México: Santillana, 2018.
- 7. Libro de Matemáticas de Secundaria. México: Santillana, 2018.
- 8. Libro de Matemáticas de Secundaria. México: Santillana, 2018.
- 9. Libro de Matemáticas de Secundaria. México: Santillana, 2018.
- 10. Libro de Matemáticas de Secundaria. México: Santillana, 2018.

Electrónicas

- 1. Libro de Matemáticas de Secundaria. México: Santillana, 2018.
- 2. Libro de Matemáticas de Secundaria. México: Santillana, 2018.
- 3. Libro de Matemáticas de Secundaria. México: Santillana, 2018.
- 4. Libro de Matemáticas de Secundaria. México: Santillana, 2018.
- 5. Libro de Matemáticas de Secundaria. México: Santillana, 2018.
- 6. Libro de Matemáticas de Secundaria. México: Santillana, 2018.
- 7. Libro de Matemáticas de Secundaria. México: Santillana, 2018.
- 8. Libro de Matemáticas de Secundaria. México: Santillana, 2018.
- 9. Libro de Matemáticas de Secundaria. México: Santillana, 2018.
- 10. Libro de Matemáticas de Secundaria. México: Santillana, 2018.

Fuentes de información

Con la finalidad de que enriquezcas el trabajo que has realizado a lo largo del ciclo escolar, al final del libro te sugerimos fuentes impresas y electrónicas, tanto las que fueron consultadas en la elaboración del libro como las que te proponemos para que profundices aún más tus conocimientos matemáticos.

¿Cómo aprenderemos?

¡Bienvenido al segundo curso de Matemáticas de secundaria! Deseamos que este ciclo cumpla con todas las expectativas que te creaste y continúes dando significado a los aprendizajes que adquiriste en grados anteriores. Es posible que tengas nuevos compañeros, para que te familiarices con ellos y con algunos aspectos de la asignatura, te invitamos a realizar lo siguiente.

1. Ponte de pie y preséntate. Nombra un tema o un concepto de las matemáticas que hayas trabajado el ciclo anterior y te haya resultado interesante. También comenta qué de lo que has aprendido lo has podido usar en tu vida cotidiana.
2. Menciona una expectativa que tengas con respecto a las matemáticas ahora que estás en segundo de secundaria.
3. Escribe en tu cuaderno un propósito que te plantees para que se cumpla tu expectativa. Coméntalo con tus compañeros.
4. Te invitamos a que periódicamente regreses a revisar tu propósito y a evaluar tus avances. La información que obtengas será valiosa para que puedas, en caso necesario, replantear tus estrategias para alcanzar los resultados esperados.
5. Ahora, revisa tu libro de texto. Identifica sus partes principales, observa las diversas formas como se propone que trabajes, las ilustraciones, etcétera.
6. De manera grupal comenten qué les pareció el libro de texto, qué llamó su atención, qué no les agradó y cómo les gustaría que se llevaran a cabo las actividades. Inviten al profesor a comentar lo que ustedes expresen. Soliciten que les explique cómo serán evaluados.

Te proponemos algunas estrategias para tener un desempeño exitoso.

Organízate y planea. Escribe tu horario escolar y vincúlalo con tu horario personal; incluye el uso de una agenda para registrar tus actividades y tareas. Esto te ayudará a prever una serie de acciones necesarias para alcanzar tus metas y concluir con éxito este y los demás cursos de secundaria.

7. Escribe tu horario, tenlo presente para organizar tu tiempo.

Hora	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes

Establece un tiempo de estudio. Sé sistemático, organiza tus apuntes, haz esquemas, diagramas o fichas de trabajo con los contenidos y procedimientos aprendidos en clase; de manera que puedas consultarlos cuando te surja alguna duda.

Las matemáticas son un conjunto de conocimientos que se ha construido a lo largo de mucho tiempo. Por eso, considera que tus aprendizajes matemáticos no serán repentinos, sino que los irás adquiriendo poco a poco, a lo largo de periodos con diferentes tiempos. Por tanto, no te desespere si no logras comprender algún contenido en la primera ocasión. Tu dedicación y perseverancia seguramente te llevarán a entender todo lo que se trabaje en clase.

Las matemáticas se han desarrollado siempre en sociedad, nunca como resultado del trabajo de una sola persona. Entonces, es importante que tengas en cuenta la relevancia de tu participación en la construcción de tus propios conocimientos, pero también en el desarrollo de las ideas de tus compañeros, así como otros tienen participación importante en el perfeccionamiento de tus habilidades y la adquisición de tus conocimientos matemáticos.



Trabajar en equipo favorece que, mediante el intercambio de ideas, se construya una solución conjunta a la problemática que se presenta.

Dada la importancia del trabajo colaborativo en la construcción de los conocimientos matemáticos, es trascendental que a lo largo del curso te organices con otros compañeros e integren equipos para desarrollar las actividades que se proponen en el libro o que plantee el profesor.

Puedes formar los equipos de diversas maneras, por ejemplo, por número de lista, con tus compañeros de la misma fila o en parejas. Procura integrar equipos con diferentes compañeros para tener oportunidad de aprender de maneras diversas.

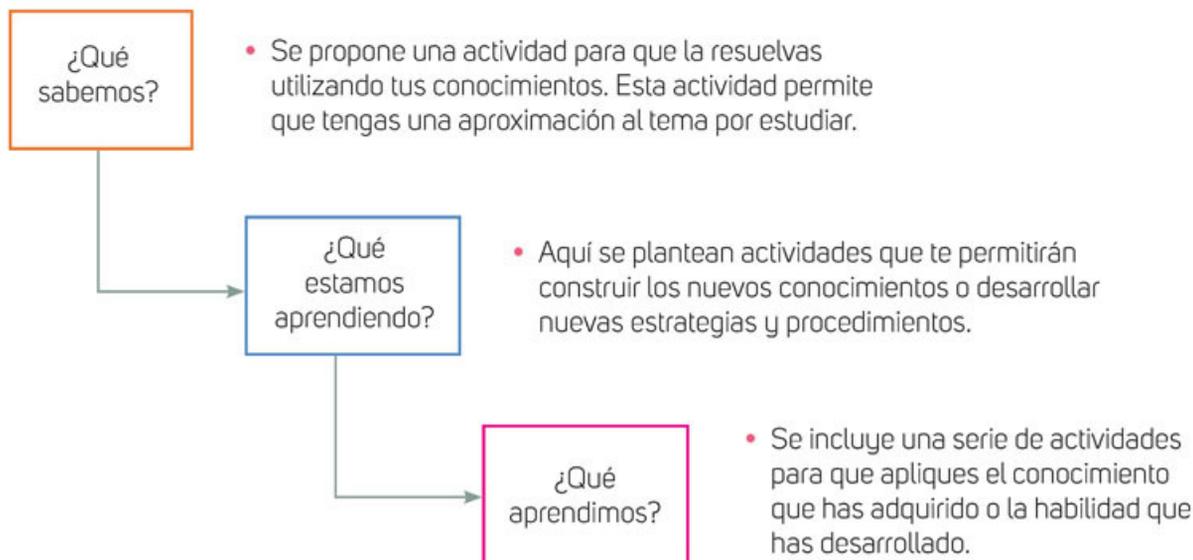
¿Cómo trabajaremos en Matemáticas?

En este libro, el trabajo para adquirir conocimientos y desarrollar habilidades matemáticas se realiza mediante **secuencias didácticas**, cada una de ellas dividida en varias **sesiones** que facilitan el trabajo dentro del aula. Las sesiones se diseñaron de manera progresiva para que, al término de la última de ellas, alcances el propósito planteado para la secuencia correspondiente.



Las secuencias didácticas se dividen en tres momentos: "¿Qué sabemos?", "¿Qué estamos aprendiendo?" y "¿Qué aprendimos?". Estos momentos propician el desarrollo progresivo del contenido correspondiente, por eso es importante que los vayas trabajando en el orden en que se presentan.

A continuación se describe lo que se aborda en cada momento.



En "¿Qué sabemos?" también se pretende que desarrolles tu **creatividad** para buscar la **solución** al problema planteado.

Es importante que compartan las diversas soluciones que encontraron en el grupo, que las analicen y lleguen a acuerdos, con mediación del profesor, sobre cuál puede ser la más eficiente.

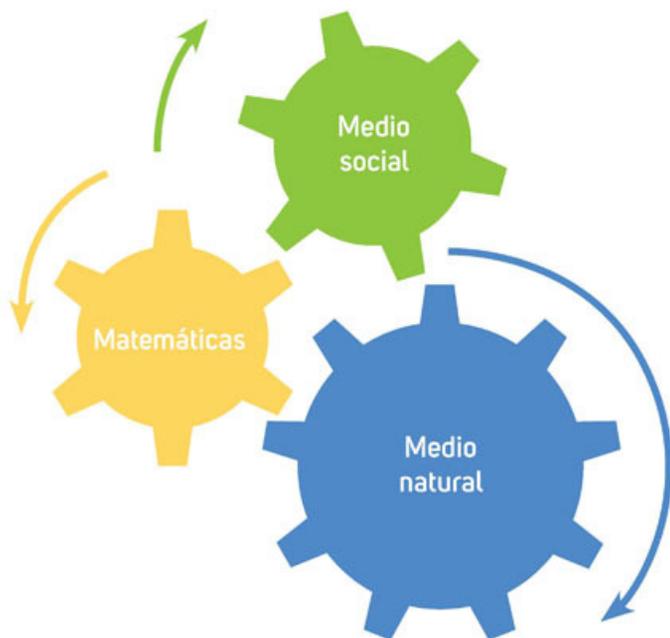
Por su parte, en “¿Qué estamos aprendiendo?” se proponen actividades de aprendizaje que te permiten **analizar** diversas situaciones para que reflexiones, **comprendas** y **construyas** el nuevo contenido matemático.

En “¿Qué aprendimos?” se ponen en práctica los conocimientos adquiridos. En varios casos, son actividades que te solicitan un esfuerzo mayor y que, al mismo tiempo, te darán mayor **confianza** y **autonomía para aprender**.

Lo aprendido se ejercita considerando que, aunque el razonamiento es la principal actividad que debes desarrollar, la práctica de las técnicas es fundamental para construir conocimientos que se abordan más adelante, en este mismo curso o en el siguiente grado de secundaria.

La mayoría de los contenidos matemáticos fueron planteados para comprender, explicar y resolver situaciones naturales o sociales. Por lo anterior, muchos problemas del libro son planteados en contextos o situaciones de los medios social y natural.

Para resolver estas situaciones matemáticas es necesario que apliques los conocimientos que has adquirido y las habilidades que has desarrollado en otras asignaturas, como Física e Historia. Esto hace ver la estrecha relación que existe entre las diversas áreas del conocimiento.



Algunos contenidos se pueden enriquecer con actividades en las que se usan diversas tecnologías, especialmente softwares de uso libre. También se te invita al uso racional de la calculadora.

Finalmente, te invitamos a establecer relaciones entre lo que aprendes en tu clase de Matemáticas y lo que ocurre en tu vida diaria. Las matemáticas te deben servir para comprender el mundo que te rodea.

¡Adelante en esta aventura matemática que ahora comienzas!

Trimestre uno



Multiplicación, división, reparto proporcional ...

¡Bienvenido a tu curso de Matemáticas de segundo de secundaria!

En este trimestre, en las secuencias 1 a 5, desarrollarás estrategias, construirás conceptos, significados y procedimientos para resolver problemas que requieran multiplicar y dividir números enteros, fraccionarios y decimales positivos y negativos. Estudiarás qué pasa con el signo del producto cuando multiplicas y divides números con signos iguales y cuando lo haces con números con signos diferentes.

Profundizarás en el estudio de la proporcionalidad al estudiar otras representaciones y significados. En grados anteriores resolviste problemas en los que dos cantidades relacionadas aumentan o disminuyen en la misma proporción. Ahora conocerás otro tipo de variación: la inversa. También analizarás y resolverás situaciones de reparto proporcional.

Avanzarás en el estudio de la geometría, analizarás y determinarás el número de diagonales de un polígono y, con apoyo del álgebra, enunciarás la fórmula para obtener ese número. Asimismo, deducirás la expresión para calcular la suma de los ángulos interiores de un polígono.

Al finalizar el trimestre, leerás datos en polígonos de frecuencia, interpretarás y construirás histogramas y gráficas de línea vinculados con distintos contextos. Por último, identificarás las características de la información que se representa en cada gráfica.

Sin más, iniciamos tu curso de Matemáticas.

¡Te deseamos éxito!



Multiplicación con números fraccionarios y números decimales



Lee el problema y haz lo que se pide.

- En la imagen se muestran los precios por kilogramo que se ofrecen en una tienda especializada en cortes de carne.

Aguja Norteña	\$148.80 _{kg}	New York	\$153.90 _{kg}
Arrachera	\$198.80 _{kg}	Tablita San Juan	\$226.90 _{kg}
Prime Rib	\$139.90 _{kg}	Top Sirloin	\$143.50 _{kg}
Rib Eye	\$196.80 _{kg}	Rib Eye Simple	\$ 73.50 _{kg}
Rib Eye con Hueso	\$176.50 _{kg}	Rib Eye Doble	\$104.80 _{kg}
T-Bone	\$145.90 _{kg}	Costilla Norteña	\$117.80 _{kg}



Para una reunión familiar, se solicitaron las siguientes cantidades de carne:

- 8 kg de aguja norteña
- 5.750 kg de arrachera
- $\frac{3}{4}$ de kg de costilla norteña

- ¿Qué debes hacer para determinar cuánto se pagará por la aguja norteña?
- ¿Qué procedimiento seguirás para determinar el costo total de la arrachera?

- ¿Y para determinar el costo total de la costilla norteña?
- ¿Cuánto se pagará en total por la aguja norteña?
- ¿Cuánto se pagará en total por la arrachera?
- ¿Y por la costilla norteña?

- Compara tus procedimientos y tus resultados con los de otro compañero. Analicen qué tipo de números están involucrados en el problema. Reflexionen sobre los pasos que siguieron para resolver los incisos a, b y c. ¿En qué radican sus diferencias? Redacten una conclusión general sobre los procedimientos que usaron y los resultados obtenidos. Compartan sus conclusiones con el resto del grupo y, con ayuda del profesor, enriquezcan sus textos.

Nuestra conclusión es:

Después de socializar con el grupo podemos agregar que:

Diferentes estrategias

Resuelvan las actividades en parejas.



1. En primero de secundaria estudiaron diferentes procedimientos para multiplicar números enteros, números decimales y números fraccionarios.
 - a) Analicen qué tipo de números están implicados en las operaciones de la tabla.
 - b) Resuelvan las operaciones siguiendo dos procedimientos distintos.

Operación	Procedimiento 1	Procedimiento 2
$\frac{5}{8} \times \frac{3}{12} =$		
$5 \times 97.56 =$		
$\frac{385}{25} \times 12 =$		
$56.7 \times 36.48 =$		
$\frac{7}{3} \times 0.375 =$		

- En sesión grupal, compartan sus procedimientos y comenten sus resultados. Dialoguen sobre la utilidad de las estrategias que usaron en cada procedimiento y la forma de presentar los resultados: como fracción o número decimal. Observen si alguno de ustedes simplificó el resultado y escriban, en su cuaderno, una conclusión general.

Aplicación sucesiva de factores de proporcionalidad

En equipos, realicen las siguientes actividades.

- En un viaje, a Alejandra le tomaron una fotografía con un teléfono celular. En la pantalla se observan las medidas de la imagen: 11.84 cm de largo por 6.2 cm de ancho. Alejandra necesita imprimir la fotografía para colocarla en $\frac{1}{8}$ de papel cascarón.



- Investiga las medidas de $\frac{1}{8}$ de papel cascarón y determina las medidas de la fotografía resultante. _____
- ¿Qué medidas tendrá la fotografía de la pantalla, si se le aplica un factor de proporcionalidad de $\frac{10}{4}$? _____
- De acuerdo con el factor de proporcionalidad aplicado, ¿será suficiente el papel cascarón que se compró, para colocar la imagen en ella? _____

Factor de proporcionalidad

El **factor de proporcionalidad** es una razón $\frac{a}{b}$ tal que al aplicarse a una cantidad base, la modifica. Cuando se aplica el mismo factor de proporcionalidad a varias cantidades, estas conservan la proporción entre ellas. Por ejemplo, en los lados de una figura.

- Alejandra llevó la fotografía impresa a un centro de copiado, ya que quiere forrar su carpeta de dibujo con ella. La carpeta mide 49.3 cm de largo y 25.6 cm de ancho y solicita una ampliación a $\frac{33}{10}$ de la foto impresa. ¿Podrá colocar la fotografía en la pasta de su libreta o quedará muy pequeña o muy grande? Argumenten su respuesta:

- Comparen sus respuestas con las del resto del grupo y lleguen a acuerdos.

3. ¿Qué procedimiento debe realizar Alejandra si necesita pasar directamente del tamaño de la fotografía tomada con el celular al tamaño de la fotografía para forrar la carpeta de dibujo? _____

• Comparen sus respuestas con las medidas obtenidas anteriormente.

4. Pon en práctica tu respuesta anterior y completa la tabla. Escribe los valores en número decimal y comprueba que el "Tamaño resultante 2" sea correcto.

Medidas de la imagen original L= largo A= ancho	Factor de proporcionalidad 1	Tamaño resultante 1	Factor de proporcionalidad 2	Tamaño resultante 2	Factor de proporcionalidad directo de la imagen original al tamaño resultante 2
L = 10 cm A = 5 cm	$\times \frac{3}{2}$		$\times \frac{6}{5}$	L = 18 cm A = 9 cm	$= \frac{9}{5}$
L = 8,5 cm A = $\frac{8}{5}$ cm	$\times \frac{9}{5}$		$\times \frac{9}{4}$		
L = 12,2 cm A = 3,6 cm	$\times \frac{7}{4}$		$\times \frac{7}{2}$		

Factores sucesivos

Cuando se aplican **varios factores de proporcionalidad** a una medida original, puede obtenerse la constante de proporcionalidad de la medida original a la ampliación final multiplicando directamente el producto de estos factores.

Por ejemplo, si la cantidad base es 5 y se le aplica un factor de proporcionalidad de $\frac{12}{10}$ y luego otro de $\frac{6}{4}$ para pasar de la imagen inicial a la imagen final, se puede aplicar directamente un factor de $\frac{72}{40}$ ya que $\frac{12}{10} \times \frac{6}{4} = \frac{72}{40}$ o su simplificación $\frac{9}{5}$.

Otras fuentes

Visita la página www.esant.mx/ecsema2-001 donde podrás comprobar el resultado de la multiplicación de áreas.

Reúnanse en equipos y resuelvan la actividad.

- Una persona quiere ampliar una imagen para hacer varias pancartas. De la imagen original, pide una reproducción a $\frac{8}{5}$. Al notar que no obtiene el tamaño adecuado, pide que a la reproducción se le aplique un factor de $\frac{15}{4}$ y de esta manera obtiene el tamaño adecuado. El diseñador dice que para hacer las otras pancartas aplicará un factor de $\frac{6}{1}$. ¿Están de acuerdo con lo que dice el diseñador? Argumenten su respuesta.



Factores que dividen



Lee el problema y contesta.

- Para promover un concierto se mandaron hacer anuncios espectaculares de 12 m de largo por 7.20 m de ancho. Para dar mayor difusión al evento, en algunas bardas se colocaron anuncios cuyas medidas eran de $\frac{1}{4}$ del tamaño del espectacular.
 - ¿Cuáles eran las medidas de los anuncios de la barda?

Aprendo mejor

Busca un espacio de estudio libre de objetos que puedan distraerte, como el teléfono o la televisión; puede ser una biblioteca o incluso un parque al aire libre. Así podrás concentrarte mejor y entender los temas que estudias.



Ancho = _____ Largo = _____

- ¿Qué procedimiento seguiste para determinar la medida de los lados del anuncio de la barda? _____

- Compara tu procedimiento y tus resultados con los de otro compañero. Validen sus resultados y propongan otra forma de resolver el problema.



Trabajen en parejas.

- Lee la siguiente información con el compañero con el que validaste tus procedimientos y resultados de la actividad anterior. Corrijan lo que consideren necesario.

Multiplicaciones que aumentan o disminuyen

Cuando se trabaja con cantidades positivas, hay **factores de proporcionalidad** que, al aplicarse, **aumentan** o **disminuyen** el valor de las cantidades.

- Encierra los factores que reducen el valor de cualquier cantidad positiva.

a) $\times \frac{2}{3}$ b) $\times \frac{3}{2}$ c) $\times \frac{1}{16}$ d) $\times \frac{16}{1}$ e) $\times 3$ f) $\times 0.3$

- Validen con otra pareja sus procedimientos y resultados. Redacten en su cuaderno las características que tienen los factores que reducen el valor de una cantidad positiva.

En equipos, lean y resuelvan las siguientes situaciones.

3. Además de la publicidad en espectaculares y bardas, también se imprimirán volantes de 20 cm de largo para repartir en las calles.
- a) ¿Qué factor de proporcionalidad se emplea para pasar del largo de la publicidad de la barda al largo del volante? _____
- b) ¿Cuánto debe medir el ancho del volante si se conservan las proporciones? _____
4. Escriban los factores de proporcionalidad implicados en cada situación y determinen el factor que se puede aplicar para pasar de la publicidad del espectacular a la del volante.



- Comprueben que sus resultados sean correctos y verifiquen que al aplicarlos concuerdan con las medidas de los diferentes tipos de publicidad.

¿Cómo vamos?

1. En equipos completen la tabla que se muestra.

Medidas de la imagen original L = largo A = ancho	Factor de proporcionalidad 1	Tamaño resultante 1	Factor de proporcionalidad 2	Tamaño resultante 2	Factor de proporcionalidad directo de la imagen original al tamaño resultante 2
L = 30 cm A = 15 cm	$\times \frac{\square}{3}$	L = 20 cm A = 10 cm	$\times \frac{1}{4}$		
L = 40 cm A = $\frac{16}{5}$ cm	$\times \frac{3}{\square}$	L = 24 cm	$\times \frac{5}{6}$		
L = 12.24 cm A = 3.6 cm	$\times \frac{3}{4}$			A = 1.35 cm	

- Compartan con el resto del grupo sus resultados y sus estrategias de solución.

Uno divide y el otro multiplica, o viceversa

En parejas, lean la situación y hagan lo que se pide.



Vorticella. Son microorganismos unicelulares de agua dulce que viven en solitario o en grupo.

1. La *Vorticella* es un **protozoo** que, en promedio, mide $84 \mu\text{m}$ (micrómetros), es decir, 0.084 milímetros. Realiza movimientos bruscos cuando las situaciones de su entorno lo requieren. En estos movimientos puede contraer su tallo aproximadamente $\frac{1}{3}$ de su tamaño original. A partir de ese tamaño se alimenta y se expande a una razón de $\frac{30}{7}$.

- a) ¿Cuál es la medida de la *Vorticella* cuando se contrae? _____
 b) Establezcan cuáles de los siguientes procedimientos son incorrectos para determinar la medida de la *Vorticella* después de alimentarse.

Procedimiento A	Procedimiento B	Procedimiento C	Procedimiento D
$0.084 \text{ mm} \times \frac{30}{7} =$ $\frac{84}{1000} \text{ mm} \times \frac{30}{7} =$ $\frac{2520}{7000} \text{ mm} =$ $\frac{252}{700} \text{ mm} = \frac{9}{25} \text{ mm}$	$0.084 \text{ mm} \times \frac{1}{3} =$ $0.084 \text{ mm} \div 3 =$ 0.028 mm	$0.084 \text{ mm} \times \frac{1}{3} \times \frac{30}{7} =$ $\frac{84}{1000} \text{ mm} \times \frac{30}{21} =$ $\frac{2520}{21000} \text{ mm} =$ $\frac{252}{2100} \text{ mm} = \frac{3 \text{ mm}}{25}$	

- c) Argumenten por qué consideraron cada procedimiento como correcto o incorrecto. Luego trabajen con otra pareja y registren, en la columna D, otro procedimiento incorrecto que se puede plantear al realizar los cálculos.

- i. El procedimiento de la columna A es: _____ porque: _____

- ii. El procedimiento de la columna B es: _____ porque: _____

- iii. El procedimiento de la columna C es: _____ porque: _____

- Comparen con el resto del grupo sus argumentos y lleguen a consensos.

Glosario

protozoo.

Organismo microscópico unicelular que vive en ambientes húmedos.

Factores sucesivos

Los factores de proporcionalidad pueden aumentar el valor de una cantidad o reducirla. También se pueden aplicar sucesivamente estos factores combinando ampliaciones y reducciones.

¿Cómo vamos?

Trabajen en parejas y resuelvan las siguientes actividades.

1. Analicen los datos de la tabla y complétenla.

Medidas de la imagen original L = largo A = ancho	Factor de proporcionalidad 1	Tamaño resultante 1	Factor de proporcionalidad 2	Tamaño resultante 2	Factor de proporcionalidad directo de la imagen original al tamaño resultante 2
L = 25 cm A = 40 cm	$\times \frac{9}{8}$			A = 27 cm	
L = 36 cm A = 9 cm	$\times \frac{\square}{3}$		$\times \frac{5}{\square}$		$\frac{20}{18} = \frac{10}{9}$
L = 30 cm A = 60 cm	$\times \frac{7}{2}$			L = 42 cm	

- a) ¿Qué estrategias siguieron para completar la tabla? ¿Cómo comprueban que sus resultados son correctos? _____

2. Sin hacer operaciones, determinen si la figura que resultará es más grande o más pequeña que la original al aplicar los factores de proporcionalidad. Argumenten su respuesta.

- a) Figura original: Triángulo isósceles de lados de 15 cm, 15 cm y 7 cm.

Factores de proporcionalidad aplicados: $\frac{1}{2}$ y $\frac{25}{3}$ _____

- b) Figura original: Terreno de 18 m \times 10 m del cual se quieren generar planos con un factor de $\frac{1}{20}$ y, de ese plano, un **ploteo** o reproducción a un factor de $\frac{8}{3}$.

- Socialicen sus respuestas con el resto del grupo y lleguen a conclusiones generales. Tomen nota, en su cuaderno, de los acuerdos a los que llegaron.

Glosario

ploteo. Dibujar o representar diagramas y gráficos mediante el plóter,

Factor inverso de proporcionalidad

Lee la situación y contesta.

a



- El artista Francisco ofrece sus obras en redes sociales. Para obtener el boceto de la figura b , aplicó un factor $\times \frac{3}{2}$ al tamaño del boceto a ; y para obtener el boceto c , dividió el tamaño del boceto b entre $\frac{6}{5}$.

- ¿Qué procedimiento permite obtener las medidas del boceto b a partir de las medidas del boceto c ? _____
- ¿Qué procedimiento permite obtener las medidas del boceto a a partir de las medidas del boceto b ? _____
- ¿Qué factor de proporcionalidad permite obtener directamente la medida del boceto a a partir de las medidas del boceto c ? _____

b



- Reúnete con otro compañero y corroboren que sus procedimientos y respuestas anteriores son correctos. Consideren que el boceto c mide 10 cm de ancho y 15 cm de largo.

- Francisco imprimió un cuadro que mide 45 cm \times 60 cm, que es del doble de tamaño del boceto original.
 - ¿Con qué procedimiento podemos calcular las medidas del boceto original? _____

c



- ¿Qué factor de proporcionalidad permite obtener el tamaño de la imagen del cuadro a partir del boceto original? Escribe dos representaciones distintas de este factor. _____
 - ¿Qué factor de proporcionalidad permite obtener la medida de la imagen del cuadro al boceto original? Escribe dos representaciones distintas de este factor. _____
- De un cuadro que pintó, Francisco hará estampados en termos para café con un factor $\frac{1}{5}$. Si la medida del estampado en los termos es de 9 cm \times 12 cm,
 - ¿con qué procedimiento se pueden calcular las medidas del cuadro? _____
 - ¿qué factor de proporcionalidad permite obtener la medida del cuadro a partir del estampado? Escribe dos representaciones distintas de este factor. _____

- Corroboren grupalmente sus respuestas y, con ayuda de su profesor, determinen el significado de los factores que permiten obtener la medida original.

Factores inversos

Cuando a un valor dado (x) se le ha aplicado un factor o constante de proporcionalidad (k) y se requiere conocer el valor original, es necesario utilizar el **factor inverso de proporcionalidad**, el cual se representa por $\frac{1}{k}$.

Por ejemplo, en la multiplicación $50 \times \frac{3}{4} = 37.5$, el factor inverso de $\times \frac{3}{4}$ es $\times \frac{4}{3}$, ya que: $37.5 \times \frac{4}{3} = 50$.

Lee la situación y contesta.



- En una tienda de aparatos electrónicos, un cliente pagó \$5 000 por un televisor con el IVA incluido. El gerente del establecimiento pidió que se revirtiera ese cobro ya que, ese día, la tienda tenía una promoción en la cual no se cobraría el IVA. El IVA es un impuesto que se añade al precio base del producto. En el caso del televisor equivale a 16% o a $\frac{4}{25}$.

a) ¿Qué procedimiento emplearías para revertir el cobro del IVA? _____

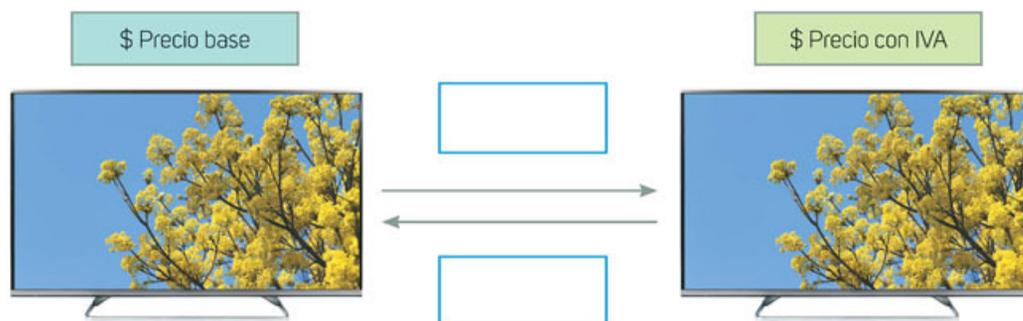
- Aplica tu procedimiento y comprueba que la respuesta es correcta.

- Considera que el IVA se representa como $\frac{4}{25}$.

a) ¿Con qué fracción pueden representar el precio original de la televisión? _____

b) ¿Cuánto suma el precio original del producto más el IVA? _____

- Completa el esquema. Escribe la operación que se realizó para obtener el precio del televisor. Luego anota la operación con la cual regresarías el costo con el IVA incluido al precio base.



- Compara tus respuestas con las de tus compañeros de grupo, lleguen a acuerdos generales y redacten una conclusión sobre sus procedimientos, tomando en cuenta las siguientes ideas: factor inverso, procedimiento para revertir un factor de proporcionalidad y diferentes representaciones del factor inverso.

Otras fuentes

Explora el siguiente recurso www.esant.mx/ecsema2-002 y observa cómo cambia el tamaño de las imágenes al aplicar diversos factores sucesivos de proporcionalidad.

Multiplicación y división



Lean los planteamientos en parejas y contesten.

- Para reparar una instalación sanitaria se requieren 5.6 metros de tubo PVC. En una tlapalería, el metro de tubo PVC cuesta \$67.50.
 - ¿Cuál será el costo total del tubo en esa tlapalería? _____
 - ¿Qué procedimiento siguieron para calcular la respuesta? _____

 - Marco compró 5.5 kg de jitomate y pagó \$123.75.
 - ¿Cuál fue el precio por kilogramo de jitomate? _____
 - ¿Qué procedimiento siguieron para calcular la respuesta? _____
 - ¿Qué diferencia hay entre el procedimiento del primer problema y el del segundo? _____

- Compartan con otras parejas sus procedimientos y sus resultados. Encuentren al menos dos procedimientos distintos para resolver cada situación.



Reúnanse en equipo y representen las situaciones en su cuaderno por medio de segmentos.

- Respondan.
 - Tracen un segmento de 4 cm. Reprodúzcanlo otras tres veces y coloquen los segmentos linealmente, de manera que se forme un segmento más grande. ¿Cuál es la longitud total de los segmentos? _____
 - Tracen un segmento de 0.5 cm y reprodúzcanlo linealmente cinco veces. ¿Cuál es la longitud total del segmento en centímetros? _____
 - Se tiene un segmento de 10 cm. Tracen un segmento que mida $\frac{1}{2}$ de este. ¿Cuál es la longitud del nuevo segmento en centímetros? _____
 - Dado un segmento de 3.9 cm, tracen uno que mida un tercio de este. ¿Cuál es la longitud total del segmento en centímetros? _____
 - Tracen un segmento que mida $\frac{55}{10}$ de cm y divídanlo en segmentos de $\frac{5}{10}$ de cm de longitud. ¿Cuántas veces cabe un segmento de 0.5 cm en otro de 5.5 cm? _____
- Analicen la relación que hay con la actividad inicial. Realicen una síntesis donde resalten lo que entienden por trazar un tercio o la mitad.

2. Analicen cada situación y contesten.

- a) Un segmento de 4 cm colocado cuatro veces.



- i. En el enunciado y en la gráfica anterior están involucrados dos números naturales: el 4 que corresponde a la longitud y el 4 que equivale a las veces que se repite. Escriban dos operaciones distintas que representen esta situación. _____

- b) Un segmento de 0.5 cm colocado cinco veces.



- i. En el enunciado y en la gráfica están involucrados un número decimal y un número natural. Escriban dos operaciones distintas con las que puedan representar esta situación. _____
- _____

- c) La mitad de un segmento de 10 cm.



- i. En el enunciado y en la gráfica están involucrados un número natural y un número fraccionario. Escriban dos operaciones distintas con las que puedan representar esta situación. _____

- d) Un tercio de un segmento de 3.9 cm.



- i. En el enunciado y en la gráfica están involucrados un número decimal y un número fraccionario. Escriban dos operaciones distintas con las que puedan representar esta situación. _____

- e) Un segmento que mide $\frac{55}{10}$ de cm entre $\frac{5}{10}$ de cm.



- i. En el enunciado y en la gráfica están involucrados dos números fraccionarios. Escriban dos operaciones distintas con las que puedan representar este enunciado. _____

- Comparen los trazos con los realizados en la actividad 1. Corrobores sus respuestas con las del resto del grupo y compartan los argumentos por los que eligieron esas operaciones.

Relación entre la multiplicación y la división

En equipos de tres integrantes, analicen los problemas y respondan.

1. Al final de una reunión quedaron $5\frac{1}{2}$ botellas de refresco. Consideren que una botella de refresco contiene $2\frac{1}{2}$ L. ¿Cuántos litros de refresco quedaron?
 - a) ¿Qué procedimiento seguirán para resolver el problema? _____
 - b) ¿Cuántos litros de refresco quedan? _____
 - c) Intenten resolver el problema con otro procedimiento distinto al anterior. ¿Obtuvieron el mismo resultado? _____
 - d) Comprueben que sus resultados sean correctos.

2. Un tráiler transporta $5\frac{1}{2}$ toneladas de guayabas en cajas de $\frac{1}{100}$ de tonelada cada una. ¿Cuántas cajas lleva el tráiler?
 - a) ¿Qué procedimiento seguirán para resolver el problema? _____
 - b) ¿Cuántas cajas transporta el tráiler? _____
 - c) Intenten resolver el problema con un procedimiento distinto al anterior. ¿Obtuvieron el mismo resultado? _____
 - d) Comprueben que su resultado o sus resultados son correctos.

- Comparen sus respuestas con las de sus compañeros de grupo, listen los procedimientos usados al resolver los problemas y permitan que un integrante del equipo exponga brevemente el procedimiento que registró.

3. En primero de secundaria trabajaron con diferentes procedimientos para multiplicar fracciones. Es momento de que integren su conocimiento para que comprendan la división entre fracciones. Usen alguno de los procedimientos que describieron en las actividades anteriores o la calculadora, para resolver las operaciones.

a) $\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} =$	e) $\frac{3}{8} \div \frac{9}{4} =$
b) $\frac{3}{4} \div \frac{2}{1} =$	f) $\frac{3}{8} \times \frac{9}{4} =$
c) $\frac{6}{5} \times \frac{7}{3} =$	g) $\frac{15}{4} \times \frac{8}{5} =$
d) $\frac{6}{5} \div \frac{7}{3} =$	h) $\frac{15}{4} \div \frac{5}{8} =$

 - i. ¿Qué tienen en común las operaciones cuyo resultado es el mismo? _____

- Socialicen sus procedimientos y sus respuestas.

Operaciones combinadas

Lee las situaciones.

1. Contesta.

a) En un sistema de riego de parcelas se llenaron 15 depósitos a $\frac{3}{4}$ de su capacidad máxima, la cual es de 750.5 litros.

i. ¿Cuántos litros de agua hay en total en el sistema? _____

b) Con el total de litros se regarán, de manera equitativa, 300 m² de parcelas.

i. ¿Cuánta agua se empleará por m²? _____

c) ¿Qué tipo de operaciones realizaste en el inciso a? _____

d) ¿Qué tipo de operaciones realizaste en el inciso b? _____

e) Cada uno de cinco pintores tiene un bote con $3\frac{5}{8}$ de litros de pintura. Entre los cinco pintarán 25 m² de pared y usarán la misma cantidad de pintura por m².

i. ¿Cuánta pintura usarán por m²? _____

- Compara tus respuestas con las de otro compañero, analicen sus procedimientos y validen sus resultados.

2. Realicen la siguiente actividad en parejas.

a) Primero, cada uno invente un problema y resuélvalo. Posteriormente, anótenlo en estas líneas y díctenlo a su compañero para que lo resuelva.

b) Tu compañero realizará lo mismo que en el punto anterior y te dictará su problema. Anótalo en las líneas y resuélvelo.

- Comparen sus respuestas y procedimientos.

Multiplicaciones y divisiones con números fraccionarios y decimales en contexto

En varias situaciones cotidianas están involucradas la multiplicación y la división con números fraccionarios o números decimales. Por ejemplo, en algunas gasolineras los clientes piden una cantidad exacta en pesos (\$) y la computadora realiza el cálculo.

En algunas empresas se analiza el rendimiento de sus automóviles por cada litro de gasolina y para tal situación, se compara el rendimiento mediante diferentes operaciones.

Trabajen en parejas las siguientes actividades.



- Un conductor pidió \$300 de gasolina en una gasolinera donde venden el litro a \$18.34. ¿Cuántos litros de gasolina le dieron? _____

 a) ¿Qué operación u operaciones realizaron para encontrar la respuesta?

 - Si el rendimiento del automóvil es de $\frac{71}{5}$ de kilómetro por litro, ¿cuántos kilómetros puede recorrer con lo que cargó de gasolina? _____
 a) ¿Qué tipo de operaciones están involucradas en la segunda parte del problema?

 - ¿Qué dificultades enfrentaron al resolver la primera parte del problema y cómo las solucionaron? _____

 - ¿Qué dificultades enfrentaron y qué procedimientos emplearon en la segunda parte del problema? ¿Cómo las resolvieron? _____

- Comparen sus resultados y sus procedimientos con los del resto del grupo y lleguen a acuerdos generales. ¿Qué otro tipo de aplicaciones conoces? En sesión grupal, comenten los ejemplos que conocen.

Multiplicación de números enteros



Lee la situación y contesta.

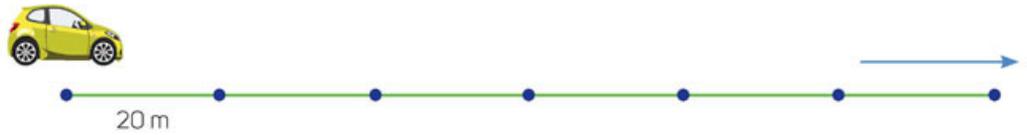
- Los fabricantes de automóviles, antes de lanzarlos al mercado, los someten a pruebas de climatología, de motor, potencia y comportamiento sobre todo tipo de superficies.

Estas pruebas se llevan a cabo en dos pistas de acuerdo con algunas indicaciones. Dibuja la posición y el desplazamiento del automóvil según se indica en cada situación.

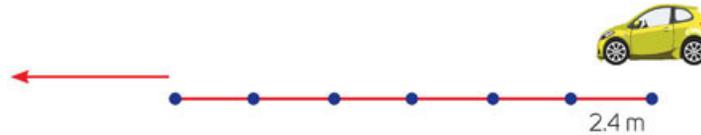
Aprendo mejor

Usa fichas de trabajo con el fin de estudiar los temas que se te dificulten. Para ello, pon el título del tema, los conceptos o los procedimientos y un ejemplo.

- Avanza cuatro veces, en dirección de la pista verde, distancias de 20 metros.



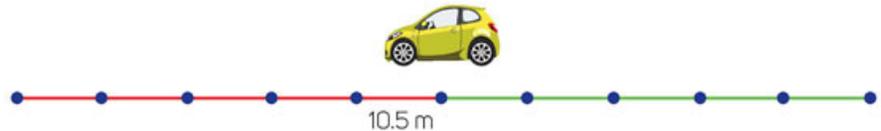
- Avanza seis veces, en dirección de la pista roja, distancias de 2.4 metros.



- Retrocede tres veces, distancias de 14 metros, manteniendo la dirección del automóvil.



- Retrocede cinco veces, distancias de 10.5 metros, manteniendo la dirección del automóvil.



- ¿Los autos se encuentran en la misma posición? _____
- ¿Con qué pueden relacionar a las pistas roja y verde? _____
- ¿Pueden existir distancias negativas en la vida real? _____

- Compara tus dibujos y tus respuestas con otro compañero.

Lee la siguiente información y responde.

Números relativos

Las expresiones “bajo el nivel del mar”, “cinco grados bajo cero”, “profundidad de 400 m”, “deuda de \$500”, “descuento de \$20”, “faltan 5 kilómetros para llegar”, entre otras, contienen cantidades que se escriben como positivas porque son relativas a una referencia (el nivel del mar, 0 °C, saldo neutro, etcétera). También se pueden representar como cantidades negativas de acuerdo con el contexto en que se apliquen. Por ejemplo, “-\$20 de descuento” o “-5 °C”.

1. Aunque en la realidad no existen distancias negativas, para efectos de la actividad consideren que la pista roja de la actividad inicial representa la parte negativa en un segmento de recta numérica, y la parte verde, la parte positiva. Reúnanse en pareja y respondan.
 - a) ¿Cómo pueden representar numéricamente o matemáticamente una distancia de 20 metros en dirección de la pista verde? _____ ¿Y “avanzar cuatro veces esa distancia”? _____
 - b) Representen numéricamente o matemáticamente de dos maneras distintas “avanzar distancias” de 2.4 m seis veces en dirección de la pista roja. _____
 - c) ¿Cómo representan numéricamente o matemáticamente “retroceder tres veces”? _____
 - d) ¿Y retroceder distancias de 14 m tres veces en dirección de la pista verde? _____
 - e) Representen numéricamente o matemáticamente de dos maneras distintas “retroceder distancias” de 10.5 m cinco veces en dirección de la pista roja. _____
- Comparen sus respuestas con las de otras parejas y verifiquen que las expresiones que escribieron concuerden con la posición de los automóviles que dibujaron en la actividad 1. ¿Qué regularidades observan?

Interpretación de la multiplicación

Al **multiplicar dos cantidades, el primer factor indica las veces que el segundo factor se repetirá en una adición**. Por ejemplo, 5×3 significa que 5 veces se repetirá el 3, es decir, $3 + 3 + 3 + 3 + 3$.

En el contexto de la actividad, podríamos representar “avanzar” como una cantidad positiva. Por ejemplo, “avanzar 5 veces” podría representarse como +5 en el primer factor de una multiplicación. “Retroceder” se puede representar como una cantidad negativa. “Retroceder 5 veces” puede escribirse como -5. En algunos casos conviene usar paréntesis para no confundir el signo negativo con una sustracción. Por ejemplo, $2 \times (-3) = (-3) + (-3)$.

Regularidad en sucesiones de multiplicaciones

Haz lo que se pide y contesta.

1. Completa la tabla. Apóyate en la recta.



	Primer factor	Segundo factor	Resultado
A. Avanzar 5 veces +2 unidades	+5	+2	+10
B. Avanzar 5 veces -2 unidades			
C. Retroceder 5 veces +2 unidades			
D. Retroceder 5 veces -2 unidades		-2	

- a) De acuerdo con el punto A, ¿qué signo tiene el primer factor? _____
 ¿Y el segundo factor? _____ ¿Y el resultado? _____
- b) De acuerdo con el punto B, ¿qué signo tiene el primer factor? _____
 ¿Y el segundo factor? _____ ¿Y el resultado? _____
- c) De acuerdo con el punto C, ¿qué signo tiene el primer factor? _____
 ¿Y el segundo factor? _____ ¿Y el resultado? _____
- d) De acuerdo con el punto D, ¿qué signo tiene el primer factor? _____
 ¿Y el segundo factor? _____ ¿Y el resultado? _____
- e) ¿Qué regularidades identificas entre los signos de los factores y los signos de los resultados? _____

- Compara tus respuestas con otro compañero.

Resuelvan en parejas lo que se pide.

2. Observen las regularidades en las sumas repetidas de la primera tabla y en los primeros resultados de la tabla azul. ¿Cómo completarían las últimas tres filas en cada tabla? Luego, completen las tablas.

Operación	Suma repetida	Resultado
$5 \times 3 =$		
$5 \times 2 =$	$2 + 2 + 2 + 2 + 2$	
$5 \times 1 =$		
$5 \times 0 =$		
$5 \times (-1) =$		
$5 \times (-2) =$		
$5 \times (-3) =$		

Operación	Suma repetida	Resultado
$3 \times 5 =$		
$2 \times 5 =$		
$1 \times 5 =$		
$0 \times 5 =$		
$(-1) \times 5 =$	$(-1) + (-1) + (-1) + (-1) + (-1)$	-5
$(-2) \times 5 =$		
$(-3) \times 5 =$		

Operación	Suma repetida	Resultado
$3 \times (-5) =$		
$2 \times (-5) =$		
$1 \times (-5) =$		
$0 \times (-5) =$		
$(-1) \times (-5) =$		
$(-2) \times (-5) =$		
$(-3) \times (-5) =$		

- a) ¿Qué regularidades observan en las sumas repetidas de la tabla verde? _____

 ¿Qué regularidades observan en los resultados? _____
- b) ¿Qué regularidades observan en las sumas repetidas de la tabla azul? _____

 ¿Qué regularidades observan en los resultados? _____
- c) ¿Qué regularidades observan en las sumas repetidas de la tabla morada? _____

- d) ¿Qué regularidades observan en los resultados? _____
- Con lo que hasta el momento saben y han trabajado, escriban una breve explicación que justifique el resultado de la multiplicación entre cantidades con diferentes signos y la multiplicación de cantidades con signos iguales.
- 3. Individualmente escribe el signo que tendrá el resultado en cada caso.**
- a) (Una cantidad positiva) \times (Una cantidad positiva) = _____
- b) (Una cantidad positiva) \times (Una cantidad negativa) = _____
- c) (Una cantidad negativa) \times (Una cantidad positiva) = _____
- d) (Una cantidad negativa) \times (Una cantidad negativa) = _____
- Analiza y explica lo que ocurre con los signos en cada caso. Con ayuda del profesor, escriban las "reglas de los signos para la multiplicación de números enteros".

¿Cómo vamos?

1. Resuelvan las siguientes operaciones en parejas.

a) $4 \times (-19) =$ _____

c) $7 \times 16 =$ _____

b) $-51 \times 8 =$ _____

d) $-21 \times (-10) =$ _____

- Comprueben sus procedimientos y sus resultados con su calculadora. ¿Qué características tienen las multiplicaciones cuyo resultado es positivo? ¿Y cuando el resultado es negativo? Compartan con el grupo sus respuestas.

Regla de los signos para la multiplicación

Resuelvan las siguientes situaciones en parejas.

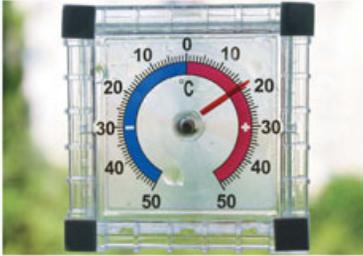


1. Cada personaje de un juego de video tiene 4 000 puntos de vida y cuando recibe un ataque, aparece un número rojo, como se muestra en la imagen.

- ¿Qué significan el número rojo y su signo? _____

- Si un personaje recibe nueve ataques, ¿con qué operación pueden representar dicha situación? _____
- ¿Cuál es el daño total? _____
- En el juego también se pueden recuperar puntos de vida. ¿Por qué consideras que aparece el signo negativo junto al número y no solo la cantidad 200? _____

2. En los restaurantes es necesario mantener algunos alimentos congelados. La temperatura de un alimento antes de colocarlo en el congelador es el que se muestra en la imagen.



- Si cada minuto la temperatura desciende 2°C , ¿qué temperatura tendrá el alimento después de 15 minutos? _____
- Argumenten y completen: debido a que la temperatura desciende 2°C cada minuto, se multiplica _____

- Comparen los procedimientos usados y sus diferencias. Determinen si las multiplicaciones con números negativos fueron de utilidad.

Reglas de los signos para la multiplicación

- Al multiplicar dos cantidades negativas $(-a)(-b) = ab$, el resultado será positivo. Por ejemplo, $(-5)(-8) = 40$.
 - Al multiplicar dos cantidades positivas $(a)(b) = ab$, el resultado será positivo. Por ejemplo, $(5)(8) = 40$.
 - Al multiplicar dos cantidades con signos diferentes $(a)(-b) = -ab$, el resultado será negativo. Por ejemplo, $(5)(-8) = -40$.
 - Al multiplicar dos cantidades con signos diferentes $(-a)(b) = -ab$, el resultado será negativo. Por ejemplo, $(-5)(8) = -40$.
- Donde a y b , son números naturales.

3. En parejas, analicen las operaciones de la tabla y determinen si hay errores. En los casos donde sea necesario, corrijan la operación. Argumenten sus respuestas.

Operación	¿Tiene errores? Sí / No	Operación corregida
$-95 \times -13 = -108$		
Argumento		
$-2 \times 2 = -4$		
Argumento		
$+36 \times (+87) = -3132$		
Argumento		
$96 \times -24 = -2304$		
Argumento		
$-72 \times -11 = 792$		
Argumento		

Otras fuentes

Entra al enlace para descargar un recurso interactivo que te permitirá seguir aprendiendo más sobre multiplicación y división de números con signo:
www.esant.mx/ecsema2-004.

Resuelvan en parejas la situación.



1. En la institución donde trabaja Rebeca, le descuentan quincenalmente una parte de su sueldo para la caja de ahorro. Ella lleva trabajando en esa institución exactamente seis años y necesita un informe del total descontado.

TALÓN DE PAGO AL TRABAJADOR

PÁGUESE A Rebeca Sánchez González		MES 09	DÍA 30	AÑO 06	NÚMERO DE AFILIACIÓN 0126445245- 5245 - 003	GPO. 1/1
PERIODO DE PAGO 15 de septiembre de 2006 a 30 de septiembre de 2006						
CONCEPTO	IMPORTE	CONCEPTO	IMPORTE			
Sueldo	2 130.35	Seguro Social	- 120.12			
Impuesto sobre la renta	-213.03	Caja de ahorro	- 105.00			
Ayuda vivienda	45.00					
				TOTAL		

- a) Con respecto a lo anterior, ¿qué cantidad escribirían en el informe? Argumenten su respuesta. _____

- De manera grupal, validen sus respuestas y procedimientos. Comparen la definición dada en la página anterior con la que elaboraron al final de la sesión 2 de esta secuencia. Elijan a dos de sus compañeros para que le expliquen al profesor las reglas de los signos. Establezcan conclusiones generales.

Sesión 3. Resuelves problemas contextualizados que impliquen la multiplicación de números enteros para dar sentido a la regla de los signos para la multiplicación.

División entre números enteros



Lee y resuelve.

- Una persona juega en una máquina tragamonedas y registra sus ganancias y pérdidas. Perdió el primer juego y registró $-\$25$. Después de varios juegos, en ninguno de los cuales ganó, registró una cantidad final de $-\$225$. Considera que en cada juego no ganado, se pierden $\$25$.
 - ¿Cuántas veces jugó? _____
 - ¿Qué significa $-\$25$? _____
 - ¿Qué significa $-\$225$? _____
 - ¿Qué procedimiento seguiste para resolver el problema? _____

 - ¿Cómo comprobarías que tu respuesta es correcta? _____

- Comenten sus procedimientos y resultados en parejas.



Resuelve con un compañero.

- Hagan las operaciones y respondan.

Operación	Resultado	Operación	Resultado
$8 \times 4 =$		$\frac{8}{4}$	
$8 \div 4 =$		$\frac{8}{-4}$	
$8 \times (-4) =$		$\frac{-8}{4}$	
$8 \div (-4) =$		$\frac{-8}{-4}$	
$-8 \times 4 =$			
$-8 \div 4 =$			
$-8 \times (-4) =$			
$-8 \div (-4) =$			

- ¿Qué relación encuentran entre los resultados de las multiplicaciones y el resultado de las divisiones? _____

- ¿Qué signo tiene el resultado de multiplicar dos cantidades positivas? _____
- ¿Qué signo tiene el resultado de dividir dos cantidades positivas? _____
- ¿Qué signo tiene el resultado de multiplicar una cantidad positiva y una negativa? _____

- ¿Qué signo tiene el resultado de dividir una cantidad positiva entre una negativa? _____

- ¿Qué signo tiene el resultado de multiplicar dos cantidades negativas? _____
- ¿Qué signo tiene el resultado de dividir dos cantidades negativas? _____

- Usen la calculadora para validar las respuestas de las operaciones de la tabla y escriban en su cuaderno las reglas para dividir números con signo.

2. De manera grupal, analicen la situación y respondan.

Algunas personas donan sangre o tejidos (como el hueso) para que los laboratorios realicen investigaciones y generen más tejido. Un hueso donado se congela con nitrógeno líquido llegando a alcanzar una temperatura de $-196\text{ }^{\circ}\text{C}$.

- ¿Qué representa la cantidad $-196\text{ }^{\circ}\text{C}$? _____
- Antes de agregar nitrógeno líquido, el hueso estuvo en una hielera a una temperatura de $0\text{ }^{\circ}\text{C}$. Posteriormente se sometió al nitrógeno líquido y llegó a $-196\text{ }^{\circ}\text{C}$ en 55 minutos. ¿Cuánto varió la temperatura cada minuto? _____
- ¿Cómo obtuvieron la respuesta anterior? _____
- ¿Cómo pueden validar sus respuestas? _____



El nitrógeno líquido tiene capacidad para mantener temperaturas muy por debajo del punto de congelación del agua.

- Comenten sus estrategias y sus respuestas con otras parejas.

3. Contrasten la siguiente información con la regla de los signos que escribieron.

Reglas de los signos para la división

Las reglas de los signos para la división señalan que:

- Al dividir dos cantidades negativas, el resultado será positivo.
 $\frac{(-a)}{(-b)} = +\frac{a}{b}$. Por ejemplo, $\frac{-20}{-5} = \frac{20}{5} = 4$.
- Al dividir dos cantidades positivas, el resultado será positivo.
 $\frac{(+a)}{(+b)} = +\frac{a}{b}$. Por ejemplo, $\frac{+20}{+5} = \frac{20}{5} = 4$.
- Al dividir dos cantidades con signos diferentes, el resultado será negativo.
 $\frac{(+a)}{(-b)} = -\frac{a}{b}$; $\frac{(-a)}{(+b)} = -\frac{a}{b}$. Por ejemplo, $\frac{20}{-5} = -4$ y $\frac{-20}{5} = -4$.
 Donde a y b , son números naturales.

¿Cómo vamos?

1. Resuelvan las operaciones en parejas.

a) $-145 \div 29 =$

b) $-322 \div (-14) =$

c) $\frac{648}{-36} =$

d) $\frac{336}{48} =$

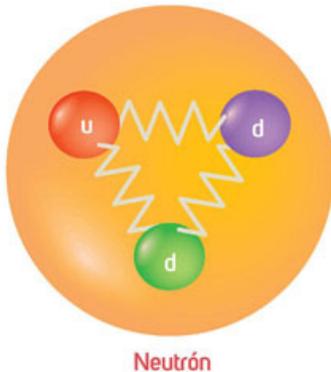
e) $4745 \div (-65) =$

f) $\frac{-7695}{-81} =$

- Verifiquen sus resultados con otras parejas.

División entre números fraccionarios negativos y positivos

Resuelve la siguiente situación.



- Como lo verás en Física, el término **cuark** se emplea para referirse a una partícula elemental más pequeña identificada. Algunos **cuarks** tienen cargas negativas, por ejemplo, el "cuark abajo (*d*)" tiene una carga eléctrica de $-\frac{1}{3}$ de carga elemental. Dos cuarks abajo forman partículas más grandes, como los neutrones y para que la carga sea neutra, existe un "cuark arriba" con carga de $+\frac{2}{3}$.

El **vanadio** es un elemento que, considerando solo los cuarks abajo, tiene una carga elemental de $-\frac{56}{3}$.

- ¿Cuántos neutrones tiene el vanadio? _____
- ¿Qué estrategia seguiste para resolver el problema? _____

- Describe el procedimiento que seguiste para comprobar tu resultado. _____

- Compara tus respuestas y tus procedimientos con los de otro compañero y lleguen a conclusiones.

- Resuelvan las operaciones en parejas.

Operación	Resultado
$8 \times 4 =$	
$8 \div \frac{1}{4} =$	
$-8 \times 4 =$	
$-8 \div \frac{1}{4} =$	
$8 \times (-4) =$	
$8 \div (-\frac{1}{4}) =$	
$-8 \times (-4) =$	
$-8 \div (-\frac{1}{4}) =$	

- Escriban en su cuaderno al menos dos procedimientos distintos para resolver las operaciones anteriores. Pueden comprobar sus resultados con la calculadora. Analicen las regularidades.

Glosario

Cuark. Componente elemental de otras partículas subatómicas como el protón y el neutrón, y que no existe de manera aislada.

Vanadio (V). Elemento químico metálico. Se usa como catalizador y, aleado, para mejorar las propiedades mecánicas del hierro, el acero y el titanio.

Neutrón. Es una partícula subatómica con carga neutra total presente en el núcleo atómico.

3. En parejas analicen la siguiente operación y respondan.

$$\frac{\frac{8}{3}}{\frac{2}{6}} =$$

- a) ¿De qué operación se trata? _____

- b) ¿Qué procedimiento seguirán para resolverla? _____

- Verifiquen su respuesta comparándola con las notas que realizaron al final de la actividad 2 de la página anterior.

¿Cómo vamos?

1. Resuelvan las siguientes operaciones en parejas y simplifíquenlas.

a) $4 \div \frac{9}{7} =$

b) $\frac{6}{5} \div 8 =$

c) $\frac{3}{7} \div (-6) =$

d) $-15 \div \frac{11}{12} =$

e) $\frac{1}{2} \div \frac{6}{7} =$

f) $-\frac{7}{5} \div \frac{16}{7} =$

g) $-\frac{3}{2} \div \frac{4}{5} =$

h) $\frac{3}{4} \div \frac{7}{9} =$

i) $\frac{26}{16} \div -\frac{14}{24} =$

j) $\frac{14}{3} \div -\frac{5}{6} =$

k) $-\frac{23}{14} \div (-\frac{5}{6}) =$

l) $\frac{\frac{4}{7}}{\frac{3}{8}} =$

m) $-\frac{\frac{5}{2}}{\frac{4}{6}} =$

n) $\frac{\frac{1}{9}}{\frac{7}{6}} =$

ñ) $-\frac{\frac{4}{7}}{\frac{3}{8}} =$

o) $\frac{\frac{1}{7}}{\frac{2}{3}} =$

p) $-\frac{2\frac{5}{10}}{\frac{5}{10}} =$

- De manera grupal, comparen las respuestas y compartan los procedimientos que siguieron para resolver las operaciones. Con ayuda de su profesor, apoyen a los compañeros que tuvieron dificultades.

División entre números decimales negativos y positivos

En equipo, analicen la situación y respondan.

- El estado de cuenta que se muestra representa los cargos y depósitos realizados por una persona en un mes.

IMPORTE CARGOS	IMPORTE ABONOS
\$ 170.00	
\$ 220.00	
\$ 122.00	
\$ 69.62	
	\$ 2 948.31-
\$ 19.00	\$ 328.60 -
	\$ 569.00 -
\$ 234.60	
\$ 94.00	
\$ 569.00	
\$ 1 498.22	\$ 3 845.91-

- ¿Qué significa la columna "IMPORTE CARGOS"? _____
- ¿Qué significa la columna "IMPORTE ABONOS"? _____
- ¿Cómo interpretan el importe \$2 948.31-? _____
- ¿Y el de \$69.62? _____
- Si una persona realizará un depósito de \$355.50 quincenalmente a la cuenta de un amigo que le prestó dinero, ¿cómo se registrará ese depósito en el estado de cuenta del amigo? _____
- Si en total a esa persona le prestaron \$6 043.50, ¿en cuántos meses terminará de pagar? _____

- Expongan los diferentes procedimientos que siguieron para responder.

Realicen en parejas lo que se solicita.

- Resuelvan las operaciones.

Operación	Resultado
$20.28 \div 5.2 =$	
$-20.28 \div 5.2 =$	
$20.28 \div (-5.2) =$	
$-20.28 \div (-5.2) =$	

- ¿Qué estrategia siguieron para resolver el ejercicio de la primera fila? _____
- ¿Qué estrategia siguieron para resolver los ejercicios de la segunda y la tercera filas? _____
- ¿Qué estrategias siguieron para resolver el ejercicio de la cuarta fila? _____

- Comparen en grupo sus resultados y sus estrategias de solución.

3. Una cápsula de exploración submarina descendió a velocidad constante. Después de 5.2 horas se encontraba a $-5\,213$ m respecto al nivel del mar.

a) ¿En qué posición se encontraba en la primera hora? _____

b) ¿Qué estrategia de solución usaste? _____

En parejas, hagan lo que se pide.



1. Resuelvan las operaciones.

a) $1518.3584 \div 25.84 =$

e) $-0.000006 \div 0.003 =$

b) $855.81825 \div (-67.123) =$

f) $1010.88 \div 43.2 =$

c) $-649.5552 \div 45.36 =$

g) $-333.56 \div (-6.2) =$

d) $-2714.40312 \div (-31.2) =$

h) $0.0432 \div (-0.005) =$

• Comparen sus respuestas y procedimientos. Analicen las regularidades con respecto a las actividades que han resuelto en esta sesión.

2. Inventen un problema que involucre la división entre números decimales negativos y escríbanlo.

3. Dicten su problema a otra pareja. Escriban el problema planteado por la otra pareja y resuévanlo.

• Verifiquen sus procedimientos y sus respuestas. De manera grupal, respondan dudas y, con ayuda de su profesor, lleguen a conclusiones generales.

Otras fuentes

En el siguiente sitio www.esant.mx/ecsema2-005 podrás ver un video y resolver ejercicios sobre lo aprendido en esta secuencia.

División de números enteros, fracciones y decimales negativos y positivos

En esta sección aprenderás a dividir números enteros, fracciones y decimales negativos y positivos en una hoja de cálculo electrónica.

	A	B	C	D
1	Dividendo	Divisor	Cociente	
2	4	-2	=A2/B2	
3	6	2		
4	-9	3		
5	16	-2		
6	-1	-1		
7	48	12		
8	72	-9		
9				

	A	B	C	D	E	F	G
1	Dividendo	Divisor	Cociente				
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							
9							

Formato de celdas	
Número	Alineación Fuente Borde Relleno Proteger
Categoría:	Muestra
General	
Número	
Moneda	
Contabilidad	
Fecha	
Hora	
Porcentaje	
Fracción	Tipo:
Científica	Hasta un dígito (1/4)
Texto	Hasta dos dígitos (21/25)
Especial	Hasta tres dígitos (312/943)
Personalizada	Como medios (1/2)
	Como cuartos (2/4)
	Como octavos (4/8)
	Como dieciseisavos (8/16)
	Como décimas (3/10)

1. Realiza de manera individual lo que se pide.

- Abre una hoja de cálculo electrónica y copia la información que se muestra.
- En la celda C2 escribe " $=A2/B2$ " y presiona Enter. Haz clic en la esquina inferior derecha de esa celda y, sin soltar el botón, arrastra el cursor hasta la celda C8.

2. Contesta de acuerdo con los resultados.

- ¿Cuál es el signo del cociente si el dividendo y el divisor son positivos? _____
- ¿Y si el dividendo y el divisor son negativos? _____
- Cuando el dividendo y el divisor tienen signos distintos, ¿cuál es el signo del cociente? _____

3. Sigue las instrucciones de manera individual.

- Borra los números de la tabla anterior o abre una nueva hoja de cálculo electrónica y copia los encabezados de las columnas.
- Selecciona las celdas A2 a C9 y, con el botón derecho, selecciona el Formato de celdas. Presiona la flecha inferior derecha del recuadro Número. Después elige Fracción y Hasta dos dígitos.

iii. En la celda C2, escribe "= A2/B2" y presiona Enter. De nuevo haz clic en la esquina inferior derecha de esa celda y, sin soltar el botón, mueve el cursor hasta la celda C9.

iv. Usa la hoja de cálculo electrónica para calcular las siguientes divisiones y contesta.

a) $\frac{1}{9} \div \frac{2}{3} =$

b) $-\frac{2}{3} \div \frac{3}{4} =$

c) $\frac{4}{5} \div \frac{5}{6} =$

d) $-\frac{2}{9} \div -\frac{4}{5} =$

e) $\frac{3}{4} \div \frac{2}{5} =$

f) $\frac{7}{8} \div -\frac{2}{3} =$

g) $-\frac{2}{3} \div \frac{1}{3} =$

h) $\frac{3}{5} \div -\frac{4}{5} =$

v. Responde con base en los resultados obtenidos.

a) ¿Cómo se realiza la división de dos fracciones? _____

b) ¿Las reglas para dividir números con signo en este caso son las mismas que al dividir números enteros? ¿Por qué? _____

4. Haz lo que se indica.

i. Repite los pasos i. a iii. anteriores, pero en el paso ii. elige la opción Número y aumenta las posiciones decimales a 4.

ii. Calcula las divisiones con apoyo de la hoja de cálculo electrónica.

a) $12.5 \div -2.5 =$

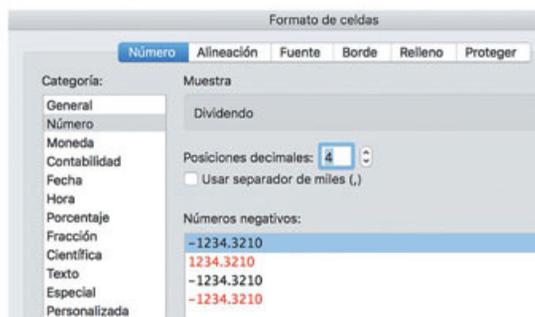
b) $3.24 \div 1.8 =$

c) $-7.875 \div -3.5 =$

d) $0.57 \div 1.2 =$

e) $-32.77 \div 7.25 =$

f) $0.008 \div -0.064 =$



iii. Haz los cambios necesarios para calcular con el programa las siguientes divisiones.

a) $0.00117 \div 0.0026 =$

b) $0.04 \div 0.000016 =$

c) $0.0000000256 \div 0.16 =$

d) $0.00000006 \div 0.00002 =$

- Compara tus resultados y tus respuestas con las de dos compañeros. Aclaren sus dudas respecto a la división de números con signo. Auxíliense con su profesor si es necesario.

Multiplicación y división con números positivos y negativos



Lee la siguiente situación y contesta.

- De un terreno que mide 50 m^2 se venderá la tercera parte a un precio de \$2 200.50 el metro cuadrado.
 - ¿Cuánto costará esa tercera parte del terreno? _____
 - ¿Fue exacta tu respuesta? ¿Por qué? _____

 - Si tu respuesta no fue exacta, ¿qué puedes hacer para que lo sea? _____

Número decimal o número fraccionario



Resuelvan en equipos.

- Conviertan las parejas de números a número decimal y a fracción y elijan la representación más adecuada para resolverlas. Observen los ejemplos.

	A		B		C		D	
Fracción	$\frac{21}{42}$	$-\frac{2}{8}$	$-\frac{1}{9}$	$\frac{1}{7}$			$\frac{2}{13}$	
Número decimal	0.5	-0.25			-0.75	-0.2		0.4

- Con las parejas de números de la tabla anterior, realicen las operaciones que se indican en cada caso. Representéntenlas en forma de fracción y número decimal.

	A	B	C	D
Fracción	$\frac{21}{42} \div \left(-\frac{2}{8}\right) =$	$\square \times \square =$	$\square \times \square =$	$\square \div \square =$
Número decimal	$-\frac{168}{84} = -2$			

- Verifiquen sus respuestas y sus procedimientos. En grupo, elijan equipos para que expliquen la representación de números que les pareció la más adecuada para resolver las operaciones.

Diferentes representaciones

Los **números** pueden **representarse de diversas maneras**, es decir, **ser equivalentes**. Algunas representaciones son más útiles y convenientes que otras. Eso depende de las características de cada problema.

3. Analicen la siguiente situación y respondan.

Sin hacer cálculos previos, una persona quiere donar \$57 930, mediante transferencias bancarias, para mejoras en su comunidad. Después de varios estudios e investigaciones, decidió repartir la cantidad de la siguiente forma: $\frac{3}{16}$ del total a personas sin hogar, $\frac{1}{8}$ a un comedor comunitario, $\frac{2}{7}$ al refugio de animales, $\frac{1}{3}$ para reforestar áreas verdes y $\frac{23}{336}$ a la biblioteca comunitaria.

a) ¿Cuánto dinero donará a cada situación?

- i. Personas sin hogar: _____
- ii. Comedor comunitario: _____
- iii. Refugios de animales: _____
- iv. Reforestar área verde: _____
- v. Biblioteca comunitaria: _____

b) Suma las fracciones y las cantidades.

- i. ¿Cuánto suman las fracciones? _____
- ii. ¿Cuánto suman las cantidades? _____
- iii. ¿Qué representación conviene usar? Argumenta tu respuesta. _____

4. Consideren la cantidad que se donará y repartan a cada uno de los rubros anteriores. Escriban la fracción que representa cada cantidad con respecto al total.

- a) Personas sin hogar: Monto: _____ Fracción: _____
- b) Comedor comunitario: Monto: _____ Fracción: _____
- c) Refugios de animales: Monto: _____ Fracción: _____
- d) Reforestar área verde: Monto: _____ Fracción: _____
- e) Biblioteca comunitaria: Monto: _____ Fracción: _____
- f) Sumen los montos y las fracciones y escriban el resultado.
Monto: _____ Fracción: _____

- En equipos validen sus respuestas y corroboren el reparto que propusieron. Compartan sus estrategias de solución.

Aplicación de la jerarquía de operaciones

Reúnanse en equipos y hagan lo que se pide.

- Resuelvan la siguiente operación.

$$-6 \left(\frac{-5 + 8}{-9(5 - 7)} \right) + 1 =$$

- En su cuaderno escriban los pasos que realizaron para resolver la operación.
¿Qué resultado obtuvieron? _____

- Comparen con otros equipos los pasos que siguieron y su resultado. De manera grupal, analicen los resultados que obtuvieron y comparen sus procedimientos. Lleguen a acuerdos para saber cuáles son correctos.

- Revisen las operaciones y escriban en el recuadro el signo de operación que corresponda.

$$a) -4(2.5 \square 3.8) \square 5 \square 2 \square 3 = 12.7$$

$$b) \square (3.6 \square 0.6 \square (4.2 \square 2.5 \square 8) \square 2) \square 8 = -1$$

$$c) \frac{-9 \square 5}{-3} \square \frac{3 \square 5 \square 25}{2} = -3$$

- Usen su calculadora para verificar sus respuestas. Identifiquen si todas las calculadoras arrojan los mismos resultados. En caso contrario, investiguen las causas.

- Coloquen, en los recuadros, los números que faltan para que el resultado sea correcto.

$$a) \square \times \square \div 2 \times 0.5 = -7.5$$

$$b) -8 - \square \times 3 \div \square - 7 \times \square = -19$$

$$c) -2.5 \times \square \div 3 - \square \div 2 = -3.75$$

$$d) 31 \times \square - 8 \div \square = 215$$

$$e) 99.6 \div \square - 19 + \square = -49.7$$

$$f) 80 \div \square \times 19 + \square = -149.5$$

- Comparen sus respuestas con el resto del grupo y verifiquen si existen otras soluciones correctas. Comenten el procedimiento que usaron para resolver cada ejercicio.

Aprendo mejor

Elabora un programa de estudio, define qué temas estudiarás y las técnicas de estudio que usarás. Esto te ayudará a aprender mejor y mejorar tus desempeño académico.

Jerarquía de operaciones

La jerarquía de operaciones se refiere al **orden en que deben resolverse las operaciones**.

Primero: Eliminar paréntesis (), corchetes [] y llaves { }

Segundo: Potencias o raíces (se analizarán más adelante)

Tercero: Multiplicación y división

Cuarto: Adición y sustracción

Las operaciones de igual jerarquía **se resuelven de izquierda a derecha**.

La multiplicación de fracciones sigue el algoritmo del numerador por el numerador y el denominador por el denominador.

$$\frac{8}{7} \times \frac{6}{4} = \frac{8 \times 6}{7 \times 4} = \frac{48}{28}$$

Si es posible, simplificamos: $\frac{48}{28} = \frac{24}{14} = \frac{12}{7}$

Dividir dos fracciones es lo mismo que multiplicar una de las fracciones por el inverso de la otra fracción.

$$\frac{14}{25} \div \frac{5}{7} = \frac{14}{25} \times \frac{7}{5} = \frac{98}{125}$$

Y para la división, también se puede aplicar el procedimiento de "productos cruzados".

$$\frac{14}{25} \div \frac{5}{7} = \frac{14 \times 7}{25 \times 5} = \frac{98}{125}$$

¿Cómo vamos?

1. En parejas, resuelvan y simplifiquen las siguientes operaciones. Al final comprueben sus respuestas con el resto del grupo.

a) $\frac{-9 - 3(5 \div 5 - 1)}{4} \left(\frac{1}{3}\right) =$

b) $-7 \left\{ \frac{-8[2 - 5(3 \times 2 - 9)]}{16 \times 2 \div 4} \right\} =$

c) $2.8 \times \frac{5}{3} - \left(\frac{8}{5} \times 6 \div 2\right) + 3.4 \times 2 =$

d) $\frac{50}{2} - 68 + 34 \times \frac{6}{3} =$

e) $32 + \frac{45}{3} - (17 + 3 \times 4) + 2 \times 2 \times 2 - 8 =$

f) $125 - \left(13 + \frac{14}{2}\right) \times 2 =$

- Investiguen si todas las parejas obtuvieron las mismas respuestas. Si existen diferencias, expliquen a qué se deben. Compartan en grupo sus resultados.

Jerarquía de operaciones: números enteros, fracciones y números decimales negativos



1. Resuelve el ejercicio.

$$\frac{-\frac{1}{4} + \frac{3}{5}}{\frac{2}{5} - 1} \left(\frac{12}{7} \right) =$$

a) Escribe en tu cuaderno el orden de las operaciones que seguiste para encontrar el resultado. ¿Qué respuesta obtuviste? _____

- Verifica tu resultado con tu calculadora. Si no es correcto, revisa tu procedimiento y determina dónde está el error.

2. En equipos, analicen las operaciones y determinen si presentan errores en su desarrollo o no. Al final respondan.

A	B	C
$6[-5 \times 3 - (2 - \frac{1}{3})] =$	$\frac{\frac{2}{3} \times \frac{3}{5} \div (\frac{10}{7})}{-\frac{2}{4}} =$	$-2.8 - 3.6(-\frac{5}{4} \times \frac{2}{7}) \div (5.6 \times (-2.5)) =$
i. $6[-5 \times 3 - (\frac{6}{3} - \frac{1}{3})] =$	i. $\frac{\frac{2}{3} \times (-\frac{21}{50})}{-\frac{2}{4}} =$	i. $-2.8 - 3.6(-\frac{10}{28}) \div (-14) =$
ii. $6[-5 \times 3 - (\frac{5}{3})] =$	ii. $\frac{-\frac{42}{150}}{-\frac{2}{4}} =$	ii. $-2.8 - \frac{36}{10}(-\frac{10}{28}) \div (-14) =$
iii. $6[-5 \times 3 - \frac{5}{3}] =$	iii. $\frac{-\frac{42}{150}}{-\frac{2}{4}} = -\frac{168}{300} = -\frac{14}{5}$	iii. $-2.8 + \frac{360}{280} \div (-14) =$
iv. $6[-2 - \frac{5}{3}] =$		iv. $-2.8 + \frac{360}{280} \div (-\frac{14}{1}) =$
v. $6[-\frac{6}{3} - \frac{5}{3}] =$		v. $-2.8 - \frac{360}{3920} =$
vi. $6[-\frac{11}{3}] =$		vi. $-\frac{28}{10} - \frac{360}{3920} =$
vii. $\frac{6}{1}[-\frac{11}{3}] =$		vii. $-\frac{10976}{3920} - \frac{360}{3920} = -\frac{11336}{3920}$
viii. $-\frac{66}{3} = -22$		viii. $-\frac{11336}{3920} = -\frac{1417}{490}$

a) ¿Cuáles fueron los errores que se cometieron? _____

- Comparen sus respuestas y expliquen al grupo sus resultados.

Trabajen en parejas.

3. Un integrante escribirá una serie de operaciones y, sin que su compañero observe, las resolverá. Después intercambiarán sus operaciones para que el otro integrante las resuelva.

Mis operaciones:

Las operaciones del otro integrante:

Otras fuentes

Entra en
[www.esant.mx/
 ecsema2-006](http://www.esant.mx/ecsema2-006)
 donde podrás
 seguir trabajando
 operaciones
 combinadas con
 números enteros.

a) ¿Emplearon los mismos procedimientos? _____

 b) ¿Llegaron a los mismos resultados? _____

- Comparen sus resultados y sus procedimientos. Si sus resultados no son correctos, determinen dónde ocurrió el error. Validen sus respuestas.

Proporcionalidad directa e inversa



Completa las tablas y responde.

1. En la tabla se muestra el precio por kilogramo de tortillas.

Kilogramos	Precio
1	\$ 12
2	\$ 24
3	
4	
5	

- a) ¿Qué estrategia seguiste para completar la tabla? _____

- b) ¿Qué sucede con el precio al aumentar los kilogramos de tortillas que se compran?

2. En el mercado, una persona calcula cuántos kilogramos de fruta puede comprar de acuerdo con la cantidad de dinero que lleva.

Dinero	Fruta (kg)
\$15	$1\frac{1}{2}$
\$20	
\$35	
\$40	
\$50	

- a) ¿Qué estrategia empleaste para completar la tabla? _____

- b) ¿Cuánto debe pagar esa persona por un kilogramo de fruta? _____
- c) ¿Qué sucede con la cantidad de fruta al aumentar la cantidad de dinero? _____

- d) En general, ¿qué sucede con una cantidad cuando cambia la otra? _____

- Verifica tus resultados con los de otro compañero y comparen sus estrategias de solución. Lean el recuadro de formalización y corroboren si la información se relaciona con las actividades que realizaron.

Proporcionalidad



Proporcionalidad directa

La **proporcionalidad directa** se define como la relación entre cuatro cantidades. Cuando una de las magnitudes cambia, la otra se modifica en la misma proporción. Si una aumenta, la otra aumenta también proporcionalmente, y si una disminuye, la otra también lo hace guardando la proporción.

En parejas, completen las tablas y respondan.

1. En la tabla se indica cuántos días tarda en construirse una casa de acuerdo con el número de albañiles contratados, si todos trabajan al mismo ritmo.

Albañiles contratados	1	2	3	4	5
Días	180				

- a) ¿Qué procedimiento emplearon para completar la tabla? _____

- b) ¿Fue el mismo procedimiento que usaron para completar las tablas de las actividades 1 y 2 de la página anterior? _____ ¿Cuál es la diferencia? _____
- c) ¿Qué sucede con el número de días al aumentar el número de albañiles? _____

- d) ¿Todos tuvieron las mismas respuestas? _____
- e) ¿Con qué procedimiento comprobarían que sus respuestas son correctas? _____

- Comparen sus respuestas con las de otras parejas. Analicen si esta situación se presenta en la realidad al aumentar el número de albañiles.

2. Completen la tabla que indica el tiempo que tarda una llave en desaguar una alberca y el tiempo que tardará en vaciarse si se abren más llaves del mismo tipo.

Llaves abiertas	Tiempo que tarda en desaguar la alberca (horas)
1	24
2	
3	
4	
5	

- a) ¿Qué procedimiento siguieron para completar la tabla? _____

- b) ¿Qué sucede con el tiempo que tarda la alberca en vaciarse al abrir más llaves? _____

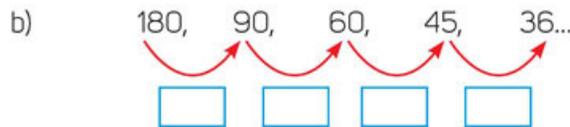
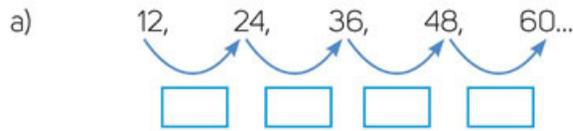
- Verifiquen sus respuestas con las de otras parejas y comenten sus procedimientos de resolución.

c) ¿Consideran que las actividades 1 y 2 de esta página son de proporcionalidad directa? En caso contrario, redacten en su cuaderno las características principales del tipo de proporcionalidad que observaron en ellas.

Características de la proporcionalidad inversa

Haz lo que se pide.

- Escribe en los recuadros lo que ocurre de un número a otro e identifica el patrón de cada sucesión.



- ¿Cuál es el patrón de la primera sucesión? _____
- ¿Cómo obtienes el siguiente término de la sucesión? _____
- ¿Cuál es el patrón de la segunda sucesión? _____
- ¿Cómo obtienes el siguiente término de la sucesión? _____

- Las sucesiones anteriores representan dos de las actividades de la sesión pasada. Retomando las tablas correspondientes, tenemos:

Kilogramos	Precio
1	\$12
2	\$24
3	\$36
4	\$48
5	\$60

Albañiles	Días que tardarán
1	180
2	90
3	60
4	45
5	36

- a) De acuerdo con la información de las tablas:
- ¿Cuánto costarán 10 kilogramos de tortillas? _____
 - ¿Cuánto se pagaría por 1 000 kilogramos de tortillas? _____
 - ¿Cuántos días tardarán 10 albañiles en terminar de construir la casa? _____
 - Supongamos que se pudieran contratar a 1 000 albañiles, ¿cuánto tiempo tardarían en terminar de construir la casa? _____

- Dialoguen grupalmente las respuestas y el tipo de características que tiene la variación en ambas tablas.

Variación inversa

La **variación de proporcionalidad inversa** es la relación proporcional donde al aumentar una cantidad, la otra disminuye en la misma proporción. Por ejemplo:

- Si el número de trabajadores en una obra aumenta, es de esperarse que el número de días que tardan en terminar el trabajo se reduzca.
- Si para llegar de una ciudad a otra viajando a velocidad constante de 40 km/h se emplean 80 minutos, al aumentar la velocidad al doble, el tiempo se reduce a la mitad (40 minutos).

En parejas, analicen la situación y respondan.

3. Una persona tiene suficiente comida para alimentar por 30 días a su cachorro. Una de sus amigas se va de viaje y le pide que se haga cargo también de su cachorro y, como acto altruista, rescata a otros cuatro más.
- ¿Para cuántos días le alcanzará la comida si solo cuida a su cachorro y el de su amiga y si les ofrece la misma cantidad de alimento? _____
 - ¿Para cuántos días le alcanzará la comida si da de comer a los seis cachorros la misma cantidad a cada uno? _____
 - Completen la tabla que representa esta situación.

Cachorros	Días que dura la comida

- ¿Cuántos días de diferencia hay entre el tiempo que dura la comida para un cachorro y el que dura para dos cachorros? _____
 - ¿Es la misma diferencia de días que dura el alimento para tres cachorros? _____
- Comparen sus problemas, procedimientos y resultados en grupo.

¿Cómo vamos?

- Inventen un problema de variación inversa. Intercambien su propuesta con otras parejas y resuélvanla. Si necesitan, tabulen en su cuaderno y comprueben sus resultados.

Aprendo mejor

Organiza tu tiempo de estudio. Haz un cronograma en el que establezcas los temas que estudiarás cada día y el tiempo que destinarás a cada uno. Ser sistemático te ayudará a mejorar tu desempeño y a desarrollar buenos hábitos de estudio.

Diferenciando entre variaciones

En equipos, analicen las situaciones y realicen el registro tabular.

- El tanque de gasolina de un automóvil tiene capacidad de 50 litros. Por cada litro de gasolina, el automóvil recorre 14.7 kilómetros. ¿Cuántos kilómetros recorrerá con los siguientes 6 litros de gasolina?

Gasolina (L)	Kilómetros recorridos

- ¿Qué relación hay entre los datos de la tabla? _____

- ¿Qué tipo de variación representa la situación? _____
- Con el tanque lleno, ¿puede recorrer 749.7 km? _____

- Se contrató a 5 panaderos para terminar un pedido en 10 días. ¿Cuántos panaderos deben contratarse si se quiere terminar el pedido en 1 día?

Panaderos	Días

- ¿Qué aspectos hacen diferentes las dos actividades anteriores? _____

- Compartan estas características con el resto del grupo y complementen con comentarios y argumentos de sus compañeros.

Otras fuentes

En el interactivo www.esant.mx/ecsema2-007 podrás observar cómo cambian los valores de la tabla al mover el punto de la gráfica y su relación con la proporcionalidad inversa.



En equipos, hagan lo que se pide.

- Analicen las situaciones y determinen si las variaciones son de proporcionalidad directa o inversa. Argumenten su elección. Escriban un problema que represente a cada una.

Situación 1

A	1	2	3	4	5	6	7	8
B	25	50	75	100	125	150	175	200

Es una situación de: _____ ¿Por qué? _____

Problema: _____

Situación 2

C	120	60	40	30	24	20	17.14	15
D	1	2	3	4	5	6	7	8

Es una situación de: _____ ¿Por qué? _____

Problema: _____

Situación 3

E	1	2	3	4	5	6	7	8
F	360	180	120	90	72	60	51.4	45

Es una situación de: _____ ¿Por qué? _____

Problema: _____

Situación 4

G	160	140	120	100	80	60	40	20
H	8	7	6	5	4	3	2	1

Es una situación de: _____ ¿Por qué? _____

Problema: _____

- Compartan con el grupo algunos de los problemas que redactaron y comprueben que corresponden a la situación planteada.

Significado de reparto proporcional



Analiza la situación y responde.

- Tú y 6 de tus amigos van a un restaurante donde pueden comer todo lo que quieran por el mismo precio. En ese lugar, los menores de 10 años pagan \$45 y los demás, \$90.

Una señora conocida llega con sus 3 hijos menores de 10 años y se sienta en la misma mesa que tus amigos y tú para que coman todos juntos. Al final, les propone que repartan equitativamente la cuenta entre tú, tus 6 amigos y ella.

- ¿Cuánto pagarías si cada quien pagara lo que consumió? _____
- ¿Cuánto pagará cada uno si aceptan la propuesta? _____
- ¿Te parece correcta la propuesta de la señora? _____
- ¿Qué sugieres para pagar la cuenta? _____
- ¿Es justa tu sugerencia? _____

- Comparte tus respuestas y tus opiniones con otro compañero.

Reparto proporcional



Resuelvan en equipos.

- Cinco personas compraron un boleto para una rifa y ganaron \$2 000. La primera persona cooperó con \$10, la segunda con \$50, la tercera con \$20, la cuarta con \$80 y la última con \$40. ¿Cuánto le toca del premio a cada una?

- Propongan dos maneras distintas de repartir el premio.

	Persona 1	Persona 2	Persona 3	Persona 4	Persona 5
Reparto 1					
Reparto 2					

- ¿Cuál reparto les parece más justo? Argumenten su respuesta. _____

- Comparen sus propuestas con las del resto del grupo, elijan la más equitativa y escríbanla.

	Persona 1	Persona 2	Persona 3	Persona 4	Persona 5
Reparto más equitativo					

Resuelvan en equipos.

2. Una biblioteca se construirá en un terreno de 100 m^2 y estará dividida como se muestra en la imagen.

- En la región gris estará el sanitario.
- La zona anaranjada será la recepción.
- En la zona azul estarán las librerías.
- La región verde se destinará a la lectura.

- a) Determina el área que corresponde a cada lugar.

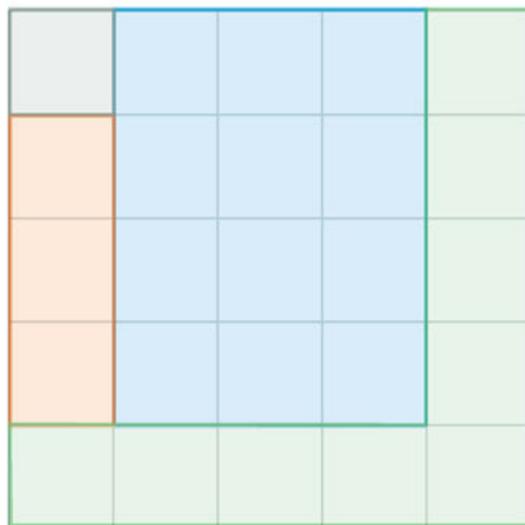
Sanitarios: _____

Recepción: _____

Librerías: _____

Zona de lectura: _____

- b) ¿Qué estrategia siguieron para calcular el área que corresponde a cada zona?



- Comparen los procedimientos empleados. Externen sus dudas o dificultades para que las aclaren entre todos.

3. Cuatro amigos compraron un boleto para un juego en el que ganaron \$100. Si el primer amigo cooperó con \$1, el segundo con \$3, el tercero con \$12 y el último con \$9:

- a) ¿Cómo repartirían el premio de una manera justa? _____

- b) ¿Cuánto le tocará a cada uno? _____

- c) ¿Qué similitudes observan entre esta actividad y la anterior? _____

- Comparen sus respuestas con las del resto del grupo, escriban una conclusión sobre el significado de "reparto proporcional" y redacten cómo pueden llevar a cabo este tipo de repartos.

Repartos

Reparto proporcional

Repartir implica **dividir el todo** entre tantos elementos como sea necesario. **Repartir proporcionalmente** significa **asignar una parte proporcional del todo en relación con una cantidad**, por ejemplo:

Si queremos repartir un pastel entre 5 familias, podemos hacerlo de distintas maneras sin importar que unas rebanadas sean más grandes que otras.

Pero si queremos repartir proporcionalmente el pastel en relación con la cantidad de integrantes de cada familia, necesitamos cortarlo en tantas rebanadas iguales como personas haya y asignar una rebanada por integrante.

En parejas realicen lo que se pide.

- Con base en la información, verifiquen si los repartos efectuados en la página anterior son proporcionales o no. Posteriormente hagan lo siguiente:

Repartan 272 botones en 5 casillas de acuerdo con las siguientes razones:

- La primera casilla tiene el doble de botones que la tercera.
- La segunda casilla tiene el triple de botones que la primera.
- La cuarta casilla tiene cinco veces más botones que la tercera.
- La quinta casilla tiene el triple de botones que la tercera.



a) ¿Qué estrategia siguieron para hacer el reparto? _____

b) ¿Consideran que este reparto es proporcional? _____

- Cada uno invente una situación de reparto proporcional. Pidan a su compañero que la resuelva y al final corroboren si ambos las realizaron correctamente.

3. Divide el segmento AB en 4 partes, como se indica:

- Una parte debe medir el doble que otra.
- Una parte debe medir el triple que otra.
- Una parte debe medir cuatro veces más que la medida de otra parte.



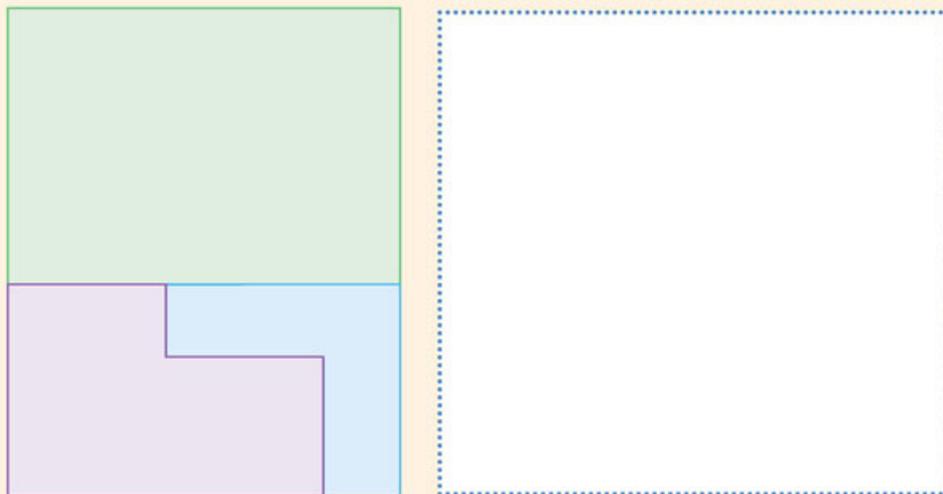
a) ¿Qué estrategia seguiste para dividir el segmento como se solicitó? _____

b) ¿Cómo comprobarías que las partes en que se dividió el segmento cumplen con las condiciones del problema? _____

- Elaboren un resumen de lo que han aprendido hasta el momento. Consideren las observaciones que sus compañeros o maestro han hecho sobre las actividades realizadas.

¿Cómo vamos?

1. Inventa un problema de reparto proporcional que se represente con el esquema de la izquierda.



- De manera grupal, pidan a su profesor que elija tres problemas, analicen si corresponden a situaciones de reparto proporcional y determinen cómo podrían efectuar los repartos.

Aplicando el significado de reparto proporcional

En equipos resuelvan y contesten.

- Dos hermanos quieren comprar una televisión que cuesta \$5 820, pero necesitan que el gasto se divida en proporción a lo que cada uno gana. El primer hermano gana tres veces más que el segundo. ¿Cuánto debe aportar cada uno para comprar la televisión?
 - Escriban por qué consideran que se repartió de esa manera el gasto. Argumenten si les parece justo ese reparto y las razones de considerarlo así.

Reparto	Primer hermano: \$2 910 Segundo hermano: \$2 910	Primer hermano: \$1 940 Segundo hermano: \$3 880	Primer hermano: \$4 365 Segundo hermano: \$1 455
Razones por las que consideras que se repartió de esta manera:			
¿Te parece justo el reparto? ¿Por qué?			

- Corrobores sus respuestas y sus argumentos con los de otros compañeros y lleguen a acuerdos sobre cuál situación les parece que es de reparto proporcional.
- Cambien el precio de la televisión, el número de hermanos y lo que gana cada uno. Propongan diferentes formas de reparto que representen la cooperación de cada uno en la compra de la televisión. Al finalizar, respondan en su cuaderno.

a) ¿Qué estrategias usaron para comprobar que su reparto es proporcional y es correcto? _____

b) ¿Qué dificultades tuvieron para repartir el nuevo precio de la televisión? _____

En equipos, analicen las situaciones y hagan los repartos proporcionales.



1. En un restaurante trabajan 5 cocineros y 3 meseros con diferentes horarios. Dos cocineros y dos meseros trabajan 8 horas al día; un cocinero y un mesero trabajan 6 horas al día, y los siguientes cocineros trabajan 3 y 4 horas al día, respectivamente.

Lo que se junta en propinas se lo reparten cocineros y meseros en proporción a la cantidad de horas que trabajan.

a) Si el total de propinas en un día fue de \$18 156, ¿cuánto le tocará a cada uno?

- Cocineros con 8 horas de trabajo: _____
- Cocinero con 6 horas de trabajo: _____
- Cocinero con 4 horas de trabajo: _____
- Cocinero con 3 horas de trabajo: _____
- Meseros con 8 horas de trabajo: _____
- Mesero con 6 horas de trabajo: _____

Otras fuentes

Entra en www.esant.mx/ecsema2-008 donde se explica y ejemplifica en que consiste hacer reparto proporcional.

2. Un arquitecto diseña un plano para el primer piso de una casa que mide 5 metros de ancho por 11 metros de largo. El tamaño de cada área: baño, escalera, sala, comedor y cocina está distribuido de acuerdo con las siguientes condiciones:

- El baño y el espacio para la escalera al segundo piso tienen las mismas medidas en m^2 .
- La sala mide cuatro veces la extensión del baño.
- El comedor mide la mitad de la sala.
- El tamaño de la cocina es el triple que el del baño.

a) ¿Cuánto medirá cada área? Dibuja la distribución que tendrá cada lugar.

Cocina: _____

Sala: _____

Comedor: _____

Baño: _____

Espacio escalera: _____



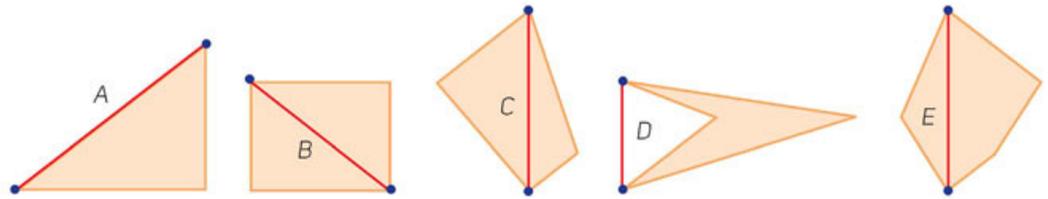
- Comparen sus respuestas y sus procedimientos. Socialicen la representación del plano de la casa para ver si las distribuciones cumplen con las condiciones dadas. Con ayuda de su profesor, elaboren un resumen final del tema.

Diagonales



Haz lo que se pide y contesta.

- Indica si los segmentos marcados representan diagonales de los polígonos.



- ¿El segmento marcado en el polígono A, es una diagonal? _____ ¿Por qué?

- ¿El segmento marcado en el polígono B, es una diagonal? _____ ¿Por qué?

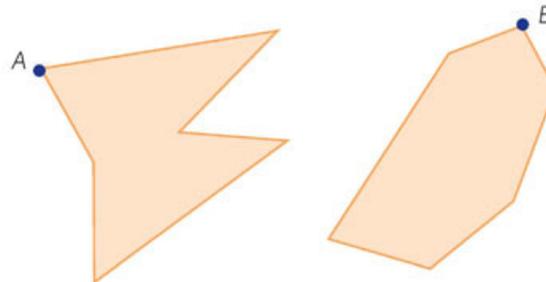
- ¿El segmento marcado en el polígono C, es una diagonal? _____ ¿Por qué?

- ¿Es una diagonal el segmento marcado en el polígono D? _____ ¿Por qué?

- ¿Es una diagonal el segmento marcado en el polígono E? _____ ¿Por qué?

- De manera grupal comenta tus respuestas y tus argumentos. Con la ayuda de tus compañeros, escribe en tu cuaderno las condiciones necesarias para que un segmento sea considerado diagonal de un polígono.

- De acuerdo con las condiciones dadas para que un segmento sea considerado una diagonal, traza todas las diagonales a partir del vértice indicado en cada polígono.

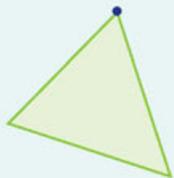
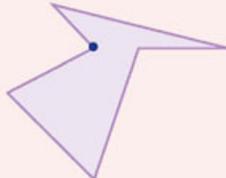
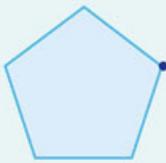
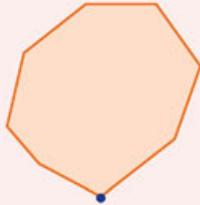


- ¿Cuántas diagonales trazaste a partir del vértice A? _____ ¿Y cuántas a partir del vértice B? _____

- Compara tus respuestas con las de otro compañero. ¿Qué características tomaron en cuenta para trazar las diagonales?

En parejas, hagan lo que se pide.

1. En cada polígono, tracen todas las diagonales a partir del vértice indicado y completen la tabla.

Figura	Número de lados de la figura	Número de diagonales a partir del vértice	Figura	Número de lados de la figura	Número de diagonales a partir del vértice
					
					
					

- a) ¿Qué relación hay entre el número de lados de una figura y el número de diagonales que se pueden trazar a partir de uno de sus vértices? _____

- b) ¿Por qué el número de lados no coincide con el número de diagonales? _____

- c) ¿Qué expresión algebraica permite calcular el total de diagonales que se pueden trazar en un polígono a partir de un vértice? _____

- Comprueben sus resultados con la expresión algebraica que escribieron y verifiquen si esta se cumple para polígonos con más lados.

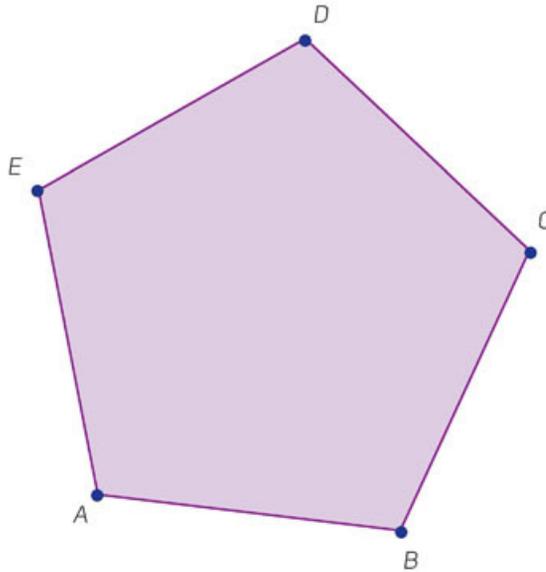
Diagonales en un polígono

Una **diagonal** es un segmento recto que une dos vértices no consecutivos en una figura. En algunos casos, la diagonal no se encuentra dentro del polígono.

Diagonales totales

Resuelve la actividad.

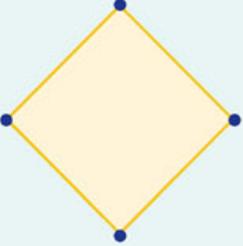
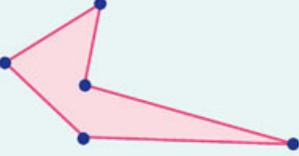
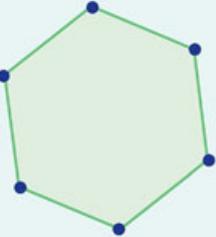
1. Traza todas las diagonales del polígono. Comienza a partir del vértice A y usa un color distinto para cada vértice.



2. Reúnete con dos compañeros y respondan.
 - a) ¿Cuántas diagonales trazaron en total? _____
 - b) ¿La diagonal que va del vértice A al vértice C es diferente a la diagonal que va del vértice C al vértice A ? _____
 - c) Considerando únicamente las diagonales que son segmentos diferentes, ¿cuántas diagonales se pueden trazar a partir del vértice A ? _____
 - d) De acuerdo con las diagonales ya trazadas desde el vértice A , ¿cuántas diagonales pueden trazarse a partir del vértice B ? _____
 - e) Tomando en cuenta las diagonales ya trazadas desde los vértices A y B , ¿cuántas diagonales pueden trazarse a partir del vértice C ? _____
 - f) Considerando las diagonales ya trazadas desde los vértices A , B y C , ¿cuántas diagonales distintas pueden trazarse a partir del vértice D ? _____
 - g) Tomando en cuenta las diagonales ya trazadas desde los vértices A , B , C y D , ¿cuántas diagonales distintas pueden trazar a partir del vértice E ? _____
 - h) ¿Cuántas diagonales en total tiene el polígono? _____
 - De manera grupal comparen sus respuestas y lleguen a acuerdos. Discutan las relaciones que identificaron al trazar las diagonales.

En parejas, hagan lo que se pide.

1. En cada polígono, tracen sus diagonales y completen la tabla.

Figura	Número de lados	Total de diagonales
		
		
		

Otras fuentes

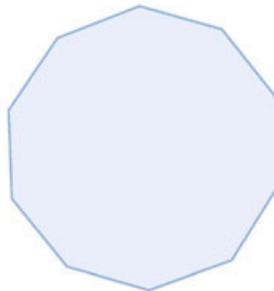
En el siguiente sitio podrás explorar el número de diagonales trazadas en un polígono:

www.esant.mx/ecsema2-009.

Interactúa con la actividad, contesta las preguntas y socializa tus respuestas y avances con el resto del grupo.

- Comparen sus respuestas y procedimientos con los de otro compañero. Verifiquen sus resultados.

2. Tracen todas las diagonales del siguiente polígono.



a) ¿Cuántas diagonales tiene en total el polígono? _____

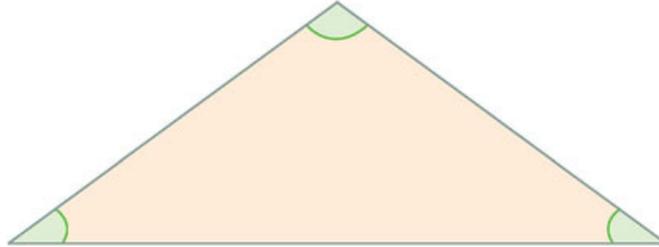
- Comparen su respuesta con el resto del grupo, nombren cada uno de los vértices y corroboren que tienen las mismas diagonales. Lleguen a conclusiones generales.

Suma de los ángulos interiores



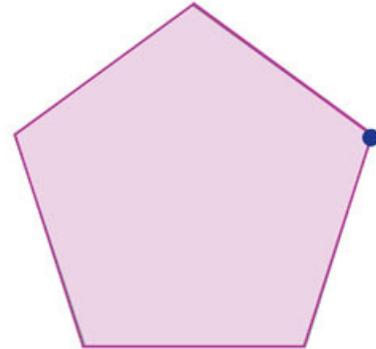
Haz lo que se pide y contesta.

1. Determina cuánto suman los ángulos señalados en el triángulo.



- Suma total de los ángulos = _____

2. Traza todas las diagonales de cada figura a partir del vértice señalado.



- a) ¿Cuántas diagonales trazaste en el cuadrado? _____
- b) ¿Cuántas diagonales trazaste en el pentágono? _____
- c) Al trazar las diagonales a partir del vértice seleccionado, ¿en qué figuras quedaron divididos los polígonos? _____
- d) Señala los ángulos interiores de cada una de las figuras que se formaron dentro de los polígonos.
 - i. ¿Cuánto suman los ángulos interiores del cuadrado? _____
 - ii. ¿Cuánto suman los ángulos interiores de todas las figuras que se formaron dentro del cuadrado al trazar la diagonal? _____
 - iii. ¿Cuánto suman los ángulos interiores del pentágono? _____
 - iv. ¿Cuánto suman los ángulos interiores de todas las figuras que se formaron dentro del pentágono al trazar las diagonales a partir del vértice? _____

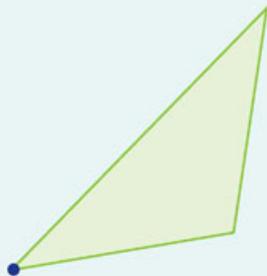
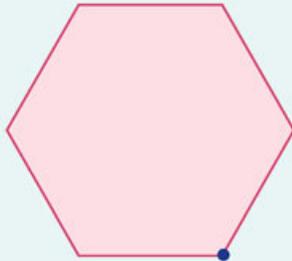
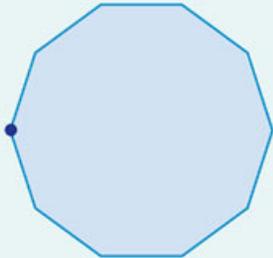
- Compara tus respuestas con las de otro compañero. Socialicen los procedimientos que siguieron para responder.

Suma de los ángulos interiores de polígonos

En equipos, completen la tabla.



- Tracen todas las diagonales posibles a partir del vértice señalado y comprueben, con su transportador, la suma de los ángulos interiores.

Figura	Cantidad de triángulos que se forman	Suma de los ángulos interiores de los triángulos	Suma de los ángulos interiores medidos con el transportador
			
			
			

- a) ¿Coincidieron las medidas que calculaste al sumar los ángulos de todos los triángulos formados y las medidas que obtuviste con el transportador? _____
 ¿A qué se debe que coincidan o que no coincidan? _____

- Comparen sus resultados con el resto del grupo.

Sesión 1. Resuelve problemas que permitan explorar la suma de los ángulos interiores de un polígono cualquiera a través del número de triángulos que se forman cuando se trazan las diagonales desde un vértice.

Expresión algebraica

Haz lo que se pide.

- Calcula la suma de los ángulos interiores de un polígono de 28 lados sin usar tu juego de geometría. ¿Qué estrategia seguirás para hacerlo?
 - Aplica tu estrategia a un polígono con menor número de lados.
 - Número de lados del nuevo polígono: _____
 - Suma de los ángulos interiores del nuevo polígono: _____
 - Para comprobar tu resultado, dibuja en tu cuaderno el polígono que propusiste.
 - ¿Tu estrategia te permitió calcular correctamente la suma de los ángulos interiores de tu nuevo polígono?
- Compartan grupalmente sus estrategias y úsenlas para calcular algunas sumas de los ángulos de distintos polígonos.

En parejas, hagan lo que se pide.

- Completen la tabla.

Suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo	Lados del polígono	Número de triángulos formados al trazar la diagonal a partir de un vértice	Suma de los ángulos interiores del polígono
	3		
	4		
	5		
	6		
	7		
	8		
	9		
	10		

- ¿Qué relación existe entre el número de lados del polígono y la cantidad de triángulos que se forman al trazar las diagonales a partir del vértice? _____
 - ¿Cómo pueden representar algebraicamente esa relación? _____
 - ¿Qué relación existe entre el número de triángulos que se forman y la suma de los ángulos interiores del polígono? _____
 - ¿Cómo representan esta relación de manera algebraica? _____
- Compartan sus respuestas en grupo y lleguen a un acuerdo para las representaciones algebraicas. ¿Qué tan diferentes son este método y su propuesta inicial de la actividad 1?

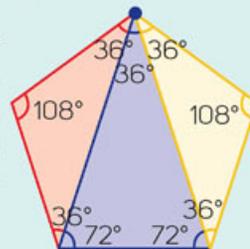
5. Para comprobar que es correcta la representación algebraica que permite calcular la suma de los ángulos interiores de cualquier polígono, sustítúyanla individualmente por alguna figura de la tabla. Después determinen la medida de los ángulos interiores de los siguientes polígonos.

	Polígono de 14 lados	Polígono de 20 lados	Polígono de 28 lados
Suma total de los ángulos interiores			

- Comparen sus respuestas con las de otro compañero y juntos lean la siguiente información.

Suma de los ángulos interiores de un polígono

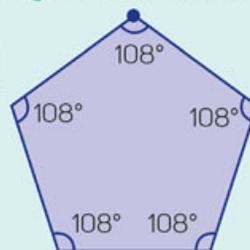
El número de triángulos en que se divide un polígono al trazar las diagonales desde uno de sus vértices es igual al número de lados del polígono menos dos. Por ejemplo, al trazar las diagonales en un pentágono se forman 3 triángulos. Algebraicamente se puede representar como $n - 2$, donde n es el número de lados del polígono.



Dado que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180° , al multiplicar por 180° los 3 triángulos que se forman, se obtiene **la suma de los ángulos interiores del pentágono**.

Usando la expresión algebraica anterior, tenemos que la suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados se puede calcular mediante la expresión $(n - 2) 180^\circ$.

Para el caso del pentágono se tiene que:
 $180^\circ(5 - 2) = 180^\circ(3) = 540^\circ$



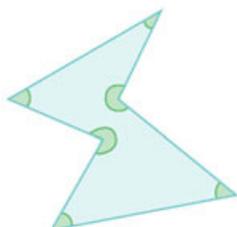
Otras fuentes

Entra en www.esant.mx/ecsema2-010 donde encontrarás un video referente a la suma de los ángulos interiores de triángulos.

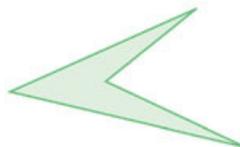
Trabaja las actividades con un compañero.

1. Comprueben que la expresión que permite calcular la suma de los ángulos interiores se cumple con los siguientes polígonos.

a)



b)



- Comparen sus respuestas con las de otro compañero y corroboren si la fórmula es válida para cualquier polígono regular o irregular. Tracen en su cuaderno otros polígonos regulares e irregulares y calculen la suma de sus ángulos interiores.

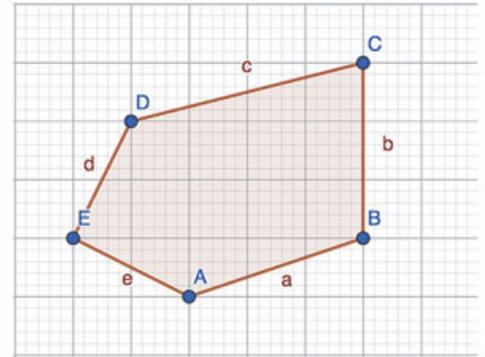
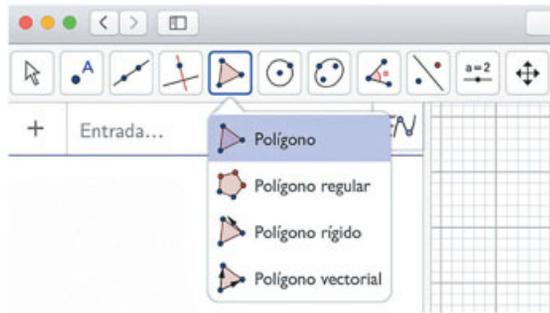
¿Qué aprendimos?

Sesión 2. Deduces la expresión general que determina la suma de los ángulos interiores de un polígono. Argumentas la validez de dicha expresión.

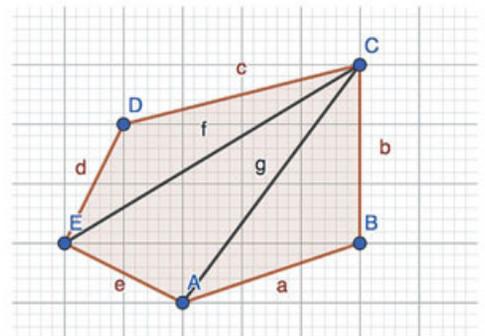
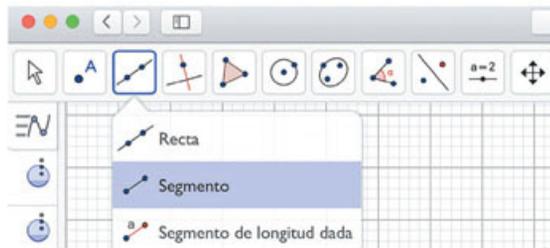
Suma de los ángulos interiores de un polígono

En esta sección aprenderás a calcular la suma de los ángulos interiores de un polígono con apoyo de GeoGebra.

1. Realiza de manera individual lo que se pide y contesta.
 - i. Visita la página www.geogebra.org/classic.
 - ii. Selecciona la herramienta Polígono, como se muestra en la imagen.
 - iii. Haz clic en la cuadrícula para localizar cinco puntos y formar un pentágono; después del quinto vértice, deberás hacer clic en el primero.

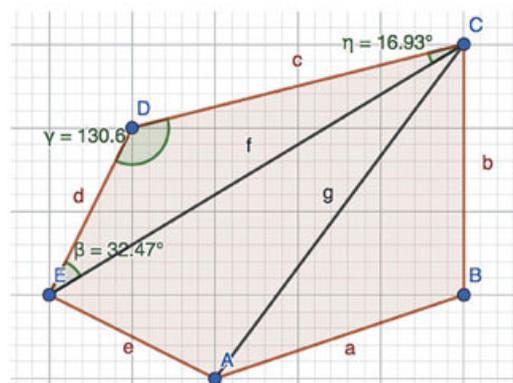


- iv. Traza las diagonales del polígono. Para ello, selecciona la herramienta Segmento y haz clic sobre algún vértice y luego sobre otro que no sea adyacente al primero; repite el procedimiento anterior hasta trazar todas las diagonales desde un vértice.



- a) ¿Cuántos triángulos se formaron dentro del pentágono al trazar sus diagonales desde un vértice? _____
- b) Traza en GeoGebra las diagonales desde un vértice de un hexágono, un heptágono y un octágono. ¿Cuántos triángulos se formaron en cada caso? _____

- v. Ahora mide los ángulos interiores de uno de los triángulos que se formaron al trazar las diagonales. Selecciona la herramienta Ángulo y haz clic sobre los tres vértices del triángulo (si obtienes el ángulo exterior, haz clic en los vértices en el orden inverso). Luego repite el procedimiento para los demás ángulos.



- vi. Obtén la medida de los ángulos interiores de todos los triángulos.

- a) De acuerdo con la cantidad de triángulos en que se divide el polígono, ¿cuál es la suma de sus ángulos interiores? _____
- b) Comprueba tu respuesta sumando las medidas de los ángulos interiores de los triángulos; considera que puedes realizar la suma con GeoGebra si en la sección de entrada escribes, por ejemplo, " $= 27.7 + 12.84 + \dots$ ".

2. Completa la tabla. Haz los trazos necesarios en GeoGebra.

Número de lados del polígono	Cantidad de triángulos en su interior	Suma de los ángulos interiores del polígono
4		
5		
6		
7		

- a) Explica la relación que hay entre el número de lados de un polígono y la cantidad de triángulos que se forman al trazar las diagonales desde un vértice. _____
- b) ¿Qué expresión usarías para representar la relación anterior? _____
- c) Escribe una fórmula para calcular la suma de los ángulos interiores de un polígono según el número de lados que tiene y úsala para comprobar los resultados de la tabla anterior y la siguiente tabla. _____

Número de lados del polígono	Cantidad de triángulos en su interior	Suma de los ángulos interiores
	8	
12		
	13	
20		

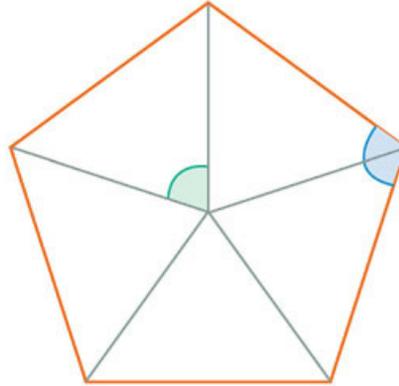
- Compara tus construcciones y tus resultados con los de tus compañeros.

Ángulo central y ángulo interior



Analiza la figura y haz lo que se pide.

1. Responde sin usar transportador.



- a) ¿Cómo se llama el ángulo de color azul? _____ ¿Cuánto mide? _____
- b) ¿En qué parte del pentágono se encuentra el ángulo de color verde? _____

- c) Por la posición que ocupa el ángulo de color verde, ¿qué nombre consideras que debe recibir? _____ ¿Cuánto mide? _____

- Comprueba con tu transportador que las medidas de los ángulos dados son correctas.

2. Determinen en parejas los pasos para trazar una copia del pentágono anterior a partir del punto y el segmento de recta que se muestra. Usen su juego de geometría y no calquen las figuras.



- a) Con el transportador comprueben que las medidas de los ángulos son las mismas en ambos pentágonos.
- b) ¿Qué tomaron en cuenta para comenzar a trazar el polígono? _____

- c) ¿Qué ángulo les fue más útil usar? _____

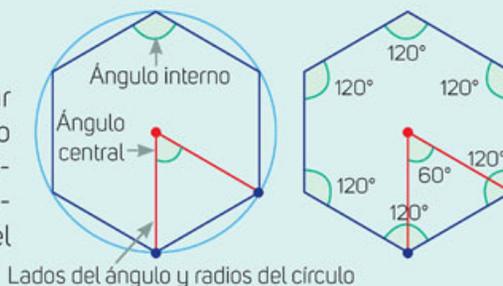
- Corroboen que todas las medidas de los ángulos y los lados son iguales en ambas figuras. Usando la longitud del segmento anterior, tracen en su cuaderno otro polígono con más lados que el anterior. Analicen qué ángulo es más útil para realizar los trazos.

Ángulo central



Ángulo central

El **ángulo central** de un polígono regular es aquel que tiene su vértice en el centro del polígono y sus lados tocan los vértices consecutivos de la figura. En un círculo, los lados del ángulo son los radios del círculo.



Haz lo que se pide.

- Con tu transportador, mide los ángulos centrales e interiores de los polígonos y completa la tabla.

Figura 1

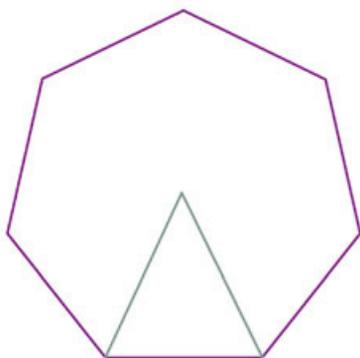


Figura 2

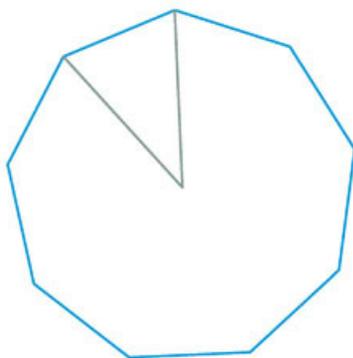


Figura 3



Figura	Ángulo central	Ángulo interior
1		
2		
3		

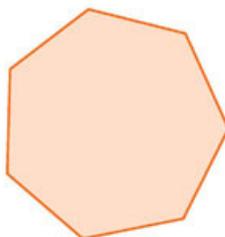
- ¿Qué relación existe entre las medidas de los ángulos central e interior de cada figura? _____
- ¿Se aplica a cualquier tipo de polígono? _____

- Comprueba con un compañero si las relaciones que identificaron se cumplen en otros polígonos. Redacten con su profesor una conclusión de la relación entre el ángulo central y el ángulo interior de un polígono regular.

Relación entre ángulo externo y ángulo central

Realiza lo siguiente y contesta.

1. Prolonga cada uno de los lados del siguiente polígono.



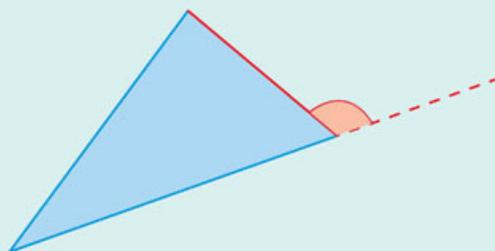
2. Lee la siguiente información y, con un compañero, marca todos los ángulos externos del heptágono anterior.

Glosario

lado adyacente. Cada uno de los lados de un polígono que comparten un vértice.

Ángulo externo

El **ángulo externo** de un polígono es el que se forma mediante la prolongación de uno de sus lados y el **lado adyacente**. En la imagen, la prolongación del lado del triángulo se representa con una línea punteada, y el lado adyacente, con un segmento del mismo color. Ambos segmentos forman el ángulo externo del triángulo.



- a) ¿Cuántos ángulos externos tiene el heptágono? _____
 - b) Tomen las medidas de al menos cinco ángulos externos y escríbanlas. ¿Cómo son las medidas? _____
 - c) Traza en tu cuaderno un heptágono regular con una medida distinta y calcula la medida del ángulo externo. ¿Es la misma que la del ángulo externo del heptágono de esta página? _____
- Compara con un compañero tus trazos y las medidas de los ángulos. Juntos lleguen a una conclusión sobre este aspecto.

Hagan en equipos lo que se pide.

3. Calculen la medida del ángulo central y la del ángulo externo seleccionado en las figuras A y B. Tracen un tercer polígono que tenga un número de lados mayor que los otros dos y completen la tabla.

Figura A

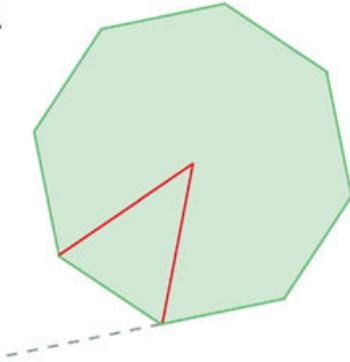


Figura B

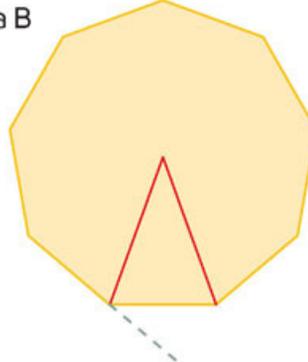


Figura C



Otras fuentes

En www.esant.mx/ecsema2-011 podrás manipular un triángulo para observar como cambias las medidas de sus ángulos.

Figura	Medida del ángulo central	Medida del ángulo externo
A		
B		
C		

- a) ¿Cómo es la medida del ángulo central con respecto al ángulo externo? _____
 b) ¿Se cumplirá esta característica en otros polígonos regulares? _____

¿Cómo vamos?

1. Traza en tu cuaderno otros dos polígonos regulares con diferente número de lados que los anteriores. Observa si se cumple esta relación entre ángulos.
- Escribe una breve conclusión al respecto.

Relaciones entre ángulos

Resuelvan en parejas.

1. En el siguiente recuadro, tracen un polígono cuyo ángulo central mida 30° .



2. Tracen un polígono cuyo ángulo exterior mida 36° .



- a) ¿Qué estrategias siguieron para trazar los polígonos con las condiciones dadas?

- b) ¿Cuánto mide el ángulo interior del primer polígono? _____

- c) ¿Cuánto mide el ángulo exterior del primer polígono? _____

- d) ¿Cuánto mide el ángulo central del segundo polígono? _____

- e) ¿Cuánto mide el ángulo interior del segundo polígono? _____

- Comparen sus procedimientos y resultados con los de otra pareja e intercambien estrategias de solución.

Trabajen en parejas.

1. Completen la siguiente tabla.

Número de lados del polígono	Ángulo interior	Ángulo central	Ángulo externo
23			
	165°		
31		11.7°	
			22.5°
25			
			18°
40			

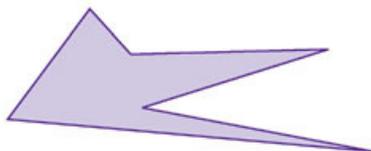
- ¿Trazaron alguno de los polígonos para calcular la medida de sus ángulos? ¿Por qué? _____
- ¿Qué estrategia siguieron para calcular el ángulo interior? _____
- ¿Qué estrategia aplicaron para calcular el ángulo central conociendo el ángulo interior? _____
- ¿Qué estrategia usaron para obtener el ángulo externo? _____
- ¿Qué estrategia siguieron para calcular el ángulo interior cuando se conoce el ángulo externo? _____
- ¿Cómo obtuvieron el número de lados cuando se tiene la medida de un ángulo? _____

Aprendo mejor

Platica con tus compañeros de clase sobre lo que acaban de aprender. Al intercambiar puntos de vista y expresar los conceptos con tus propias palabras, valorarás lo que has aprendido, lo que te falta por aprender y cómo aprenderlo.

- Comparen sus respuestas y sus estrategias de solución con las de otras parejas. Si encuentran diferencias, revisen a qué se deben.

2. Verifiquen si las propiedades estudiadas en esta secuencia se cumplen en el siguiente polígono.



- Del análisis anterior, escriban en su cuaderno una conclusión y compártanla con el grupo para complementarla.

Recolecta, registra y construye tablas de frecuencia



Lee la situación y contesta.

- En un grupo de segundo de secundaria se aplicó una prueba de habilidades. El tiempo que cada alumno tarda en contestar es un elemento de evaluación. A continuación se presentan los tiempos (en minutos) que emplearon los alumnos.

32	44	48	36	49	34	33	44	42	45
46	38	39	38	42	45	31	43	42	40
40	40	43	47	38	39	38	39	34	36
45	36	38	42	44	39	40	33	36	42
48	41	47	42	49	43	38	39	38	43
46	36	39	41	40	38	40	42	46	45

- Ordena los datos en una tabla. En la columna "Frecuencia" realiza pequeñas marcas "I" cada vez que identifiques cada valor y "IIII" cuando registres el quinto valor. En la columna "FA" anota el total de cada dato.

Minutos	Frecuencia	FA	Minutos	Frecuencia	FA
30			40		
31			41		
32			42		
33			43		
34			44		
35			45		
36			46		
37			47		
38			48		
39			49		
			Total		

- ¿Cuántos alumnos hay en el grupo? _____
- ¿Cómo quedaría una gráfica de barras con los datos anteriores? _____

- ¿Qué puede hacerse para tener una gráfica más pequeña? _____

- De manera grupal, propongan una forma más sencilla para representar los datos de la tabla anterior.

En equipos resuelvan lo que se solicita y respondan.

1. En la tabla se muestra el peso de algunos estudiantes en kilogramos.

40	40	43	45	47	50	50	50	50	53
53	53	55	55	55	55	55	55	57	57
57	58	58	59	60	60	60	60	61	61
61	61	61	61	61	63	63	63	63	65
65	65	65	67	67	67	67	67	71	71
71	71	71	71	71	71	71	71	73	73
73	73	73	73	73	74	74	74	74	74
75	75	75	76	76	78	80	80	80	80
80	80	80	80	81	81	82	83	83	83

- a) Completen la tabla.

Peso (kg)	Frecuencia	FA
40-50	###	5
50-60	### ### ### IIII	19
60-70		
70-80		
80-90		
Total		

- b) ¿Cuántos datos integran cada grupo? _____
- c) ¿Por qué el número con que termina un grupo es el mismo número con que empieza el siguiente? _____
- d) ¿Qué valores de la tabla se tomaron en cuenta para el primer grupo? _____
 ¿Sucedió algo parecido en el siguiente grupo? _____
- e) ¿La manera en que se organizaron los datos en la tabla coincide con la propuesta que hicieron al final de la página anterior? _____
- f) ¿Qué es más útil: presentar los datos en agrupaciones o uno por uno? _____
 ¿Por qué? _____

Intervalo

Cuando una serie de datos es numerosa y algunos de ellos se repiten, conviene **agrupar en intervalos** valores de datos que contienen a todos los datos. Los intervalos deben tener el mismo tamaño o ancho, es decir, deben agrupar la misma cantidad de datos.

- Socialicen con el resto del grupo sus resultados y, con ayuda del profesor, analicen ventajas y desventajas de estudiar situaciones con datos agrupados.

Construye histogramas

Lean la situación en parejas y realicen lo que se indica.

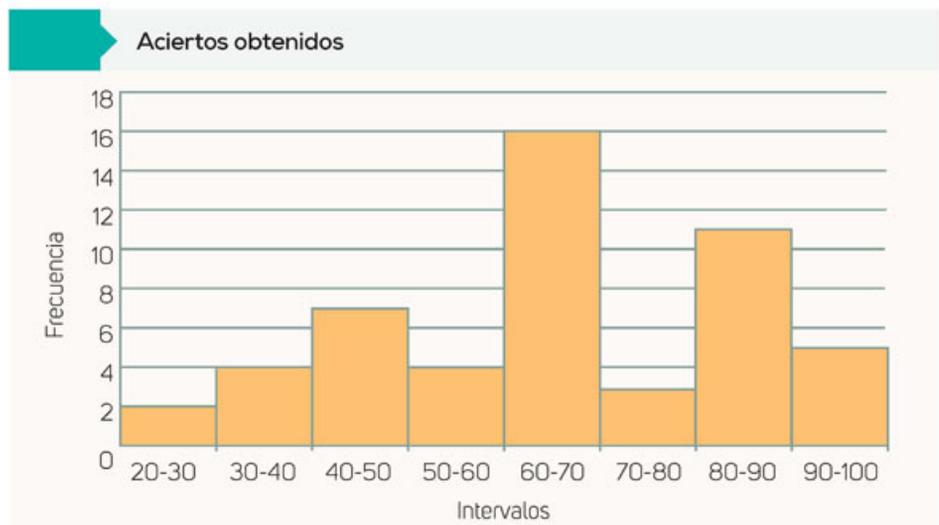
- La siguiente tabla muestra el número de aciertos obtenidos por cada uno de los 54 alumnos de un grupo de segundo de secundaria en una prueba de 100 reactivos.

21	29	30	31	32	33	40	41	43
44	47	48	49	50	56	58	59	61
61	62	62	62	63	63	67	68	68
68	68	69	69	69	69	70	77	78
81	81	82	83	84	84	84	86	88
88	89	90	90	95	96	97	98	100

- Realicen una tabla de frecuencias con intervalos de 10 datos.

Intervalos	Frecuencia	FA
TOTAL		

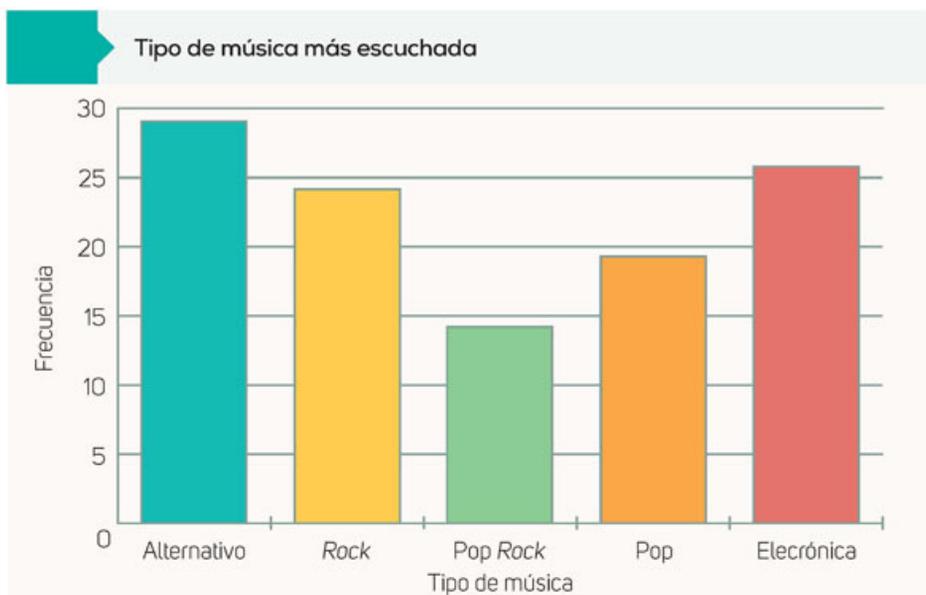
- Observen la gráfica de la tabla de frecuencia.



- i. ¿Cómo se construyó? _____

- ii. ¿Cómo se le llama a este tipo de gráficas? _____

c) Analicen la gráfica.



- i. ¿Cuál es la diferencia entre la gráfica de la página anterior y la de barras?

- ii. ¿Por qué en la primera gráfica las barras están pegadas unas a otras y en la segunda están separadas? _____

- iii. ¿Qué características tiene el histograma de frecuencias? _____

Histograma

Un **histograma** es una representación gráfica que muestra la frecuencia de los datos en forma de barras rectangulares. La base de las barras es la amplitud de cada intervalo y la altura es la frecuencia. No hay espacio entre una barra y otra, ya que representan la continuidad de los datos.

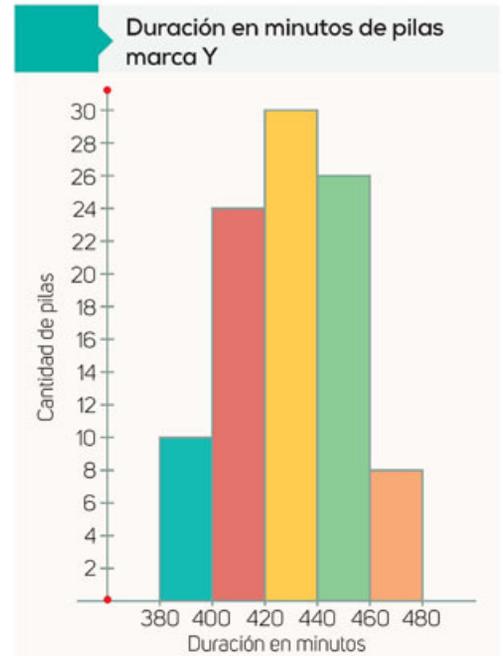
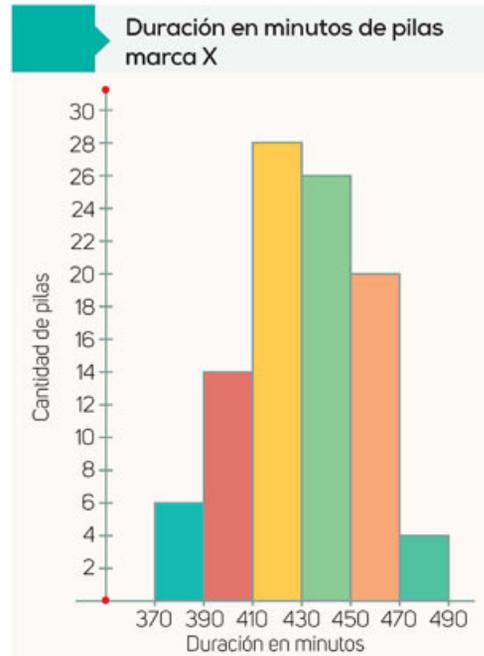
La amplitud de cada intervalo es la diferencia entre el dato menor y el dato mayor.

- Comparen sus resultados con los de otras parejas y, con ayuda de su profesor, escriban en su cuaderno las características principales de un histograma.

Interpreta datos de tablas de frecuencia o histogramas vinculados con diversos contextos

Resuelvan en parejas.

- El laboratorio de una oficina de apoyo al consumidor analizó dos marcas de pilas alcalinas y midieron su durabilidad. En las gráficas se muestran los resultados. Analícenlas y contesten.



- ¿Cuántas pilas de la marca X duraron entre 470 y 490 minutos? _____
 - ¿Cuántas pilas de la marca X duraron entre 410 y 450 minutos? _____
 - ¿En qué intervalo hay más pilas de la marca X? _____
 - ¿Cuántas pilas hay en ese intervalo? _____
 - ¿En qué rango de duración hay más pilas de la marca Y? _____
 _____ ¿Cuántas pilas hay en ese rango? _____
 - ¿Cuántas pilas duraron entre 400 y 460 minutos? _____
 - Si las dos marcas tienen el mismo precio, ¿qué marca te conviene comprar? _____
 _____ ¿Por qué? _____
- Discutan sus respuestas con el resto del grupo.
- En equipos obtengan las medidas de la altura de sus compañeros en centímetros; realicen la tabla de frecuencias de datos agrupando la información en intervalos y elaboren el histograma.
- Comparen su tabla con las de otros compañeros y los intervalos de datos que usaron.



Analiza las situaciones y responde.

1. El dueño de un almacén quiere saber el tiempo que llevan laborando sus empleados, por lo que pidió al encargado de recursos humanos que recabara la información por años de servicio. En la tabla se muestran la cantidad de empleados y los años que llevan trabajando.

Años de servicio	8-10	11-13	14-16	17-19	20-22	23-25	26-28
Número de trabajadores	3	7	12	20	9	7	3

- a) Elabora en tu cuaderno un histograma que represente los datos de la tabla.
 - b) ¿Cuántos datos se agruparon por intervalo? _____
 - c) ¿Cómo lo determinaste? _____
 - d) ¿Todos los intervalos tienen el mismo ancho? _____ ¿Por qué? _____
 - e) Si se considera la jubilación a partir de los 30 años de servicio, de acuerdo con su gráfica o tabla de datos, ¿dentro de cuántos años habrá una cantidad mayor de jubilaciones? _____
 - f) ¿Cuántas personas se jubilarán en los próximos 5 años? _____
 - g) Explica cómo obtuviste el resultado. _____
- Compara el histograma que elaboraste y tus respuestas con el resto del grupo.
2. Construye en tu cuaderno el histograma que corresponde a la siguiente tabla de frecuencias y escribe una situación que la represente.

Intervalo	Frecuencia
1-5	5
5-9	8
9-13	4
13-17	10
17-21	6
21-25	5
25-29	2

- Comparte con tus demás compañeros la situación que escribiste y comparen su gráfica. Con ayuda de su profesor señalen, de manera breve, ¿qué procedimiento se debe seguir para elaborar un histograma?

Construcción de polígonos de frecuencia

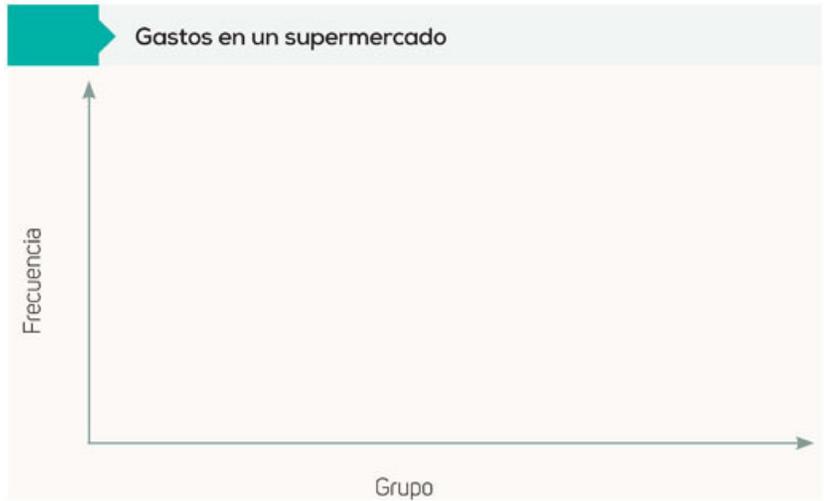


Haz lo que se pide y contesta.

- En la tabla se muestra la cantidad de dinero (en pesos) que gastaron algunas personas al realizar sus compras en un supermercado. Completa la tabla de frecuencia y realiza el histograma que representa a los datos.

100	300	150	200	1000	250	250	180	230	120
900	700	750	450	800	230	900	600	260	980
400	480	420	50	320	560	400	430	410	450
590	510	330	226	400	500	380	610	510	830
110	130	690	700	810	215	900	350	950	630
90	930	120	65	200	710	85	1020	80	980
1040	720	800	1030	75	860	220	305	115	840
420	530	920	70	410	135	790	910	520	1000
145	680	200	890	230	670	105	280	1010	650
480	150	560	730	490	125	580	940	760	960

Grupo	Frecuencia	Frecuencia absoluta
45-170		
170-295		
295-420		
420-545		
545-670		
670-795		
795-920		
920-1045		



- ¿Qué información representaste en el eje de las x? _____
 ¿Y en el eje de las y? _____
- ¿Cuántas personas representan la muestra? _____
- ¿De cuánto es el gasto más frecuente? _____
 ¿Y el menos frecuente? _____

- Compara tus respuestas con las del resto del grupo, observen la altura de sus columnas y, si existen diferencias, averigüen las razones y lleguen a conclusiones generales.

Polígono de frecuencia

Resuelvan en parejas.



1. Analicen la información de la tabla y completen la columna marca de clase (MC).

a) ¿Qué operación se realizó para obtener 107.5? _____

b) ¿Qué operación se realizó para obtener 232.5? _____

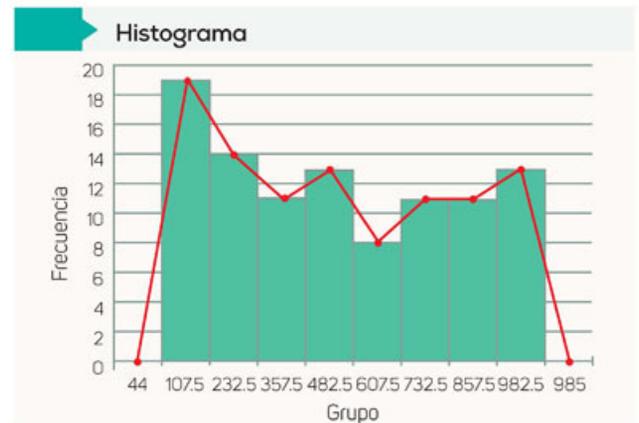
c) ¿Qué representa la columna MC? _____

Grupo	Frecuencia Absoluta	MC
45-170	19	107.5
170-295	14	232.5
295-420	11	
420-545	13	
545-670	8	
670-795	11	
795-920	11	
920-1045	13	

2. En el histograma que representa los datos de la tabla anterior se han marcado algunos puntos.

a) ¿Los puntos que se encuentran unidos por segmentos concuerdan con los que calcularon en la columna MC? _____

b) ¿Qué diferencias hay entre el histograma y la gráfica que se forma al unir los puntos? _____



c) Observen la gráfica de color rojo formada por segmentos.

i. ¿Cuáles son las coordenadas del primer punto de la gráfica? _____

ii. ¿Cuáles son las coordenadas del último punto de la gráfica? _____

Marca de clase y polígono de frecuencia

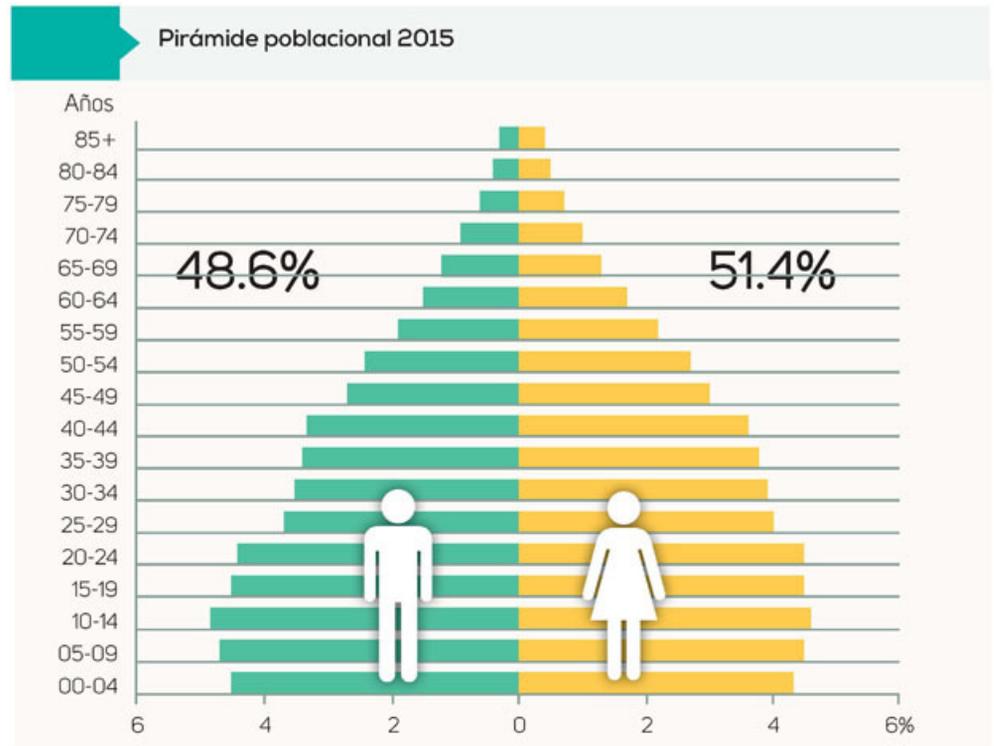
La **marca de clase (MC)** es el punto medio o promedio de cada intervalo. Por ejemplo, el primer intervalo es 45-170; por tanto, su marca de clase es igual a $\frac{45 + 170}{2} = 107.5$.

Para **construir un polígono de frecuencia** sobre un histograma se toma la marca de clase que coincide con el punto medio o promedio de cada rectángulo de un histograma y se unen con segmentos. El primer y último punto del polígono siempre es cero, con respecto al eje y , ya que un polígono es una figura cerrada.

Interpretando datos en distintos contextos

En parejas, analicen la gráfica y contesten.

1. Analizar la información que se nos presenta es importante para tomar decisiones y en ocasiones repercute en millones de personas. En una página de información estadística se ofrece una gráfica sobre la pirámide poblacional y al final algunas preguntas.

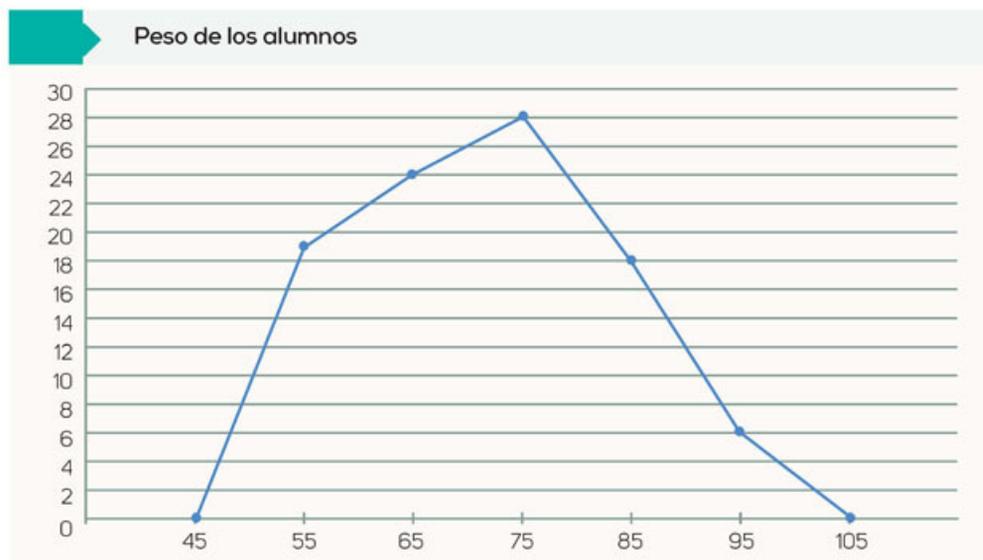


Fuente: cuentame.inegi.org.mx/poblacion/habitantes.aspx?tema=P
(consulta: 16 de mayo de 2017, 12:00 horas)

- ¿Por qué piensas que el número de adultos esté creciendo?
 - ¿A qué se deberá que la población infantil esté disminuyendo?
 - ¿Consideras que en un futuro nos afectará que haya más adultos que niños?
- a) ¿La gráfica anterior es un histograma de frecuencias? _____
 - b) ¿Cuántos intervalos hay? _____ ¿Cuántos datos tiene cada intervalo? _____
 - c) ¿Qué información se presenta en el eje horizontal? _____
 - d) ¿Qué información se presenta en el eje vertical? _____
 - e) ¿Qué diferencias hay con los histogramas de frecuencia que has realizado? _____

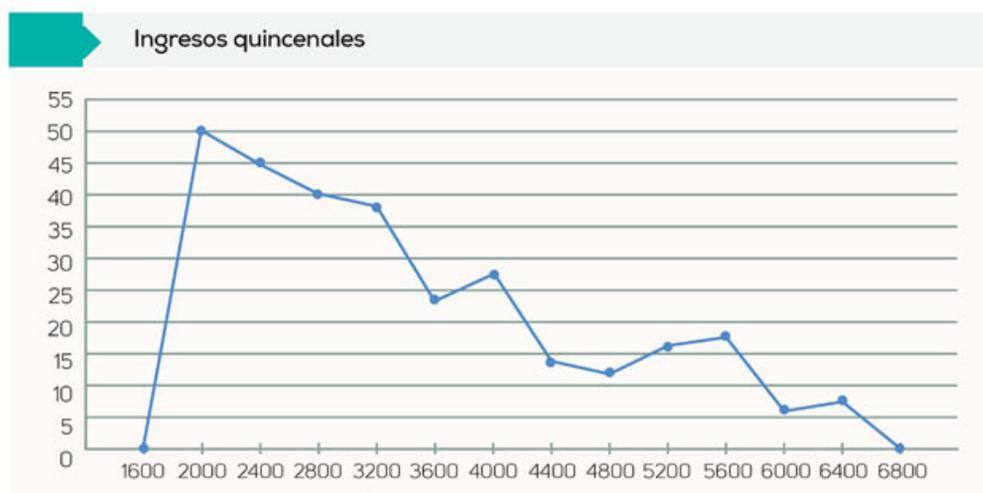
- De manera grupal compartan sus respuestas y argumenten. Dialoguen y respondan las preguntas presentadas en la gráfica. Lleguen a conclusiones generales.

2. Analicen el siguiente polígono de frecuencia.



- ¿Qué datos consideras que se registraron en el eje x? _____
- ¿Y en el eje y? _____
- ¿Cuántas personas reportaron su peso? _____
- ¿Cuál es el peso más frecuente? _____

3. En una comunidad se encuestó a un grupo de personas sobre la cantidad de ingresos que perciben quincenalmente. Con la información recabada se obtuvo el siguiente polígono.



- ¿A cuántas personas se les hizo la encuesta? _____
- ¿Qué información se representa en el eje de las x? _____
- ¿Qué información se representa en el eje de las y? _____

- Analicen el polígono y grupalmente comenten la información que presenta.

Otras fuentes

En el siguiente sitio podrás ingresar algunos datos de tus tablas o proponer otros distintos para observar el polígono de frecuencia que se forma:

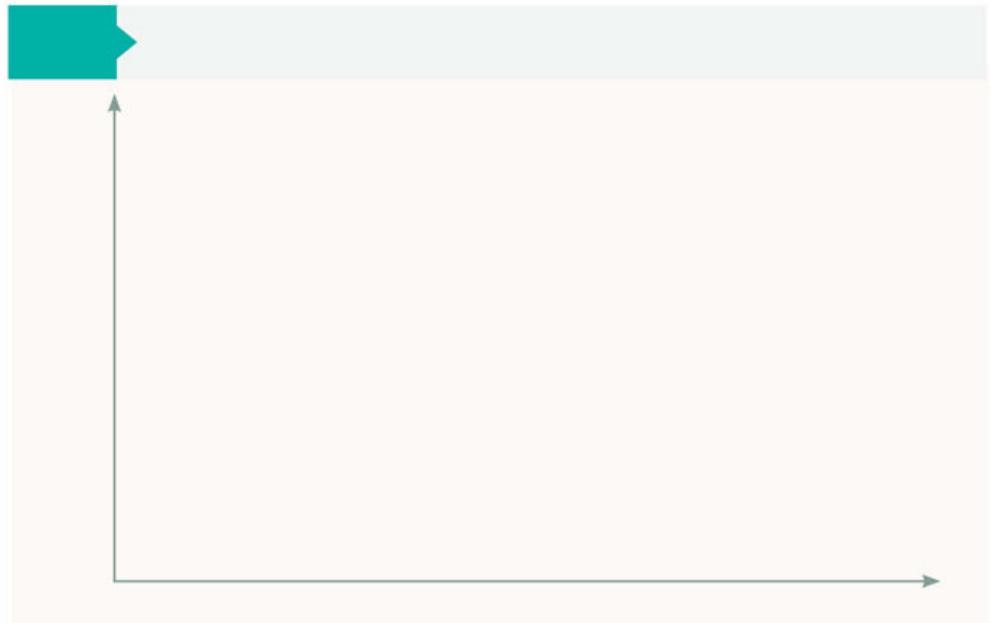
www.esant.mx/ecsema2-012

Diferencia entre gráfica de línea y polígono de frecuencia

Haz lo que se pide.

- En la tabla se muestra la distancia recorrida y el tiempo transcurrido de un automóvil. Traza la gráfica que representa su recorrido.

Tiempo transcurrido (min)	Distancia recorrida (km)
1	3.6
2	4
3	4.3
4	7.9
5	8.2
6	8.2



- ¿Qué representan los datos del eje x? _____
- ¿Qué representan los datos del eje y? _____
- ¿A qué velocidad iba el automóvil en el minuto 1? _____
- ¿A qué velocidad iba el automóvil en el minuto 2? _____
- ¿Qué sucede del minuto 5 al 6? _____
- ¿Qué podrías decir del recorrido que hizo el automóvil? ¿Cómo imaginas que es el trayecto que recorrió? _____

- Comparte tus observaciones y tus deducciones de la gráfica anterior. Escuchen las que sean diferentes y comprueben con los datos si son coherentes.

En equipos, realicen lo que se indica.

2. Tomando como base la gráfica anterior, respondan.

- a) ¿Qué diferencia hay entre la tabla que usaron para construir la gráfica y la que necesitas para construir un polígono de frecuencia? _____

- b) ¿Qué diferencia hay entre el procedimiento que se lleva a cabo para realizar una tabla para un polígono de frecuencias y la tabla que muestra la información del desplazamiento del automóvil? _____

- c) ¿Qué información muestra cualquier punto de la gráfica del automóvil en comparación con algún punto de un polígono de frecuencia? _____

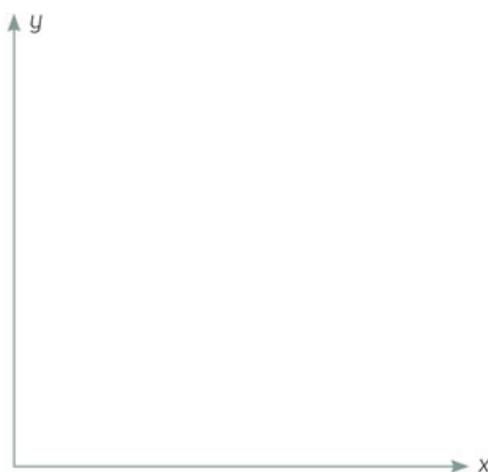
- Con ayuda de su profesor lleguen a conclusiones generales y redacten una síntesis de ellas en su cuaderno.

En equipos hagan lo que se solicita.



1. Generen el polígono de frecuencias de los siguientes datos:

- 16, 19, 23, 14, 14, 17, 16, 20, 19, 16, 17, 21, 17, 16, 19, 17, 15, 14, 16, 21



- a) ¿Qué información representaron en el eje de las x ? _____
- b) ¿Qué información representaron en el eje de las y ? _____

- Compartan con el grupo sus procedimientos, resultados, tablas y gráficas. Con ayuda de su profesor lleguen a conclusiones generales.

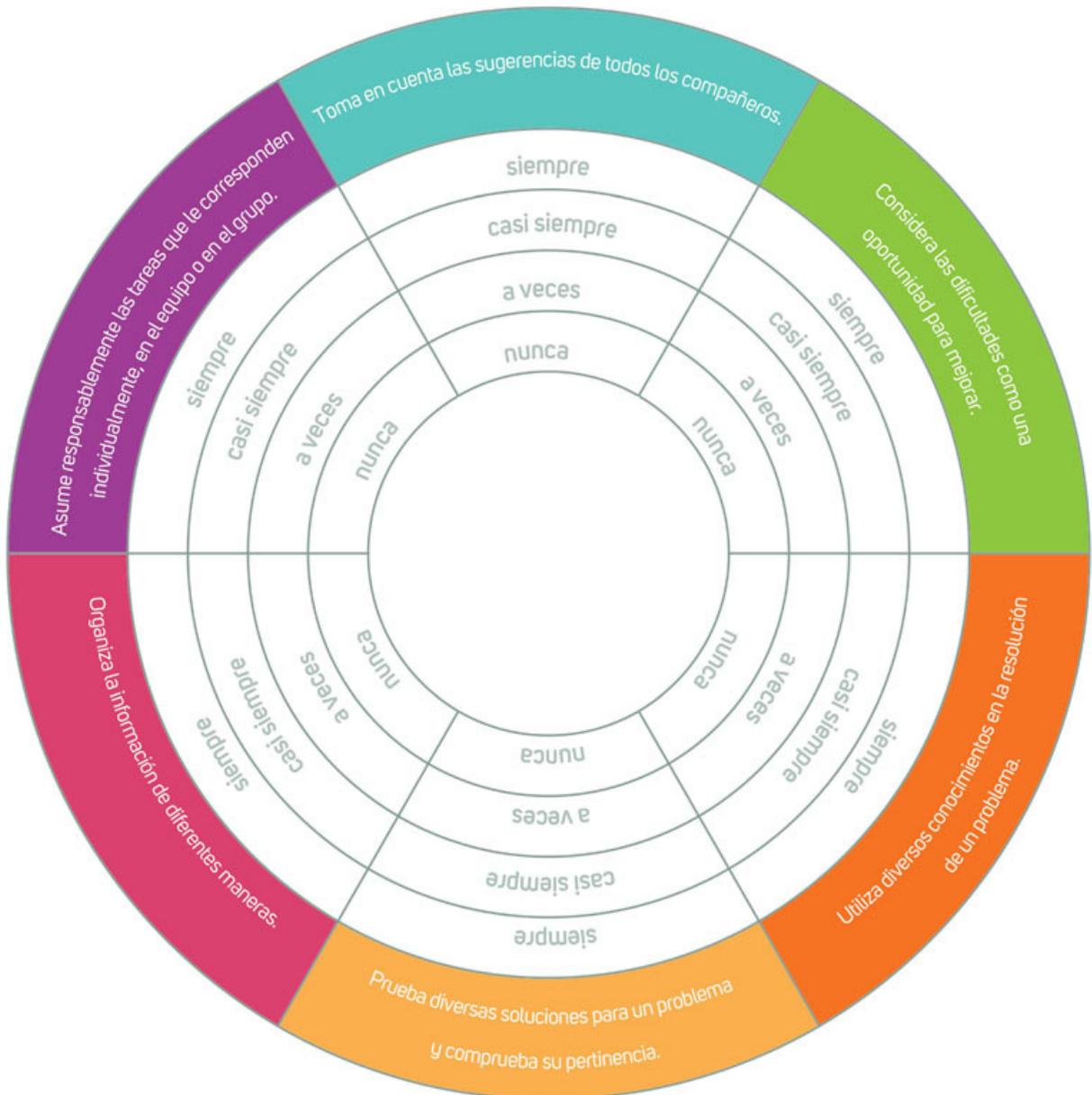
1. Marca la casilla que describe mejor tu desempeño.

Aprendizajes Esperados	Nivel de logro		
	En proceso	Satisfactorio	Excelente
Resuelvo problemas que requieren multiplicar y dividir números fraccionarios y decimales.	Solamente puedo resolver problemas que implican multiplicar números fraccionarios y decimales. <input type="checkbox"/>	Resuelvo problemas que implican multiplicar y dividir números fraccionarios y decimales. <input type="checkbox"/>	Resuelvo problemas que implican multiplicar y dividir números fraccionarios y decimales así como los que requieren la aplicación de factores inversos de proporcionalidad. <input type="checkbox"/>
Resuelvo problemas que requieren multiplicar y dividir números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos.	Solamente puedo resolver algunos problemas que implican aplicar la regla de los signos para la multiplicación y la división. <input type="checkbox"/>	Resuelvo problemas donde debo multiplicar y dividir números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos. <input type="checkbox"/>	Resuelvo problemas que implican multiplicar y dividir números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos y aplico correctamente la jerarquía de las operaciones. <input type="checkbox"/>
Resuelvo problemas de proporcionalidad directa e inversa, así como de reparto proporcional.	Resuelvo problemas de proporcionalidad directa cuando la constante es cualquier número. <input type="checkbox"/>	Resuelvo problemas de proporcionalidad directa e inversa cuando la constante es cualquier número. <input type="checkbox"/>	Resuelvo problemas de proporcionalidad directa e inversa cuando la constante es cualquier número, además de los de reparto proporcional. <input type="checkbox"/>
Deduzco y uso las relaciones entre los ángulos de polígonos en la construcción de polígonos regulares.	Resuelvo problemas que requieren el cálculo de las diagonales de un polígono cualquiera e identifico los ángulos (central, interior y exterior) de un polígono. <input type="checkbox"/>	Resuelvo problemas que implican calcular la suma de los ángulos interiores de un polígono, así como problemas geométricos que permiten identificar la relación entre el ángulo central y exterior de un polígono. <input type="checkbox"/>	Deduzco la expresión general que determina la suma de los ángulos interiores de un polígono y argumento la validez de esa expresión. Además, resuelvo problemas que impliquen usar o aplicar las relaciones de los ángulos central, interior y exterior de cualquier polígono. <input type="checkbox"/>
Recolecto, registro y leo datos en histogramas y polígonos de frecuencia y gráficas de línea.	Interpreto datos de algunos histogramas, polígonos de frecuencia, gráficas de líneas y tablas de frecuencia. <input type="checkbox"/>	Identifico completamente la información contenida en histogramas, polígonos de frecuencia, gráficas de líneas y tablas de frecuencia. <input type="checkbox"/>	Construyo, identifico y relaciono la información contenida en histogramas, polígonos de frecuencia, gráficas de líneas y tablas de frecuencia. <input type="checkbox"/>

- Reflexiona sobre tus resultados y, con tu profesor, busca estrategias para fortalecer tus áreas de oportunidad.

¡Vamos a reflexionar sobre las actitudes y los valores que desarrollaste en este trimestre!

2. Pide a un compañero que colorea la franja que representa mejor el nivel donde te ubicas.



3. Lee y responde de manera individual.

- ¿Qué es lo que más te gustó de este trimestre? _____
- ¿Qué es lo que menos te gustó de este trimestre? _____
- ¿Qué puedes mejorar en el próximo trimestre? _____

Trimestre dos



Raíz cuadrada, potencias, expresiones equivalentes...

En este trimestre resolverás problemas en los que será necesario determinar la raíz cuadrada de un número. Para obtenerla explorarás distintos procedimientos como *ensayo y error* y *aproximaciones sucesivas*.

Construirás el concepto de *potencia*, obtendrás productos y cocientes de potencias de la misma base y, con ayuda del álgebra, construirás una regla para generalizar este procedimiento. También comprenderás el concepto de *potencia negativa*.

Formularás expresiones para representar el perímetro y el área de figuras geométricas y verificarás la equivalencia de estas.

Construirás polígonos regulares, identificarás las propiedades que tienen los polígonos que cubren el plano y diseñarás teselados.

Deducirás una fórmula para calcular el perímetro y el área de polígonos regulares y el área del círculo. Por último, analizarás la desviación media de conjuntos de datos y la usarás en la teoría de errores.

¡Te deseamos mucho éxito en este trimestre!



Raíz cuadrada



Analiza la situación y contesta.

- Para desarrollar un proyecto de cuidado de áreas verdes, en una escuela se cercó un jardín que ocupa una superficie cuadrangular de 529 m^2 .
 - ¿Cómo son entre sí los lados del terreno? _____
 - ¿Cuánto mide cada lado del jardín? Explica la estrategia que seguiste para encontrar la medida. _____
 - ¿Cuántos metros de malla se requieren para cercar el terreno? _____
- Compara tu procedimiento y tus resultados con los de otro compañero. Compartan argumentos y propongan, en parejas, otras formas de resolver la situación.

Ensayo y error



Trabajen en parejas.

- Escriban en su cuaderno el cuadrado de los primeros cincuenta números naturales.
- De acuerdo con el punto anterior, anoten entre qué números naturales, enteros positivos o decimales se encuentran los números que multiplicados por sí mismos dan como resultado el número decimal dado.
 - 650.25 Entre ____ y ____
 - 151.29 Entre ____ y ____
 - 1857.61 Entre ____ y ____
 - 998.56 Entre ____ y ____
- Determinen el número exacto que se multiplicó por sí mismo para obtener los números decimales anteriores. Comenten con sus compañeros de grupo la estrategia que aplicaron.

Aprendo mejor

Es posible que, al resolver problemas, encuentres diferencias entre tus procedimientos y los que usaron tus compañeros, pues no hay una sola manera de resolverlos. Escucha respetuosamente lo que ellos hicieron y expón tu punto de vista. Esto les ayudará a enriquecer su repertorio de estrategias.

Raíz cuadrada

Consiste en encontrar un número que, multiplicado por sí mismo (**elevarlo al cuadrado**), sea exactamente igual al número del cual obtenemos la raíz cuadrada. Extraer la raíz cuadrada es la **operación inversa** de elevar al cuadrado.

- Encierren los números que tienen raíz cuadrada exacta.
 - $\sqrt{225}$
 - $\sqrt{140}$
 - $\sqrt{175}$
 - $\sqrt{400}$
 - $\sqrt{800}$
 - $\sqrt{1225}$

g) ¿En qué se basaron para determinar qué números tienen raíz cuadrada exacta?
- Validen con otra pareja sus procedimientos y sus resultados.

4. El profesor de Ciencias trata de organizar a su grupo de 50 alumnos en filas y columnas y necesita que en cada una haya el mismo número de alumnos.
- ¿Cuántos alumnos habrá en cada fila? _____
 - ¿Cuántos alumnos habrá en cada columna? _____
 - ¿Cuántos alumnos quedan fuera de la formación? _____
 - ¿Cuál es la parte entera de la raíz cuadrada de 50? _____
- Comparen sus respuestas de manera grupal.

Raíces cuadradas exactas y no exactas

Los números que tienen una **raíz cuadrada exacta**, como 225, 400 o 1 225, se conocen como *cuadrados perfectos*. Existen números que al calcular su raíz cuadrada se obtiene un número decimal, por tanto, se dicen que son una aproximación al valor de la raíz.

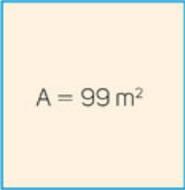
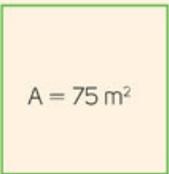
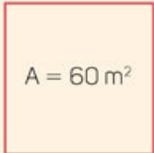
5. Cuatro cuadrados tienen de área 121 mm^2 , 225 mm^2 , 399 mm^2 y 615 mm^2 respectivamente. ¿Qué cuadrados miden de lado un número exacto? ¿Cuál de ellos son cuadrados perfectos? Dibújalos.



¿Cómo vamos?

Trabaja de manera individual.

1. Encuentra la medida de los lados de los siguientes cuadrados.

<p>a)  Está entre: _____ y _____</p>	<p>c)  Está entre: _____ y _____</p>
<p>b)  Está entre: _____ y _____</p>	<p>d)  Está entre: _____ y _____</p>

- Compara tus respuestas con las de otros compañeros.

Aproximaciones sucesivas

En parejas realicen lo que se pide.

- Ana se dedica a fabricar tapetes y le solicitaron uno cuadrado para cubrir una superficie de 12 m^2 . Para hacerlo necesita conocer las medidas de los lados del tapete.
 - ¿Entre qué números enteros se encuentra la medida de los lados? _____
 - Para aproximar su resultado elaboró la siguiente tabla. Calculen las operaciones y contesten.

$(3.1)^2 =$	$(3.4)^2 =$	$(3.7)^2 =$
$(3.2)^2 =$	$(3.5)^2 =$	$(3.8)^2 =$
$(3.3)^2 =$	$(3.6)^2 =$	$(3.9)^2 =$

- ¿Entre qué números debe estar la raíz cuadrada de 12? ¿Por qué? _____

- Obtengan aproximaciones de la raíz cuadrada de 12. Observen el ejemplo.

$(3.41)^2 = 11.62$		

- ¿Cuál sería el resultado más aproximado a la medida de los lados del tapete? _____

- Usen la estrategia que emplearon en la actividad anterior y aproximen hasta centésimos, el valor de las raíces cuadradas.
 - $\sqrt{42} \approx \underline{6.48}$
 - $\sqrt{96} \approx \underline{\hspace{2cm}}$
 - $\sqrt{103} \approx \underline{\hspace{2cm}}$
 - $\sqrt{146} \approx \underline{\hspace{2cm}}$
 - $\sqrt{85} \approx \underline{\hspace{2cm}}$
 - $\sqrt{221} \approx \underline{\hspace{2cm}}$

- Comparen sus resultados con el resto del grupo.

Aproximación

El símbolo \approx significa "resultado aproximado" o "valor aproximado".

Otras fuentes

En www.esant.mx/ecsema2-013 encontrarás un video que te mostrará otros métodos para aproximar el resultado de una raíz cuadrada.

¿Cómo vamos?

Trabaja de manera individual.

1. Toño vive cerca de dos parques que tienen forma cuadrada y distintas medidas. Los sábados camina cuatro vueltas alrededor del parque más pequeño, cuya medida de área es de 400 m^2 , y los domingos da dos vueltas alrededor del parque más grande, que mide 800 m^2 .

a) ¿En cuál parque camina más? ¿Por qué? _____

b) ¿Cuál es el perímetro de los parques? _____

2. Escribe *verdadero* o *falso* según corresponda:

a) $\sqrt{11}$ está entre 3 y 4 _____

d) $\sqrt{160}$ está entre 13 y 14 _____

b) $\sqrt{32}$ está entre 5 y 6 _____

e) $\sqrt{110}$ está entre 10 y 11 _____

c) $\sqrt{310}$ está entre 14 y 15 _____

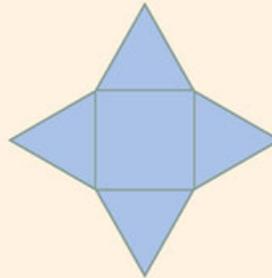
f) $\sqrt{15}$ está entre 4 y 5 _____

3. El área de un cuadrado mide 99 m^2 .

a) ¿Entre qué números enteros se encuentra la medida de sus lados? _____

b) Aproximando a décimos, ¿cuál será su medida? _____ ¿Y a centésimos? _____

4. En un fraccionamiento hay una alberca como la que se muestra a la derecha. Está formada por una parte cuadrada y cuatro partes triangulares iguales. La parte cuadrada mide 24 m^2 de área y el largo de la alberca es tres veces el lado del cuadrado. Para que el agua no se ensucie mucho, el comité decidió comprar una cubierta plástica.



a) ¿Cuál es la medida por lado del cuadrado? _____

b) De acuerdo con esta aproximación, ¿cuál es el costo de la cubierta si el metro cuadrado tiene un costo de \$300? _____

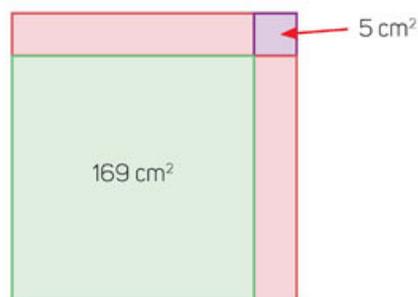
c) En la tienda, el vendedor calculó el área de cada triángulo usando directamente $\sqrt{24}$ como medida de su base y altura. ¿Qué precio les dio el vendedor? _____

d) ¿Por qué hay diferencia entre el precio calculado por el vendedor y el calculado por el comité? _____

Identifica las raíces cuadradas de un número positivo

Resuelve.

1. Analiza la imagen y contesta.



- a) ¿Cuáles son las medidas de la base y altura de los rectángulos de color rosa?

- b) ¿Qué pasa si (-13) se eleva al cuadrado? _____

- c) Entonces, ¿puedo utilizar el número -13 como medida de la altura del rectángulo? ____ ¿Por qué? _____

- d) ¿Cuál es el área aproximada de cada rectángulo? _____

Dos soluciones válidas de una raíz cuadrada

Un **número positivo tiene dos raíces cuadradas**: una con valor positivo y otra con valor negativo. Por ejemplo, $(+5)(+5) = +25$ y $(-5)(-5) = +25$ y ambos resultados son positivos. En la actividad anterior, -13 es una raíz de 169 pero ese valor no se considera ya que no existen distancias negativas. Si se necesita indicar las dos raíces se utiliza el signo \pm (más-menos). Por ejemplo, $\sqrt{25} = \pm 5$.

2. Obtén la raíz cuadrada de los siguientes números y aproxima a centésimos. Escribe en tu cuaderno una situación que se pueda resolver con las raíces. Puedes utilizar como resultado la raíz positiva, la negativa o ambas.

a) $\sqrt{170} =$ _____

c) $\sqrt{130} =$ _____

b) $\sqrt{250} =$ _____

d) $\sqrt{390} =$ _____

3. Calcula el cuadrado de cada número.

a) $(-15)^2 =$ _____

c) $(-25.32)^2 =$ _____

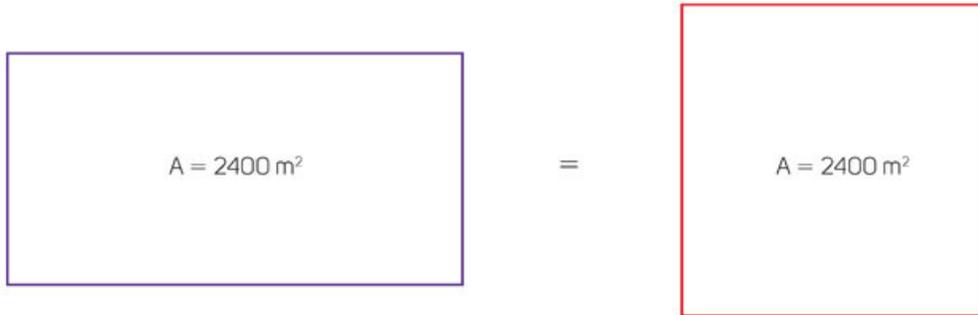
b) $(-18.2)^2 =$ _____

d) $(-31.04)^2 =$ _____

- Compara tus resultados con los de tus compañeros.

Analiza las situaciones y contesta.

1. Un terreno tiene 100 m de largo y 24 m de ancho. Otro terreno tiene la misma área, pero su forma es cuadrada.



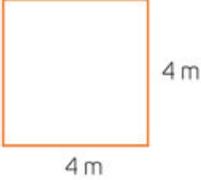
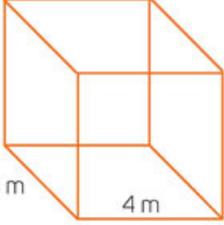
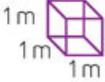
- a) ¿Cuánto mide por lado el terreno cuadrado? _____
2. Una huerta cuadrada tiene un área de 1025 m^2 y se cercará con una malla de alambre cuyo precio es de \$55 el metro.
- a) ¿Cuánto mide cada lado de la huerta? _____
- b) ¿Cuál es el perímetro del terreno? _____
- c) ¿Cuánto se pagará en total por la cerca? _____
3. Un parque cuadrado tiene una superficie de 1500 m^2 .
- a) ¿Cuánto mide de lado el parque? _____
- b) ¿Cuánto tiene de perímetro? _____
- c) Si un atleta le da cinco vueltas corriendo, ¿cuántos metros corre? _____
4. Fabián quiere sembrar pinos enanos alrededor de su jardín cuadrado. El jardín tiene una superficie de 30 m^2 y Fabián colocará un pino cada 20 cm.
- a) ¿Cuánto mide de lado el jardín? _____
- b) ¿Cuánto mide el perímetro del jardín? _____
- c) ¿A cuántos centímetros equivale la medida del perímetro del jardín? _____
- d) ¿Cuántos pinos puede plantar en cada lado del jardín? _____
- e) ¿Cuántos pinos tendría que comprar? _____
- De manera grupal, comprueben sus respuestas y validen sus procedimientos y resultados.

Casos particulares: a^n , 1^n , 0^n



Haz lo que se pide.

1. Completa la tabla. En cada casilla escribe las operaciones que debes realizar para calcular la longitud, área o volumen de los objetos.

 <p>Calcula la longitud del segmento. Operación: _____ Resultado = _____</p>	 <p>Calcula el área del cuadrado. Operación: _____ Resultado = _____</p>	 <p>Calcula el volumen del cubo. Operación: _____ Resultado = _____</p>
 <p>Calcula la longitud del segmento. Operación: _____ Resultado = _____</p>	 <p>Calcula el área del cuadrado. Operación: _____ Resultado = _____</p>	 <p>Calcula el volumen del cubo. Operación: _____ Resultado = _____</p>
<p>Si no hay segmento, ¿cuánto medirá algo que no existe? _____, ¿qué operaciones harías para calcular la medida del segmento? _____ Resultado = _____</p>	<p>Si no hay cuadrado, ¿qué operaciones harías para calcular el área? _____ Resultado = _____</p>	<p>Si no hay representación del cubo, ¿qué operaciones harías para calcular su volumen? _____ Resultado = _____</p>

- a) Escribe de dos formas distintas la fórmula para calcular el área del cuadrado.

- b) Escribe de dos formas distintas la fórmula para calcular el volumen de un cubo.

- c) Observa la longitud del segmento, la medida del área del cuadrado y la medida del volumen del cubo de la primera fila. Describe cómo cambian. _____
- d) ¿Qué sucede con las medidas de la segunda fila? ¿Observas el mismo cambio? Argumenta tu respuesta. _____

- Compara tus respuestas con las de otro compañero y profundicen en el análisis de estas últimas preguntas.

Potencia



Analiza las situaciones y haz lo que se pide.

1. Completa la tabla, observa el ejemplo y responde.

a	a^2	Resultado	a^3	Resultado	a^4	Resultado	a^5	Resultado
4	4×4	16	$4 \times 4 \times 4$					
1								
0								
3								

- ¿Qué significa a^5 ? _____
 - ¿Qué resultados no cambiaron al ser utilizados en diferentes operaciones? _____
 - Si $a = 0$, ¿cuál será el resultado de la operación a^{10080} ? _____
 - Si $a = 1$, ¿cuál será el resultado de la operación a^{10080} ? _____
 - De acuerdo con tu respuesta de los incisos c y d, ¿el resultado será el mismo sin importar cuántas veces se repita la operación? Argumenta tu respuesta.
- Compara tus respuestas con las de otro compañero y expongan sus argumentos. Investiguen cómo se lee a^4 , a^5 , a^6 .

Potencia: Casos particulares

La "potencia" o "elevar a la n " es un procedimiento en el cual se multiplica por sí mismo un número (base) tantas veces como lo indique el exponente (n). Se escribe como:

$$\text{Base} \longrightarrow a^n \longleftarrow \text{Exponente}$$

Por ejemplo, al obtener el área del cuadrado, se usa la fórmula $A = l^2$ que se lee: el área es igual al lado al cuadrado, es decir, que el lado del cuadrado se multiplicará por sí mismo 2 veces.

Existen números que, sin importar a qué potencia se eleven, el resultado seguirá siendo el mismo. Estos números son el 0 y el 1, ya que 1 multiplicado varias veces por sí mismo siempre será 1 y lo mismo sucede con el 0. Por ejemplo, $1^5 = 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$ y $0^5 = 0 \times 0 \times 0 \times 0 \times 0 = 0$.

¿Cómo vamos?

1. Realiza las operaciones.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } 5^2 + 1^{80} + 3^3 + 0^{12} = \underline{\hspace{2cm}} & \text{c) } 0^5 + 0^{14} + 0^{39} + 0^3 + 1^{90} = \underline{\hspace{2cm}} \\ \text{b) } 2^5 + 1^1 + 1^2 + 1^3 = \underline{\hspace{2cm}} & \text{d) } 1^{200} + 0^{55} + 4^3 = \underline{\hspace{2cm}} \end{array}$$

- Compara tus respuestas con las de otro compañero y verifiquen si se cumplen las características que identificaron.

Productos de potencias de la misma base

En parejas, realicen lo que se solicita.

- Resuelvan las operaciones y respondan.

Operación	Resultado
$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 =$	
$2^1 \times 2^1 \times 2^1 \times 2^1 \times 2^1 \times 2^1 =$	
$2^2 \times 2^2 \times 2^2 =$	
$2^3 \times 2^3 =$	
$2^4 \times 2^2 =$	
$2^6 =$	

- ¿Qué resultado fue diferente? _____
- ¿Qué sucedió en la primera fila de operaciones para que se convirtiera en la segunda fila? _____
- ¿Qué sucedió con la primera fila de operaciones para que se convirtiera en la tercera fila? _____
- ¿Qué se realizó en la segunda fila de operaciones para que se convirtiera en la cuarta fila? _____
- ¿Qué ocurrió con la segunda, la tercera o la cuarta fila para que se convirtiera en la quinta fila? _____

- Comparen sus respuestas con las de otra pareja y lleguen a acuerdos.

- Sin utilizar la calculadora, remarquen con el mismo color las operaciones que darán el mismo resultado.

$$5^2 \times 5^3 \times 5 \times 5^3$$

$$5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$$

$$5^4 \times 5^4$$

$$5^8 \times 5$$

$$5^4 \times 5^5$$

$$5 \times 5^7$$

$$5^8$$

$$9^5$$

$$8^5$$

$$5^9$$

- Comprueben con su calculadora sus resultados. Redacten en su cuaderno una conclusión de los ejercicios anteriores.

¿Cómo vamos?

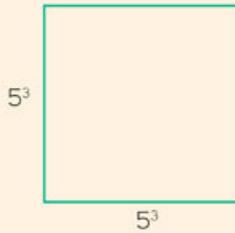
Trabaja de manera individual.

1. Completa la tabla.

Operación	Resultado
$9^2 \times 9^4 \times 9^7 \times 9^{16} \times 9 =$	
$10^{1000} \times 10 \times 10^3 =$	
	7^{41}
$23^6 \times 23 \times 23 \times 23 \times 23 \times 23^4 =$	
$1^3 \times 1^5 \times 1^6 \times 1^7 =$	
	0
	23^{23}

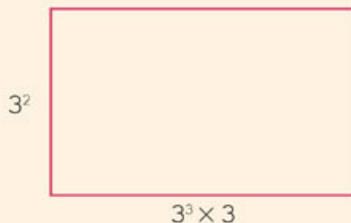
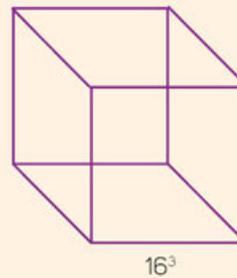
- Compara tus resultados y tus estrategias de solución con las de otro compañero.

2. Calcula lo que se pide en cada figura.



El área del cuadrado: _____

El volumen del cubo: _____



El área del rectángulo: _____

- Comprueba tus respuestas y procedimientos con los de otro compañero.

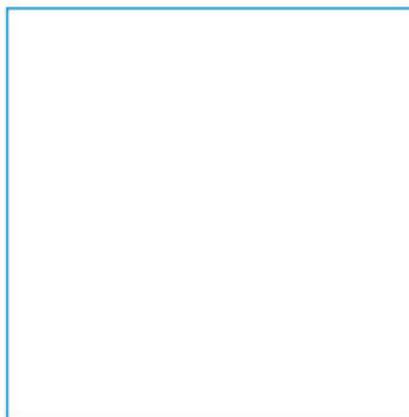
Otras fuentes

En el sitio www.esant.mx/ecsema2-014 podrás interactuar con una actividad sobre productos de potencias de la misma base.

Generaliza la regla para calcular potencias de la misma base

Lee la siguiente situación y contesta.

1. La medida del lado del cuadrado es desconocida, pero se sabe que su área es igual a n^4 . Divide el cuadrado en tantas partes como sea necesario para representar el lado de la figura. Posteriormente cuadrícula la superficie para comprobar la medida de los lados.



- a) ¿En cuántas partes dividiste el lado del cuadrado? _____
- b) Compara tus trazos con los realizados por tus compañeros. ¿Todos hicieron las mismas divisiones? _____

- c) ¿A qué se debe la respuesta anterior? _____

2. Analiza las siguientes expresiones.

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

$$n \times n^2 \times n \times n^2$$

- a) ¿Qué diferencia hay entre las expresiones? _____

- b) ¿Qué similitudes pueden tener? _____

- c) ¿Qué similitudes puede haber en los resultados? _____

- De manera grupal comparen sus respuestas y lleguen a acuerdos comunes.

Producto de potencias de la misma base

Cuando se multiplican **potencias de la misma base**, una regla indica que las bases se conservan y solamente se suman los exponentes. Por ejemplo:

$$5^2 \times 5^6 = 5^8$$

$$-5^9 \times -5^{13} = 5^{22}$$

$$2.3^6 \times 2.3^7 = 2.3^{13}$$

$$\left(-\frac{3}{4}\right)^4 \times \left(-\frac{3}{4}\right)^7 = \left(-\frac{3}{4}\right)^{11}$$

Esto se aplica aun sin conocer la base: $a^2 \times a^6 = a^8$

La **regla de los exponentes para la multiplicación de potencias de la misma base** se generaliza usando una expresión algebraica:

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$



Resuelvan en equipos.

1. Calculen el resultado de las siguientes operaciones.

a) $w^3 w w w^5 w^7 =$ _____

b) $h^5 h^3 h^4 h^{89} =$ _____

c) $g g g g 0^{43} =$ _____

d) $5^g 5^w 5^d =$ _____

e) $k^p k^r k^b k^w =$ _____

2. Asignen valores a las operaciones y resuélvanlas. Comprueben con su calculadora que sus respuestas son correctas.

a) $\square^3 \times \square^{\square} \times \square^{\square} \times \square^5 \times \square^7 =$

b) $\square^5 \times \square^3 \times \square^4 \times \square^{\square} \times 1^{89} =$

c) $\square^{\square} \times \square^{\square} \times \square^{\square} \times \square^{\square} \times 0^{43} =$

d) $5^{\square} \times 5^{\square} \times 5^{\square} =$

e) $\square^{\square} \times \square^{\square} \times \square^{\square} \times \square^{\square} =$

• Compartan sus respuestas y conclusiones de esta secuencia con el resto del grupo.

Productos de potencias



Haz lo que se pide y responde.

1. Resuelve las operaciones. Observa el ejemplo.

Operación	Potenciación	Resultado
A. $(2 \times 3)^2 =$	$(6)^2 = 6 \times 6$	36
B. $(4 \times 2)^3 \times (4 \times 2)^2 =$		
C. $(2^3)(2^3) =$		
D. $(2 \times 2 \times 2)(2 \times 2 \times 2) =$		
E. $(2^3)^2 =$		
F. $(3 \times 3)(3 \times 3)(3 \times 3) =$		
G. $(3^2)(3^2)(3^2) =$		
H. $(3^2)^3 =$		

- a) ¿Qué operaciones se realizaron en A y en qué orden? _____

- b) ¿Qué operación realizaste para resolver el punto B y en qué orden? _____

- c) ¿Qué operación realizaste para responder el punto C y en qué orden? _____

- d) ¿Qué diferencias hay entre el punto C y D? _____

- e) ¿Qué diferencias hay entre el punto E y D? _____

- f) ¿Qué tienen en común los puntos C, D y E? _____

- g) ¿Qué diferencias hay entre el punto F y G? _____

- h) ¿Qué diferencias hay entre el punto G y H? _____

- i) ¿Qué tienen en común los puntos F, G y H? _____

- Usa tu calculadora para validar tus resultados. Escribe en tu cuaderno una breve explicación de cómo resolver los puntos E y H.

Potencias de una potencia



Resuelve.

1. Señala en cuáles procedimientos se cometieron errores.

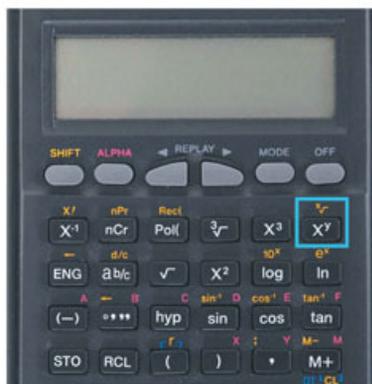
Procedimiento 1	Procedimiento 2	Procedimiento 3	Procedimiento 4
$(4^2)^3 = 4^2 + 3 = 4^5$ $= 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$ $= 1024$	$(4^2)^3 = (4 \times 4) (4 \times 4)$ $(4 \times 4) = 16 \times 16 \times 16$ $= 4096$	$(4^2)^3 = 4^2 \times 3 = 4^6$ $= 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$ $\times 4 = 4096$	$(4^2)^3 =$ $= (4 \times 4) (4 \times 4 \times 4)$ $= (16) (64) = 1024$

2. Comprueba tus resultados usando una calculadora científica. Sigue los pasos:

- Digita el número base (4) seguido de la tecla x^y , escribe la potencia a la que estará elevado (2), luego el signo igual.
- Digita de nuevo la tecla x^y y la potencia a la que estará elevado (3), seguida de la tecla igual.

$$4 \boxed{x^y} 2 \boxed{=} 16 \boxed{x^y} 3 \boxed{=}$$

- En caso de que tu calculadora no cuente con esas funciones, pide ayuda a tu profesor para su uso.



- a) ¿Qué procedimientos se resolvieron incorrectamente? _____ ¿Por qué? _____

¿Cómo vamos?

Trabajen en parejas.

1. Resuelvan o expresen una equivalencia de cada operación.

- $(1^2)^3 =$ _____
- $(0^{21})^{23} =$ _____
- $(12345^6)^7 =$ _____
- $(5^3)^2 =$ _____
- $(4163^4)^5 =$ _____
- $(2^4)^5 =$ _____
- ¿Cuáles operaciones fueron más fáciles de resolver? _____
- ¿Qué sucedió con aquellas que no te parecieron fáciles de resolver? _____

- Comparen sus respuestas con el resto del grupo y, con ayuda de su profesor, determinen cuáles podrían quedar expresadas de una manera equivalente.

Generalización de la regla: $(a^m)^n$ y a^0

Resuelve.

1. Escribe las similitudes y las diferencias que tienen las dos operaciones.

A. $(983849^2)^3$ B. $(a^2)^3$

- Similitudes: _____

 - Diferencias: _____

- a) ¿Cómo resuelves A? _____
- b) ¿Aplicas el mismo procedimiento para resolver B? _____ ¿Por qué? _____

2. Analiza la siguiente operación.

$$(n^m)^3 =$$

- a) ¿Qué similitudes y diferencias tiene con respecto a las operaciones de la actividad 1?
- Similitudes: _____
 - Diferencias: _____

3. Analiza la siguiente operación.

$$(n^m)^n =$$

- a) ¿Qué similitudes y diferencias tiene con respecto a las operaciones anteriores?
- Similitudes: _____
 - Diferencias: _____

Potencia de una potencia

Cuando se eleva una base a una potencia de otra potencia, la base se conserva y los exponentes se multiplican, por ejemplo:

$$(12^2)^3 = (12)^{2 \times 3} = 2985984 \quad (a^m)^n = a^{m \times n} = a^{mn} \quad (68734^{12})^{11} = 68734^{132}$$

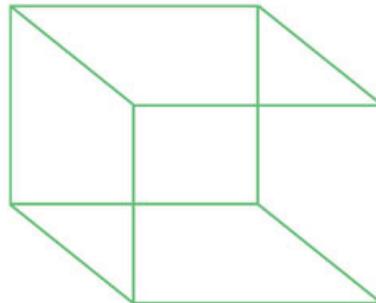
- b) ¿Consideras que las actividades anteriores se apegan a la regla? _____ ¿Por qué? _____

- De manera grupal, socialicen sus argumentos y lleguen a acuerdos.

Potencia de potencias

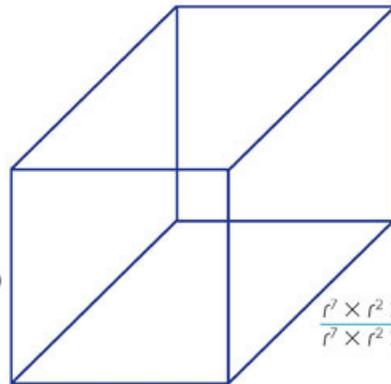
Analiza cada situación y contesta.

1. Observa las figuras y las medidas que se indican.



$$(z^4 \times z^6)$$

- a) ¿Cuál es el área de la base del cubo? _____
 b) ¿Cuánto mide el volumen del cubo? _____



$$(y^7 \times y^2 \times y^3)$$

$$\frac{r^7 \times r^2 \times r^3}{r^7 \times r^2 \times r^3}$$

$$(y^7 \times y^2 \times y^3)$$

$$(w^{10} \times w^{10})$$

- c) ¿Cuánto mide el área de la base del prisma rectangular? _____
 d) ¿Cuál es su volumen? _____



- e) ¿Cuál es el área del paralelogramo? _____

2. Dibuja un cuerpo geométrico. Usa literales para asignarle medidas a cada uno de sus lados y pídele a otro compañero que calcule su área y volumen. Después calcularás las medidas del cuerpo propuesto por tu compañero.



3. Con tu compañero de la actividad anterior, identifiquen cuáles desarrollos se resolvieron incorrectamente.

A	B	C
$a^0 \times a^9 \times a^3 =$ $= 0 \times a^{12}$ $= 0$	$a^0 \times a^9 \times a^3 =$ $= 1 \times a^{12}$ $= a^{12}$	$a^0 \times a^9 \times a^3 =$ $= 1 \times a^{12}$ $= a^{13}$

- a) ¿Cuáles desarrollos tienen errores? _____
 b) ¿Por qué? _____

- Comparen sus respuestas y argumentos con otra pareja y lleguen a acuerdos generales.

4. Realiza un ejercicio en el que intencionalmente te equivoques y pide a tu compañero que encuentre el error que cometiste. Él tendrá que hacer lo mismo y tú tendrás que hallar el error.

Haz lo que se pide.

1. Resuelve las operaciones. Simplifica tu respuesta a su mínima expresión.

a) $\frac{b^{58}}{b^{58}} \times \frac{a^{36}}{a^{36}} \times m^0 =$

b) $(b^{89})^{60} =$

c) $(a^{43})^{12} \times a^0 =$

d) $(w^5)^3 \times (w^7)^2 =$

e) $(m^9)^8 \times \frac{m \times m \times m \times m \times m}{m \times m \times m \times m \times m} \times \frac{n}{n} =$

- Compara tus resultados con todo el grupo. Si tienes dudas en alguno de los incisos, puedes sustituir el valor de la variable por el número que desees.

Otras fuentes

En el siguiente sitio encontrarás un interactivo en el que introducirás la base y el exponente para calcular productos de potencias de la misma base:

www.esant.mx/ecsema2-015.

¿Qué aprendimos?

Cociente de potencias de la misma base



Haz lo que se pide.

- Analiza las operaciones y contesta.

A. $\frac{2 \times 2 \times 2}{2} =$

B. $\frac{2}{2 \times 2 \times 2} =$

- ¿Qué diferencias hay entre ambas operaciones? _____

- ¿Cuál es el resultado de A? _____ ¿Y de B? _____
- ¿Con qué potencia puedes representar a la operación A? _____
- ¿Con qué potencia puedes representar a la operación B? _____

- Comprueba tus respuestas con ayuda de la calculadora.

Cocientes de potencias de la misma base



Resuelvan en parejas.

- Completen la tabla. En la columna final escriban el resultado como potencia.

Operación	Desglose	Resultado	Resultado como potencia
$\frac{3^4}{3^4} =$	$\frac{3 \times 3 \times 3 \times 3}{3 \times 3 \times 3 \times 3} =$	1	
$\frac{5^8}{5^8} =$			5^0
$\frac{5^2}{5} =$			
$\frac{2^4}{2^2} =$			
$\frac{6^7}{6^4} =$			
$\frac{5}{5^2} =$			
$\frac{4^2}{4^4} =$			
$\frac{8^7}{8^9} =$			

- Comparen sus respuestas y procedimientos con los de otra pareja. En caso de ser diferentes, argumenten y lleguen a acuerdos.

2. Determinen en cuál de los procedimientos se cometieron errores. Completen escribiendo "Sí" o "No" y argumenten su respuesta.

$$\frac{2^9}{2^8} = \frac{2 \times 2 \times 2}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} = \frac{2}{0} = 2$$

$$\frac{2^9}{2^8} = \frac{2 \times 2 \times 2}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} = \frac{2}{2} \times 2 = 1 \times 2 = 2$$

$$\frac{2^8}{2^9} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}{2 \times 2 \times 2} = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$\frac{2^8}{2^9} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}{2 \times 2 \times 2} = \frac{0}{2} = 0$$

- a) La operación del recuadro azul _____ tiene errores porque _____

- b) La operación del recuadro verde _____ tiene errores porque _____

- c) La operación del recuadro morado _____ tiene errores porque _____

- d) La operación del recuadro anaranjado _____ tiene errores porque _____

- Con ayuda de una calculadora comprueben sus respuestas. Analicen las características de cada operación y escríbanlas en su cuaderno. Redacten una estrategia de solución que permita llegar al resultado sin hacer el desglose.

3. Usen la estrategia que escribieron para realizar las operaciones.

a) $\frac{9^3}{9^2} =$

b) $\frac{3^{14}}{3^{17}} =$

c) $\frac{5^{10}}{5^{12}} =$

d) $\frac{8^{14}}{8^8} =$

- Comprueben sus respuestas con ayuda de la calculadora.

Generalización de la regla: $\frac{a^b}{a^c}$, con $b > c$

Resuelve.

1. Analiza las operaciones. Escribe las similitudes y diferencias entre ellas.

A. $\frac{16^8}{16^7} =$ B. $\frac{a^8}{a^7} =$

• Similitudes: _____

• Diferencias: _____

a) ¿Cómo resuelves A? _____

b) ¿Aplicarías el mismo procedimiento para resolver B? _____ ¿Por qué? _____

2. Analiza la operación C.

C. $\frac{a^b}{a^7} =$

a) ¿Qué similitudes y diferencias tiene con respecto a A y B?

• Similitudes: _____

• Diferencias: _____

3. Analiza la operación D.

D. $\frac{a^b}{a^c} =$

a) ¿Qué similitudes y diferencias tiene con respecto a las tres anteriores?

• Similitudes: _____

• Diferencias: _____

- Comparte tus respuestas y argumentos. Si tienes dificultades, extérnalas para aclararlas.

Cociente de una potencia $\frac{a^b}{a^c}$ con $b > c$ ambos números enteros positivos.

En la operación $\frac{a^7}{a^3}$ el exponente del numerador es mayor que el del denominador, lo cual equivale a: $\frac{a \times a \times a \times a \times a \times a \times a}{a \times a \times a} = \frac{a}{a} \times \frac{a}{a} \times \frac{a}{a} \times a \times a \times a \times a$. Al simplificar en grupos de $\frac{a}{a} = 1$, tenemos que: $1 \times 1 \times 1 \times a \times a \times a \times a = 1 \times a^4 = a^4$.

La **regla de los exponentes para la división de potencias de la misma base** indica que el cociente es igual a la misma base, donde el exponente es igual a la diferencia del exponente del dividendo menos el exponente del divisor: $\frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$.

Si en un cociente los dos exponentes son iguales, el resultado es igual a 1: $\frac{a^b}{a^b} = 1$.

Por ejemplo, al asignar valores para a y b , en la siguiente operación, tenemos:

$$\frac{a^b}{a^b} = \frac{3^4}{3^4} = \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3}{3 \times 3 \times 3 \times 3} = 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$$

¿Cómo vamos?

Trabaja de manera individual.

1. Resuelve las operaciones.

a) $\frac{w^{21}}{w^{16}} =$

b) $\frac{x^{23}}{x^{12}} =$

c) $\frac{67^{38}}{67^{29}} =$

d) $\frac{m^8}{m^7} =$

e) $\frac{k^3}{k^2} =$

f) $\frac{f^{90}}{f^{89}} =$

• Compara tus respuestas y procedimientos con los de otro compañero.

2. Escribe dos operaciones que tengan como respuestas las opciones de la tabla.

Respuesta	Operación 1	Operación 2
a	_____ =	_____ =
b^7	_____ =	_____ =
d^5	_____ =	_____ =
y	_____ =	_____ =
w^9	_____ =	_____ =
r	_____ =	_____ =

• Intercambia tus respuestas con otro compañero y verifiquen sus resultados.

Generalización de la regla: $\frac{a^b}{a^c}$, con $b < c$

Haz lo que se pide.

1. Analiza las operaciones. Escribe las similitudes y diferencias entre ellas.

$$E. \frac{32^{12}}{32^{18}} = \qquad F. \frac{a^{12}}{a^{18}} =$$

- Similitudes: _____

- Diferencias: _____

- a) ¿Cómo resuelves E? _____

- b) ¿Se puede aplicar el mismo procedimiento para resolver F? _____ ¿Por qué?

2. Analiza la operación G.

$$G. \frac{a^b}{a^{18}} =$$

- ¿Qué similitudes y diferencias tiene con respecto a E y F?
- Similitudes: _____

 - Diferencias: _____

3. Analiza la operación H:

$$H. \frac{a^b}{a^c} =$$

- ¿Qué similitudes y diferencias tiene con respecto a las tres anteriores?
- Similitudes: _____

 - Diferencias: _____

- Comparte tus respuestas y argumentos. Si tienes dificultades, extérnalas para aclararlas.

Cociente de una potencia $\frac{a^b}{a^c}$ con $b < c$ ambos números enteros positivos.

En la operación $\frac{a^6}{a^7}$ el exponente del numerador es menor que el del denominador,

lo cual equivale a $\frac{a \times a \times a \times a \times a \times a}{a \times a \times a \times a \times a \times a \times a}$. Al simplificar en grupos de $\frac{a}{a} = \frac{1}{1}$, tenemos que: $\frac{1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1}{1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times a} = \frac{1}{1 \times a} = \frac{1}{1a} = \frac{1}{a}$.

La regla de los exponentes para la división de potencias de la misma base cuando el exponente del dividendo es menor que el exponente del divisor indica que $\frac{a^b}{a^c} = \frac{1}{a^{c-b}}$.

4. Resuelve.

a) $\frac{x^{12}}{x^{16}} =$

b) $\frac{y^2}{y^{10}} =$

c) $\frac{23^{28}}{23^{32}} =$

d) $\frac{14^{13}}{14^{14}} =$

5. Escribe dos operaciones que tengan como respuesta las opciones de la tabla.

Respuesta	Operación 1	Operación 2
$\frac{1}{x^6}$	_____ =	_____ =
$\frac{1}{n^2}$	_____ =	_____ =
$\frac{1}{r}$	_____ =	_____ =

Otras fuentes

Visita el siguiente sitio para profundizar sobre el tema estudiado:

www.esant.mx/ecsema2-016.

- Compara tus respuestas con las de otro compañero.

Reunidos en parejas hagan lo que se pide.



1. Resuelvan las operaciones.

a) $\frac{r^4}{r^5} =$

b) $\frac{z^{12}}{z^7} =$

c) $\frac{m^{45}}{m^{46}} =$

d) $\frac{q^{18}}{q^9} =$

2. Determinen una operación, con dividendo y divisor, para cada respuesta.

Respuesta	Operación	Respuesta	Operación
3^7		$\frac{1}{w^{25}}$	
$\frac{1}{5}$		q^{11}	

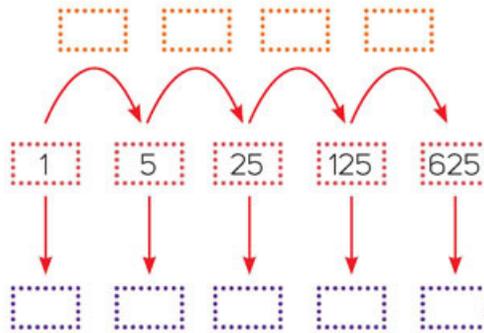
- Verifiquen que sus resultados sean correctos. Discutan las reglas aplicadas y, con la orientación del maestro, registren sus resultados.

Construcción del significado de potencia negativa

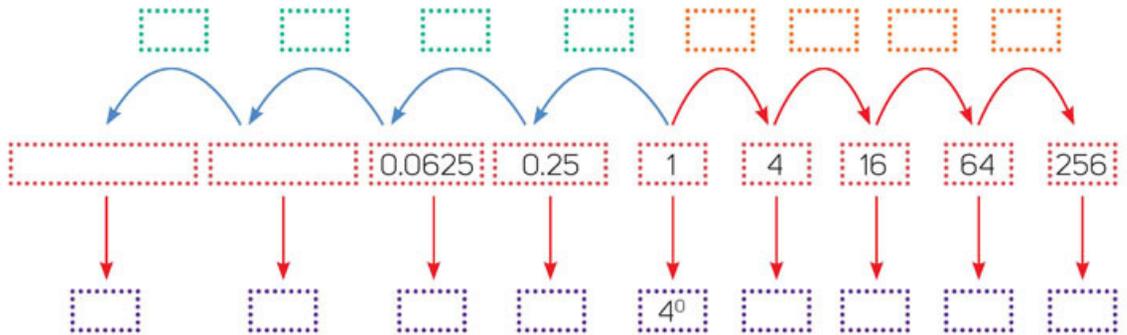


Analiza el esquema y haz lo que se pide.

1. Completa el esquema de acuerdo con las condiciones dadas.
 - a) En los recuadros anaranjados escribe la operación con la que se genera el siguiente término.
 - b) En los recuadros morados escribe como potencia, con la misma base, los números de cada recuadro rojo.



2. Completa el esquema con un compañero.



- a) ¿Qué operación se realizó para pasar de 1 a 4? _____
- b) ¿Qué operación se realizó para pasar de 1 a 0.25? _____
- c) ¿Cómo son los números que siguen el sentido de las flechas rojas? _____
 _____ ¿Y su representación en forma de potencias? _____
- d) ¿Cómo son los números que siguen el sentido de las flechas azules? _____
 _____ ¿Y su representación en forma de potencias? _____

- Comprueben sus resultados usando la calculadora. Si tienen dudas sobre la manera de ingresar los datos a la calculadora, pregunten a su profesor.

Resuelvan en equipos.

1. Analicen los procedimientos.

$$A. \frac{2 \times 2 \times 2}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} = \frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{2^2}$$

$$B. \frac{2 \times 2 \times 2}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} = \frac{2^3}{2^5} = \frac{2^{3-5}}{1} = \frac{2^{-2}}{1} = 2^{-2}$$

$$C. \frac{2 \times 2 \times 2}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} = \frac{2^3}{2^5} = \frac{1}{2^{5-3}} = \frac{1}{2^2}$$

- a) ¿Qué similitudes y diferencias hay entre el procedimiento A y el C? _____

- b) ¿Qué similitudes y diferencias hay entre el procedimiento B y el C? _____

- c) ¿Qué diferencia hay entre $2^{-2} = \frac{1}{2^2}$? _____

- Comprueben con su calculadora sus resultados. Redacten un breve resumen o reglas de cómo se escribe el exponente de una potenciación cuando es negativo.

Aprendo mejor

Cuando trabajes en equipo escucha respetuosamente las opiniones de todos los integrantes. Decidan una estrategia y luego evalúen los resultados obtenidos. Si se equivocaron, analicen el origen del error y corrijan. El error es una oportunidad de aprendizaje.

¿Cómo vamos?

1. Toma como base tu resumen y resuelve las operaciones. Escribe el resultado de dos formas distintas.

a) $\frac{w^2}{w^3} =$

d) $\frac{y^3}{y^7} =$

b) $\frac{x^2}{x^4} =$

e) $\frac{m^5}{m^{10}} =$

c) $\frac{b^6}{b^9} =$

f) $\frac{z^8}{z^{13}} =$

- Compara tus resultados con los de otro compañero. Sustituye los valores de las variables por valores conocidos que ustedes elijan y comprueben sus respuestas.

Generalización de reglas de potencias

Analiza cada situación y contesta.

1. Determina en cuál operación se cometió algún error.

$$A. \frac{m^6}{w^8} = \frac{1}{m^{8-6}} = \frac{1}{m^2}$$

$$B. \frac{m^5}{m^3} = \frac{m^{3-5}}{1} = m^{-2}$$

$$C. \frac{m^4}{m^7} = \frac{1}{m^{4-7}} = \frac{1}{m^{-3}} = m^3$$

- a) Escribe "Sí" o "No" para expresar si hay o no errores y posteriormente, argumenta tu respuesta.
- En el desarrollo de la operación A, _____ hay errores porque _____

 - En el desarrollo de la operación B, _____ hay errores porque _____

 - En el desarrollo de la operación C, _____ hay errores porque _____

- b) Corrige las operaciones que tengan errores.

$$A. \frac{m^6}{w^8} =$$

$$B. \frac{m^5}{m^3} =$$

$$C. \frac{m^4}{m^7} =$$

- Compara tus respuestas y tu tabla anterior con las de otro compañero. Lleguen a acuerdos en común.

Potencias negativas

Cuando el exponente de una potenciación es negativo, se puede escribir de la siguiente manera:

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

Por ejemplo, $\frac{5^3}{5^7} = 5^{3-7} = 5^{-4} = \frac{1}{5^4}$.

Existen varias formas de representar las potencias negativas por ejemplo:

$$\frac{r^8}{r^{10}} = \frac{1}{r^{10-8}} = \frac{1}{r^2} = r^{-2}$$

- Utiliza la información anterior para revisar tus respuestas de esta página.

Resuelvan en parejas.

2. Escriban seis ejercicios en cuyos procedimientos se apliquen las tres reglas siguientes.

$$1: \frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$$

$$2: a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

$$3: a^m \times a^n = a^{m+n}$$

- Intercambien sus ejercicios con otra pareja y revisen el uso correcto de las reglas.
- Intercambien sus respuestas con otra pareja y comprueben que el resultado corresponde con las opciones propuestas.

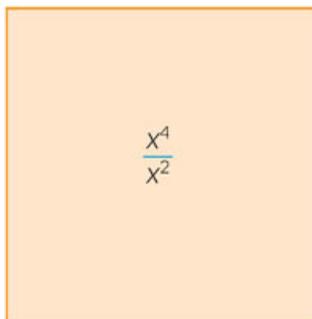
- De manera grupal compartan tres ejercicios al azar y elaboren conclusiones generales.

Sesión 2. Resuelve problemas que permiten generalizar las reglas para todas las potencias con exponente entero: $a^m \times a^n = a^{m+n}$, $\frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$

Relación entre potenciación y radicación

Resuelve.

- Analiza el cuadrado. La expresión representa su área.



- ¿Qué procedimiento te permite obtener la medida del lado del cuadrado? _____

- Obtén la medida del lado del cuadrado y asigna un valor a la variable para comprobar que cumple con las condiciones de la figura. ¿Cuál es la medida del lado del cuadrado?

- Compara tus respuestas con otro compañero y socialicen sus estrategias de solución.

Trabajen en parejas.

- Resuelvan las operaciones y contesten.

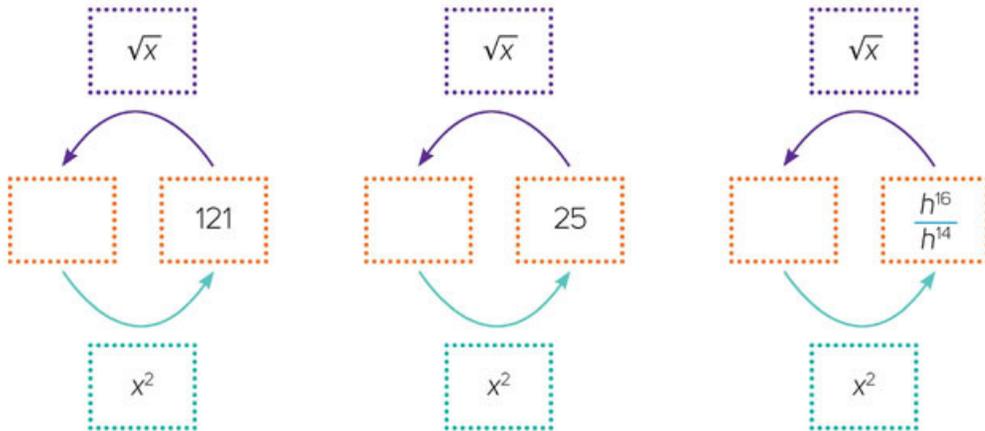
Operación	Resultado	Operación	Resultado
5^2		$\sqrt{25}$	
$(5)^2$		$\sqrt{(5)^2}$	
$(-5)^2$		$\sqrt{(-5)^2}$	
x^2		$\sqrt{x^2}$	

- ¿Qué ocurre con un número positivo elevado al cuadrado cuando se le aplica la raíz cuadrada? _____

- ¿Qué ocurre con un número negativo elevado al cuadrado cuando se le aplica la raíz cuadrada? _____

- Comprueben si esta relación es cierta o no para otros valores. Pueden usar su calculadora.

3. Completen los esquemas y comparen sus respuestas con las de otros compañeros. Las flechas indican la operación que debe realizarse.



- a) Usen su calculadora científica para realizar las operaciones.

Operación	Resultado
${}^2\sqrt{(16)^2}$	
${}^3\sqrt{(16)^3}$	
${}^4\sqrt{(16)^4}$	
${}^5\sqrt{(16)^5}$	
${}^6\sqrt{(w)^6}$	
${}^7\sqrt{(k)^7}$	
${}^8\sqrt{(p)^8}$	

- b) ¿Qué relación existe entre una potencia y su raíz? _____

Otras fuentes

Pon a prueba lo aprendido e interactúa con los ejercicios.

Entra en:

www.esant.mx/ecsema2-017.

En parejas, realicen lo que se pide.



1. Investiguen en qué contextos se usan las potencias o raíces y descríbanlos.

2. Apliquen la regla de potencias con exponente negativo y completen las expresiones.

a) $\frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} = 2^{-3}$

b) $\frac{1}{16} =$

c) $\frac{1}{64} =$

d) $\frac{q^4}{q^7} =$

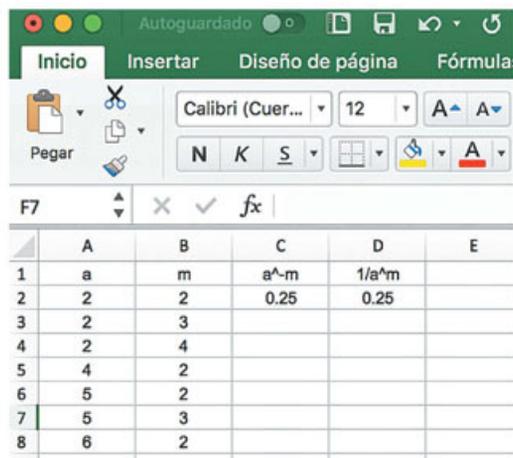
- Compartan sus resultados y estrategias de solución y lleguen a conclusiones generales.

Sesión 3. Resuelve problemas que expliciten la relación de la potenciación y la radicación como operaciones inversas considerando números enteros.

Potencias con exponente entero y productos y cocientes de potencias de la misma base

En esta sección aprenderás a calcular potencias con exponente entero, y productos y cocientes de potencias de la misma base.

1. Realiza de manera individual lo que se pide.



	A	B	C	D	E
1	a	m	a^m	$1/a^m$	
2	2	2	0.25	0.25	
3	2	3			
4	2	4			
5	4	2			
6	5	2			
7	5	3			
8	6	2			

- Abre una hoja de cálculo electrónica y copia la información que se muestra.
- En la celda C2 escribe " $=A2^B2$ " y presiona Enter. Haz clic en la esquina inferior derecha de esa celda y sin soltar el botón arrastra el cursor hasta la celda C8.
- Ahora, en la celda D2 escribe " $=1/A2^B2$ " y repite el procedimiento anterior para copiar la fórmula hasta la celda D8.

2. Contesta.

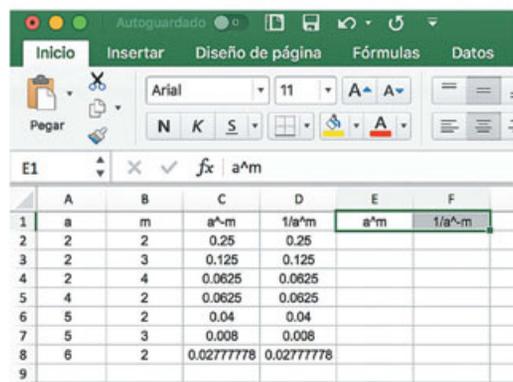
- ¿A qué operación corresponde el signo " $^$ " que se usa en la hoja de cálculo electrónica? _____
- ¿Por qué a partir de los resultados de las últimas dos columnas se puede afirmar que $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$? _____
- Expresa como un cociente las siguientes cantidades. Verifica tu respuesta con la hoja de cálculo electrónica.

• $3^{-2} =$ _____

• $4^{-4} =$ _____

• $5^{-2} =$ _____

• $2^{-5} =$ _____



	A	B	C	D	E	F
1	a	m	a^m	$1/a^m$	a^m	$1/a^m$
2	2	2	0.25	0.25		
3	2	3	0.125	0.125		
4	2	4	0.0625	0.0625		
5	4	2	0.0625	0.0625		
6	5	2	0.04	0.04		
7	5	3	0.008	0.008		
8	6	2	0.02777778	0.02777778		
9						

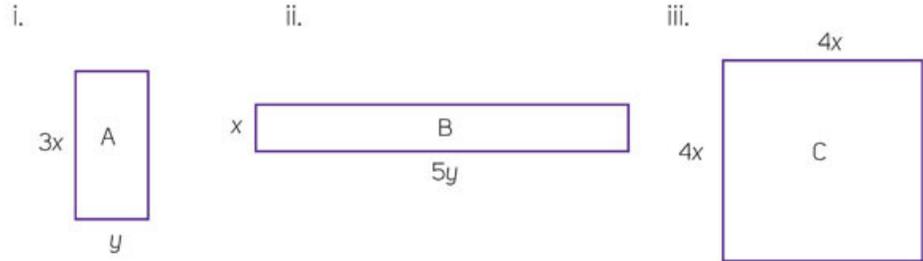
- ¿Por qué a partir de la igualdad $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ se puede afirmar que $a^m = \frac{1}{a^{-m}}$? _____
- Comprueba tu respuesta anterior agregando las dos columnas que se muestran en la imagen y escribiendo las fórmulas correspondientes.

Expresiones algebraicas: cálculo del perímetro



Lee la situación y contesta.

- El señor Gil va a comprar una malla ciclónica para cercar tres terrenos. Las medidas de los lados de los terrenos son las que se muestran.



- ¿Qué expresión algebraica representa el perímetro del terreno A? _____
- ¿Qué expresión algebraica representa el perímetro del terreno B? _____
- ¿Qué expresión algebraica representa el perímetro del terreno C? _____
- ¿Qué expresión algebraica representa el perímetro de los tres terrenos? _____
- Si $y = 8$ y $x = 5$, ¿cuántos metros de malla debe comprar el señor Gil? _____

- Compara tu procedimiento y tus resultados con los de otro compañero.



Resuelvan en parejas.

- En la tabla se indica la medida del lado de algunos cuadrados. Calculen el perímetro de cada cuadrado.

Medida del lado	x	$3x$	$5x$	$10x$
Perímetro				

- Validen con otra pareja sus procedimientos y sus resultados. Asignen valores a la variable y hallen la medida del perímetro de cada cuadrado.

Valor numérico de una expresión

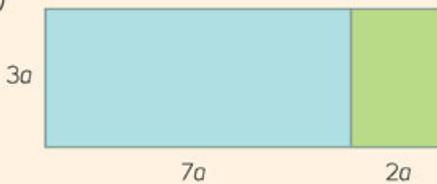
Valor que se obtiene cuando se reemplazan las literales de una expresión algebraica por números y se realizan las operaciones indicadas.

¿Cómo vamos?

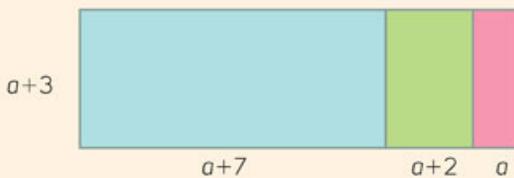
Haz lo que se pide.

1. Calcula el perímetro de cada figura compuesta.

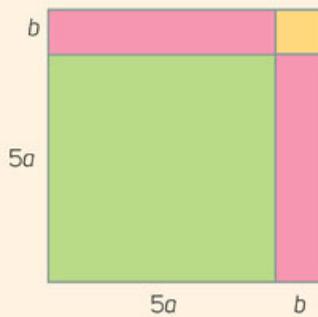
a)



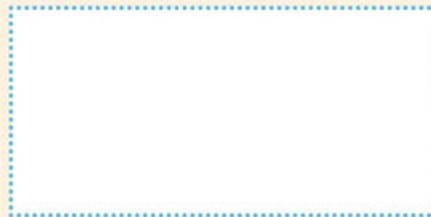
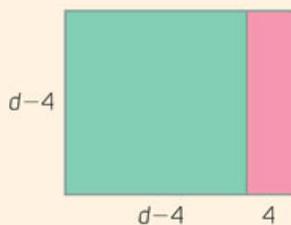
b)



c)



d)

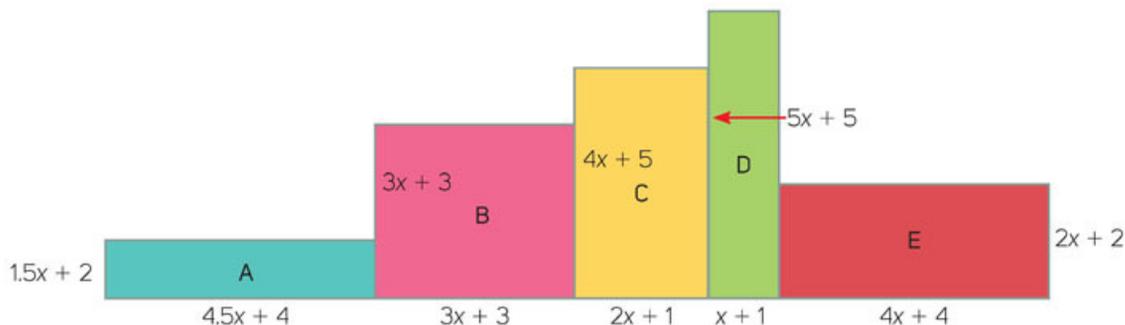


- Comenten con el resto del grupo sus resultados y sus estrategias de solución. Verifiquen sus expresiones. Si encuentran diferencias, lleguen a acuerdos.

Noción de equivalencia

Resuelvan en parejas.

- Las imágenes que se muestran representan la forma de varios edificios. Calculen el perímetro de cada una de ellas, completen la tabla y contesten.



Edificio	Perímetro		
A	$2(1.5x + 2) + 2(4.5x + 4)$	$3x + 4 + 9x + 8$	$12x + 12$
B			
C			
D			
E			

- ¿Qué pueden decir de los resultados? _____

- ¿Qué significa este resultado? _____

- ¿Cómo obtendrían la medida que le falta al edificio A para tener la misma altura del edificio B? _____ ¿Cuánto medirá? _____

- ¿Cuál es la diferencia de altura entre el edificio B y el C? _____

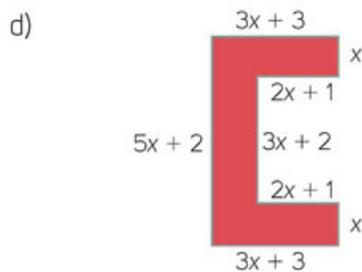
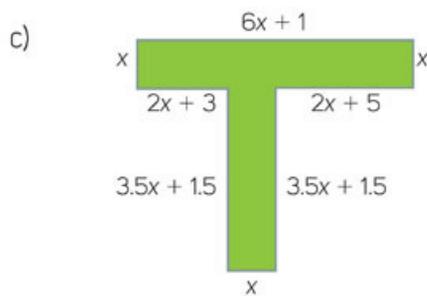
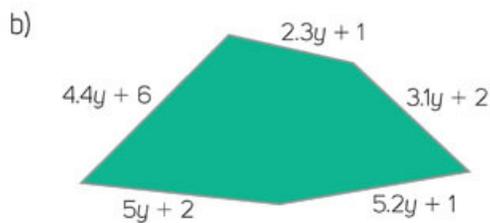
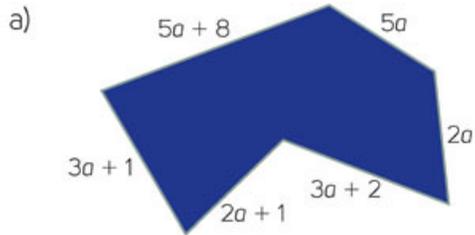
- ¿Y entre la figura C y la D? _____
- ¿Y entre la figura E y la D? _____

- ¿Cuál es el perímetro de todos los edificios juntos? _____

- Comenten sus respuestas con el resto del grupo.

Trabajen en parejas.

1. Obtengan las expresiones algebraicas que representan el perímetro de cada figura y contesten.



- e) ¿Cómo son los polígonos? _____
 f) ¿Tienen el mismo número de lados? _____
 g) ¿Cómo son sus medidas? _____
 h) Con los resultados obtenidos, ¿qué pueden concluir? _____

Otras fuentes

Asigna una variable a cada lado de la figura que aparece en: www.esant.mx/ecsema2-018 y calcula su perímetro.

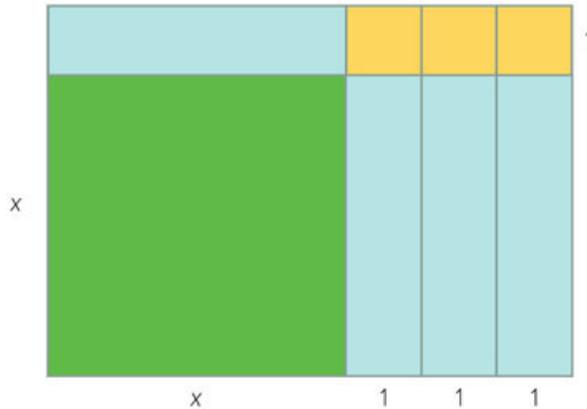
- Comparen sus respuestas con el resto del grupo. Revisen si hay otras maneras de representar el perímetro o si tus compañeros y tú coinciden con sus resultados.

Cálculo del área de figuras geométricas



Lee la situación y contesta.

- José quiere ampliar su granja para recomodar a sus animales. El terreno de la granja se representa en color verde. José necesita comprar los terrenos que aparecen en azul y en amarillo.



- ¿Qué forma tiene el terreno de José? _____
- ¿Qué forma tienen los terrenos que necesita comprar? _____

- Al comprar los terrenos, ¿qué forma tendrá la granja? _____
- ¿Conoces el valor de las medidas del terreno verde? _____
- De acuerdo con la imagen, ¿qué valores pueden tener las medidas del terreno total? _____
- ¿Cuál es el ancho del nuevo terreno? _____
- ¿Cuál será la medida del largo del terreno? _____
- Escribe una expresión algebraica que represente el área verde. _____
- Escribe una expresión algebraica que represente el área de cada rectángulo azul. _____
- Escribe una expresión algebraica que represente el área de cada área amarilla. _____

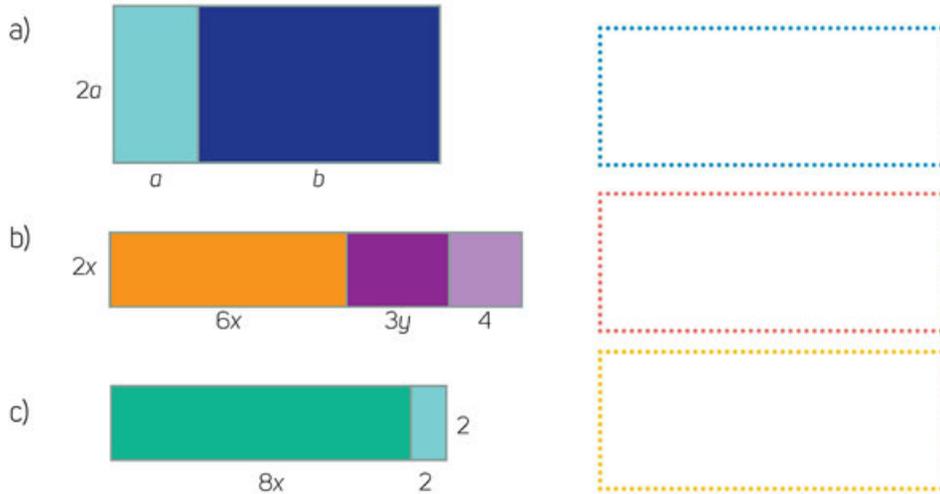
- Escribe la expresión algebraica que represente el área total del terreno. _____

- ¿De qué otra manera se puede representar el área total del terreno? _____

- Compara tu procedimiento y tus resultados con los de otro compañero. Validen en pareja y propongan otra forma de resolver el problema.

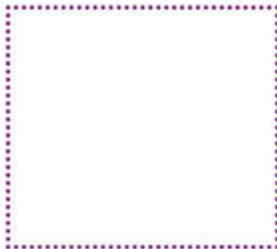
Trabajen en parejas.

1. Expresen algebraicamente, de dos formas distintas, el área de cada figura.



- Validen con otra pareja sus procedimientos y sus resultados.
2. Tomen como referencia la actividad del punto 1 y construyan el modelo geométrico que representa a cada una de las siguientes expresiones.

a) $2x(x + 4)$



b) $(x + 2)(x + 2)$



c) $x(x + y + 3)$



d) $(x + 3)(x + 1)$

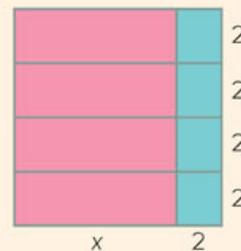


- Comparen sus modelos geométricos con los de sus demás compañeros y representenlos en el pizarrón con las indicaciones de su profesor.

¿Cómo vamos?

Resuelve.

1. Calcula el área de la figura.

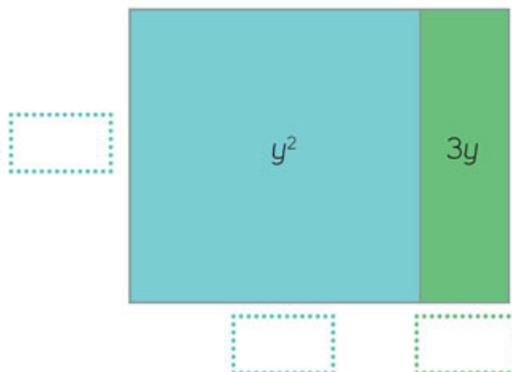


- Valida con otra pareja tus procedimientos y resultados.

Equivalencia en transformaciones algebraicas

Haz lo que se pide.

1. Escribe en cada recuadro el término faltante.



- a) ¿Cómo obtuviste los términos faltantes de la figura azul? _____

 - b) ¿Y el de la figura verde? _____
 - c) ¿Cuál es el área total de la figura? _____
2. Representa geoméricamente, y de tres formas distintas, la expresión $16x^2 + 12x$.



- Compara tus modelos geoméricos con los del resto del grupo y vean de cuántas maneras se pueden representar y si coincidieron en alguno.

Expresiones equivalentes

Dos o más expresiones algebraicas **son equivalentes** si representan la misma cantidad, es decir, si tienen el mismo valor numérico. Para verificarlo, basta elegir un valor y sustituirlo en la expresión.

Una expresión también es equivalente cuando se realiza una transformación algebraica, al reducir o agrupar términos semejantes. Por ejemplo, en la igualdad: $4x + 3 = y$, los valores en ambos lados de la igualdad ($=$), deben ser iguales y se pueden determinar a través de diferentes procedimientos.

Trabajen en parejas.

- Una franja rectangular cuyo largo es 2 m más que su ancho se amplía agregando a cada lado 3 m. Representen geoméricamente la situación.



- Obtengan la expresión algebraica que representa el área de la figura final.
- Si al comparar la figura con otros dos compañeros, las representaciones geométricas no son iguales, ¿quién hizo la representación correcta? Para saberlo, realicen lo siguiente.
 - Asignen un valor a x , luego sustitúyanlo en las expresiones que se muestran.

Expresión 1	Expresión 2	Expresión 3
$A = (x + 5)(x + 3)$	$A = x^2 + 8x + 15$	$A = x(x + 3) + 5(x + 3)$

- ¿Cómo son los resultados? _____ ¿Por qué? _____

- Completen de modo que las igualdades sean correctas.

- $3(b + \underline{\quad}) = 3b + 15$
- $a(\underline{\quad} + 2) = 5a + \underline{\quad}$
- $x(10 - \underline{\quad}) = 10x - 7\underline{\quad}$
- $6(\underline{\quad} - 5) = 42 - \underline{\quad}$
- $36 + \underline{\quad} = 9(4 + w)$
- $16 - 8 = 2(\underline{\quad} - \underline{\quad})$

- Compartan sus respuestas con el resto del grupo y lleguen a conclusiones generales.



Otras fuentes

Analiza la información que se presenta en el siguiente vínculo e interactúa con las actividades propuestas de la primera ronda: www.esant.mx/ecsema2-019.

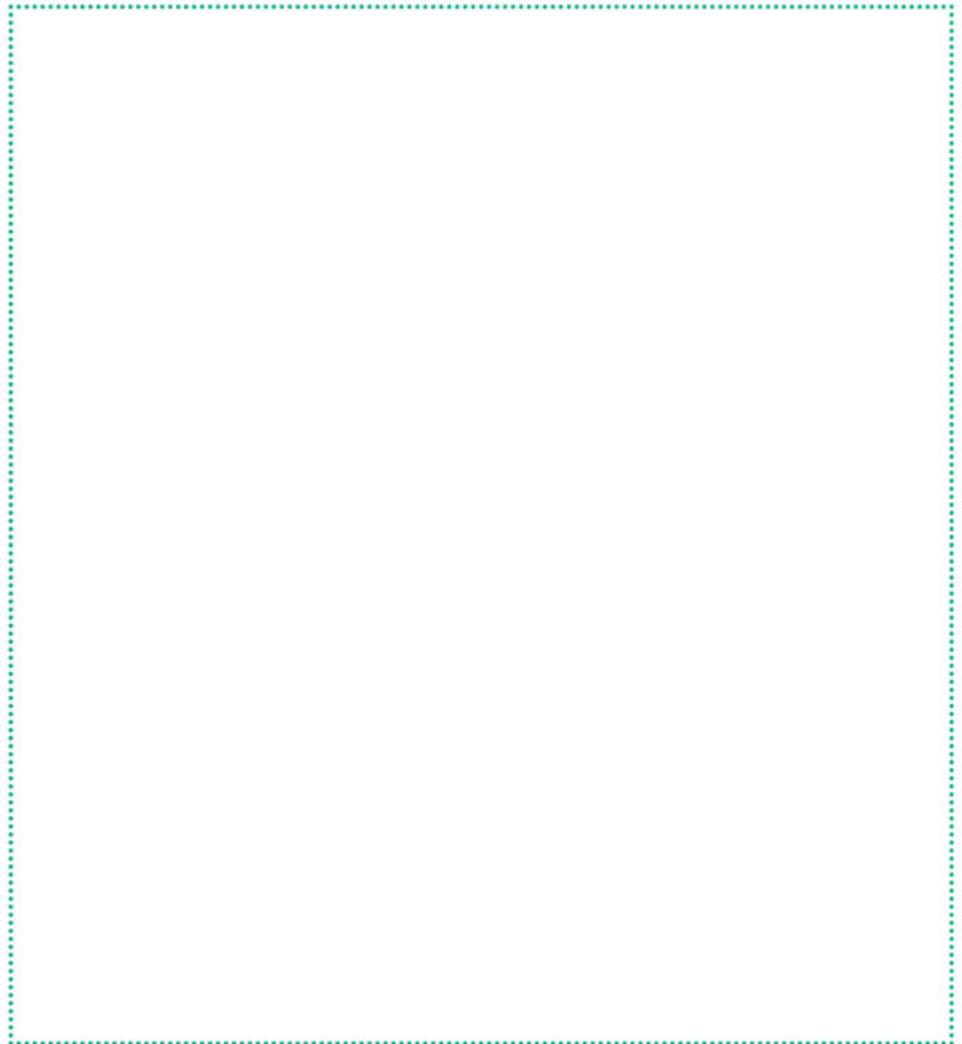
Construcción de polígonos regulares



Analiza la situación y haz lo que se pide.



1. Una empresa quiere rediseñar su logotipo y necesita conservar su forma, pero aumentar el tamaño de sus lados. El logotipo de la empresa es el que se muestra a la izquierda, y quiere que cada lado del nuevo logotipo mida 6 cm.
 - a) Traza el polígono con la medida solicitada por la empresa. Posteriormente usa colores para hacer un diseño diferente.



b) ¿Qué pasos seguiste para trazar el polígono con la medida solicitada? _____

- Compara tu diseño y tus estrategias de solución con las de otro compañero. Corrobores que tengan las medidas indicadas.

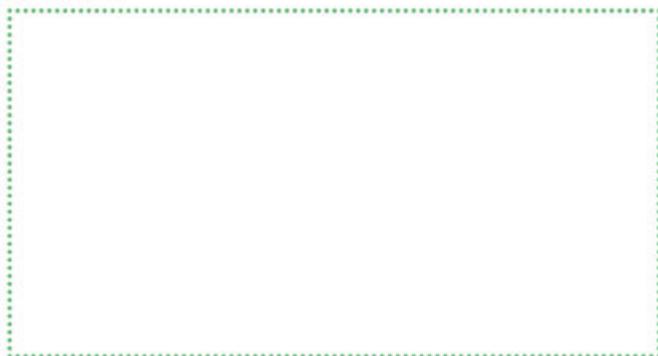
Reúnete con un compañero y hagan lo que se solicita.

1. Tracen los polígonos tomando como referencia las condiciones dadas.

a) Un octágono regular de 3.7 cm de **apotema**.



b) Un polígono regular en el cual se pueden trazar solo 3 diagonales a partir de uno de sus vértices.



c) Un polígono de 10 lados de 1.8 cm cada lado.



Glosario

apotema.

Perpendicular entre el centro de un polígono regular y cualquiera de sus lados.

- Compara tus trazos con los de otro compañero y corroboren que sus polígonos cumplen con las condiciones dadas.

Congruentes o a escala

Lee la situación y haz lo que se pide.

- Otra empresa quiere rediseñar los colores de su logotipo sin cambiar su forma hexagonal y conservando el espacio en blanco del centro.
 - Traza a la derecha un logotipo con las mismas medidas, pero con la distribución y los colores que tú elijas.



- Debido a la apertura de una nueva sucursal, la empresa pedirá uniformes para los empleados. El logotipo de los uniformes tendrá el doble de tamaño que el original con respecto a la medida de sus lados. Dibuja el nuevo logotipo con las condiciones que se solicitan.



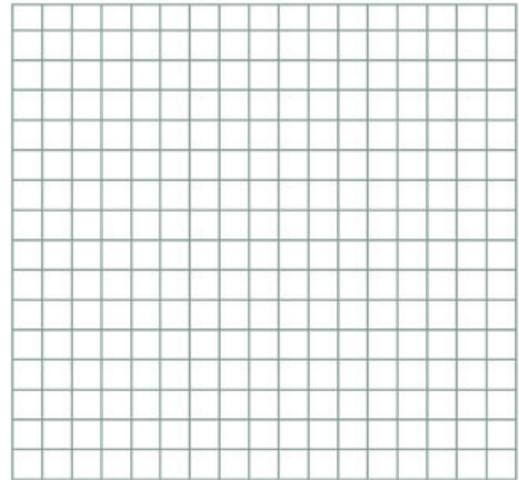
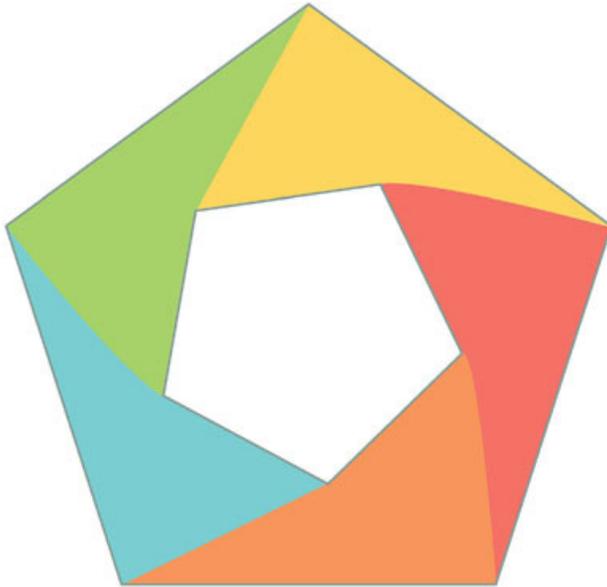
- Si consideramos la región con colores como Figura 1 y el espacio en blanco como Figura 2, ¿qué tomaste en cuenta para trazar los lados de la Figura 1? _____

 - ¿Y para trazar la Figura 2? _____

- Comparte tus trazos con otro compañero. ¿Cómo comprobarían que las medidas de los lados del nuevo logotipo miden lo doble y la distancia entre la figura 1 y 2 es proporcional?

Trabajen en parejas.

3. Determinen los pasos necesarios para reducir a la tercera parte el tamaño del logotipo de la izquierda, tomando como referencia la medida de sus lados. Tracen a la derecha el logotipo con las condiciones que se piden y con un nuevo diseño de colores.

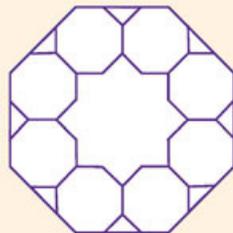


- ¿Qué tomaron en cuenta para determinar la medida de los lados del nuevo logotipo? _____
- ¿Cómo pueden comprobar que la nueva figura es proporcional a la original? _____
- ¿Cuál es el perímetro de la figura original? _____ ¿Cuál es el perímetro de la nueva figura? _____

- Comenten con qué procedimientos y estrategias trazaron la figura.

¿Cómo vamos?

- Traza en tu cuaderno el doble de la figura que se muestra con respecto a la medida de sus lados.



- Comenta con un compañero tu trazo, tus procedimientos y tus estrategias para trazar figuras iguales, más grandes o más pequeñas. Lleguen a acuerdos.

Construir figuras

Sigue las instrucciones y haz lo que se pide.

1. Traza una figura de acuerdo con las siguientes condiciones.
 - i. A partir de un punto A , traza un segmento de recta de 5.8 cm. Llama B al otro extremo del segmento.
 - ii. Usa tu transportador, y a partir del punto B , marca un ángulo de 75° con respecto al punto A .
 - iii. Traza un segmento de recta de 3 cm.
 - iv. Al final del segmento trazado, marca un ángulo de 150° con respecto al segmento trazado. Traza nuevamente un segmento de 3 cm.
 - v. Continúa trazando segmentos con las condiciones dadas hasta que regreses al punto B .



- a) ¿Cuántos lados tiene la figura que trazaste? _____
- b) ¿Hay alguna figura diferente a la que trazaste? _____

- Compara tu figura con las de otros compañeros. Si hay una figura diferente, investiguen en qué paso hicieron las cosas de manera distinta.

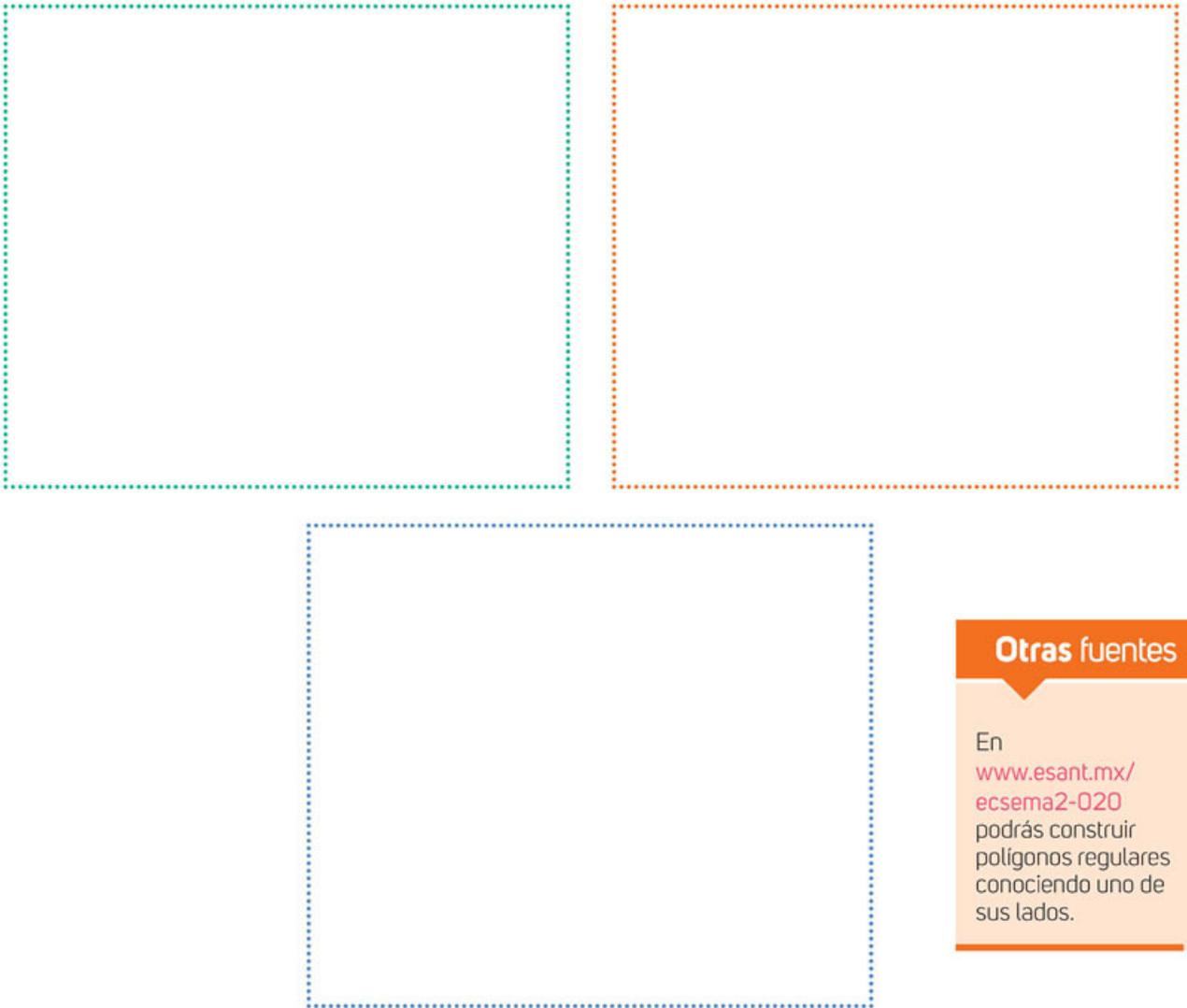
Trazar polígonos

Los **polígonos** se forman a partir de diferentes condiciones dadas: lados, apotema, alturas, radios, etcétera. Para trazar algunos de ellos es suficiente conocer algunos de los datos mencionados.

En equipos de tres, trabajen lo que se propone.



1. Cada uno elija un recuadro distinto y trace en él un polígono sin que los otros integrantes lo vean.
2. Dicten las instrucciones que usaron al trazar sus polígonos para que los otros dos integrantes puedan trazarlo también. La actividad se repetirá hasta que todos hayan dictado sus instrucciones y trazado los tres polígonos.



Otras fuentes

En www.esant.mx/ecsema2-020 podrás construir polígonos regulares conociendo uno de sus lados.

- Comparen sus trazos y verifiquen que todos siguieron las instrucciones dadas. Socialicen en grupo sus experiencias.

Figuras que cubren el plano (propiedades de polígonos)



Realiza lo siguiente.

1. Observa las figuras y contesta.

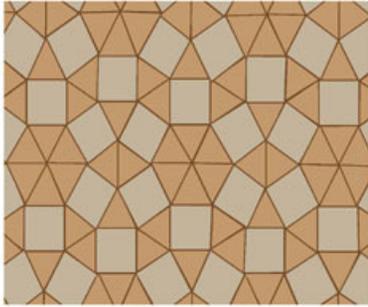


Figura 1

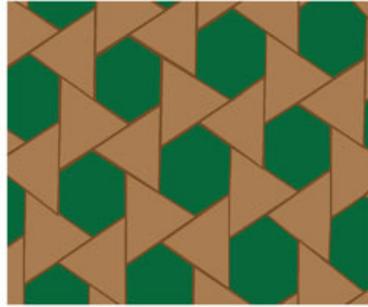


Figura 2

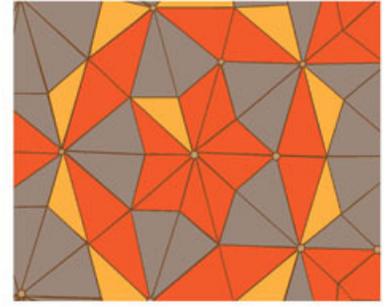


Figura 3

- a) ¿Qué tienen en común las tres figuras? _____
- b) ¿Qué diferencias existen entre las tres figuras? _____
- c) ¿Hay espacio entre los polígonos que se forman en cada figura? _____
- d) ¿Todos los polígonos de las figuras son regulares? _____

- Comparte tus respuestas con el grupo.

Cubriendo el plano



Trabajen en parejas.

1. Observen las dos imágenes que se muestran. Determina a cuál de las figuras anteriores pertenecen.

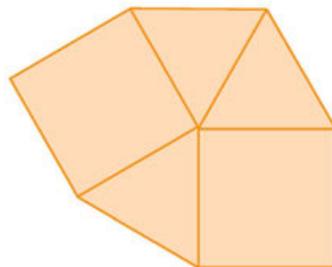


Figura : _____

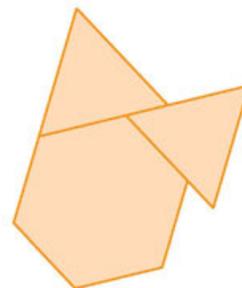
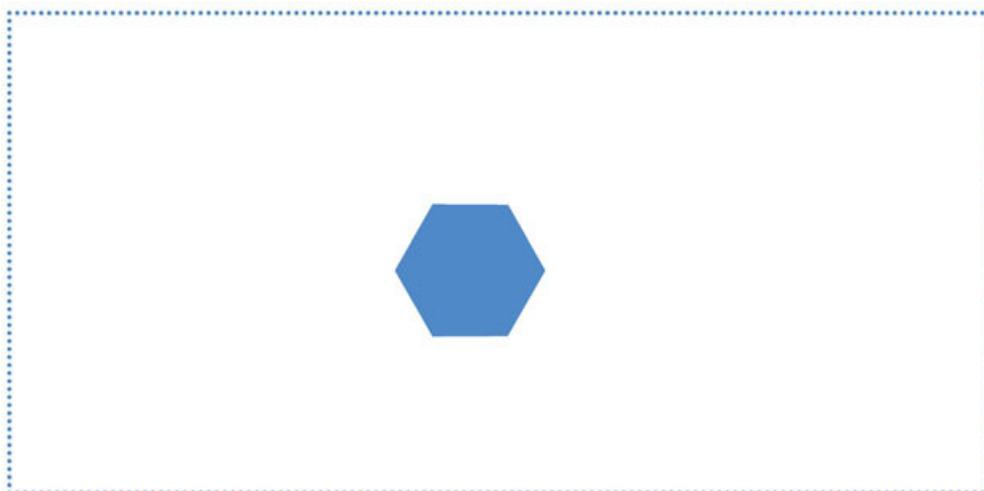
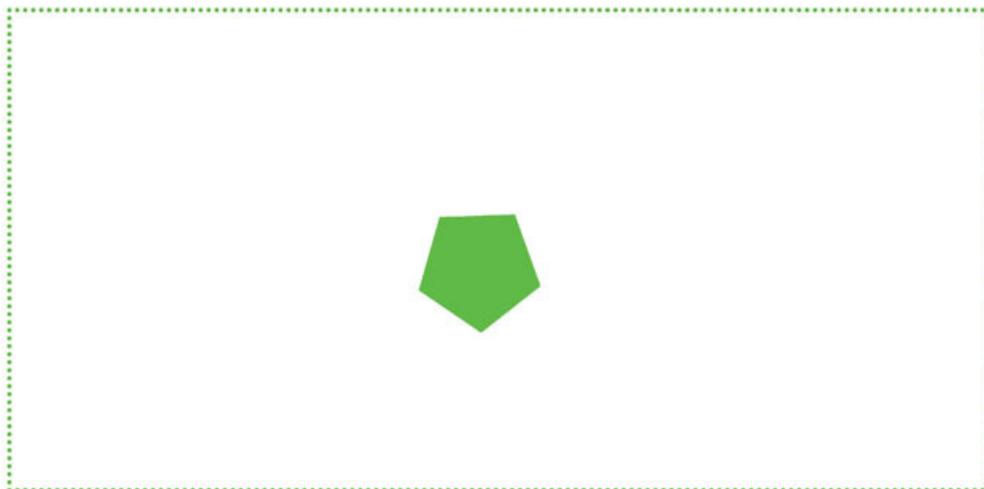


Figura: _____

- a) Tomen las medidas que consideren necesarias y escriban las relaciones que puedan identificar en el punto donde se unen la mayoría de los vértices. Compartan sus hallazgos con el resto del grupo y complementen sus notas.

2. Calquen en cartulina las figuras que se muestran. En cada recuadro, usen la figura que aparece en ella para cubrir la región limitada, colóquenla de manera tal que compartan un lado y que no se encimen. Cuando lleguen a las orillas tracen la porción de la figura que se alcanza a formar y que no salga del límite. Usen lápiz por si tienen que corregir.

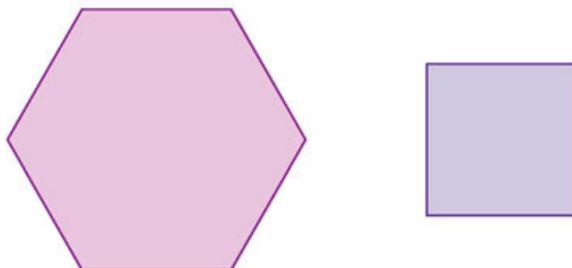


- ¿Qué ocurrió en el primer caso en que usaste pentágonos para cubrir la región limitada por el recuadro verde? _____
 - ¿Qué ocurrió en el segundo caso en que usaste hexágonos para cubrir la región limitada por el recuadro azul? _____
 - Tomen las medidas de aquellos ángulos que coinciden en un solo vértice. ¿Cuánto suman esos ángulos? _____
 - ¿Qué similitudes identifican con las medidas tomadas en la actividad 1 al final de la página anterior? _____
- Borren los trazos hechos en el recuadro verde y usen otros polígonos para cubrir el plano y que la suma de la medida de sus ángulos sea 360° . Coloreen los planos como lo deseen.

Teselados con polígonos regulares

Haz lo que se pide.

- Calca y recorta los polígonos que se muestran. En tu cuaderno intenta cubrir el plano usando un polígono a la vez y después usando ambos polígonos.



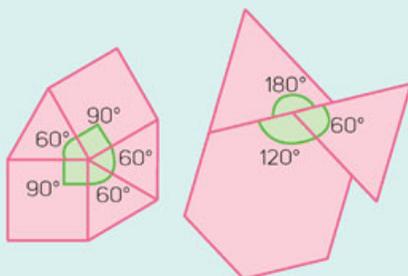
- ¿Fue posible cubrir todo el plano usando el hexágono? _____
- ¿Fue posible cubrir todo el plano usando el cuadrado? _____
- ¿Fue posible cubrir todo el plano usando ambos polígonos? _____
- ¿Qué condiciones se deben cumplir para que los polígonos puedan cubrir un plano? _____
- ¿Con cualquier polígono regular es posible formar un teselado? ¿Por qué? _____

- ¿Es necesario hacer coincidir los vértices de los polígonos? ¿Por qué? _____

- Comenta con el grupo tus respuestas y registren sus conclusiones.

Teselado

Un **teselado** es un patrón de figuras que cubre una superficie plana y cumple con dos requisitos: no dejar hueco entre ellas y que no se superpongan las figuras. En un teselado, la suma de todos los ángulos de los polígonos que coinciden con un vértice es 360° .



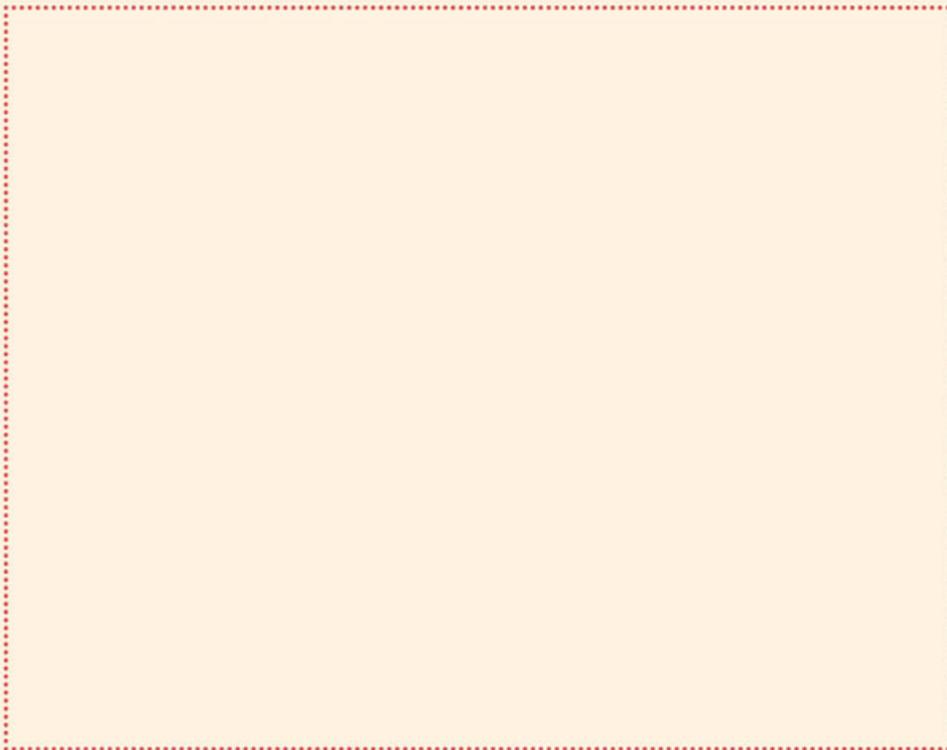
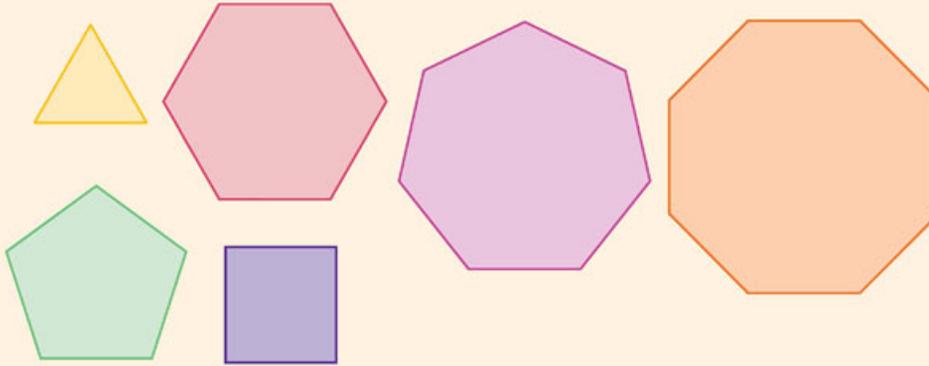
Los polígonos regulares con los que es posible formar un teselado son los triángulos equiláteros, los cuadrados y los hexágonos, ya que son los únicos que al unirse en un mismo vértice suman 360° . A estos teselados se les conoce como **teselados regulares**.

También es posible hacer un arreglo de los polígonos para conseguir esta medida.

¿Cómo vamos?

Haz lo que se pide.

1. Calca y recorta los siguientes polígonos regulares. Usa al menos tres de ellos para cubrir el plano.



- a) ¿Con qué polígonos cubriste el plano? _____
- b) ¿Qué características tienen esos polígonos? _____

- Comparte tus diseños con el resto del grupo y compara las figuras que ellos usaron y cómo las distribuyeron en el plano.

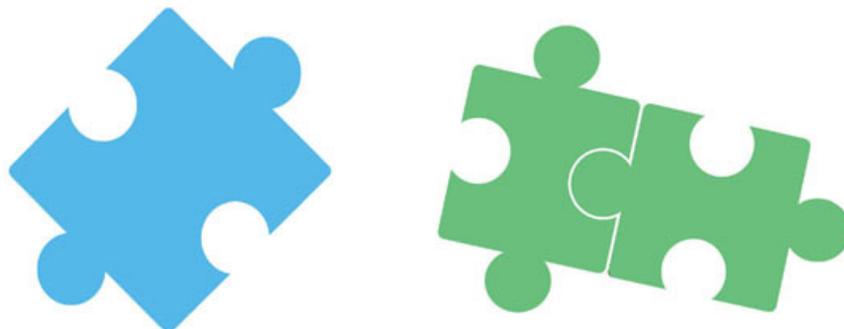
Aprendo mejor

Elabora una bitácora en la que describas los procedimientos que utilizaste para resolver distintos problemas. Esta actividad te ayudará a reforzar lo que has aprendido en clase al tiempo que reflexionas sobre cómo aprendiste y cómo sistematizas tus estrategias de solución.

Teselados con polígonos irregulares

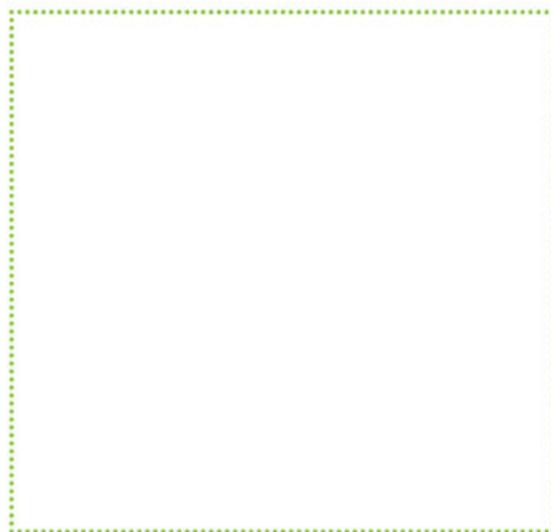
Reúnanse en parejas y resuelvan lo que se pide.

1. Observen la imagen y contesten.



- a) ¿Qué forma tiene la primera pieza? _____
¿Es posible cubrir con ella el plano? _____
- b) ¿Qué pasos consideras que siguieron los diseñadores para crear la primera pieza del rompecabezas? _____

2. Expongan sus ideas en grupo sobre la manera en que se diseñaron las piezas del rompecabezas. En el recuadro rojo construyan una pieza diferente a las anteriores con la cual puedan cubrir el plano y en el recuadro verde comprueben que cubre la superficie limitada.

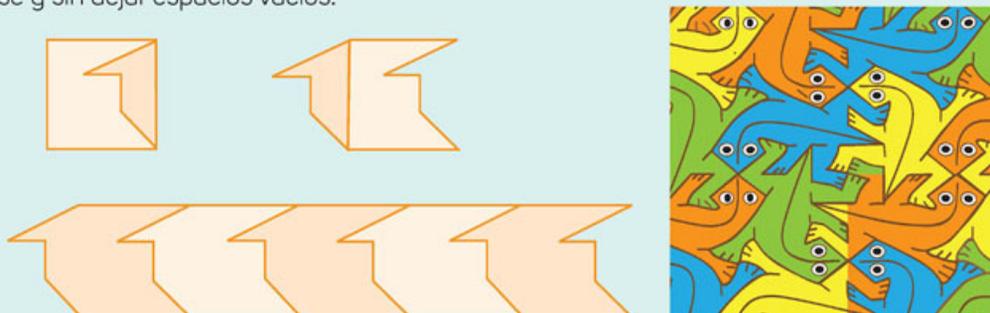


- a) ¿Cubrieron el plano con su pieza? _____ ¿A qué se debe lo anterior? _____

- Muestren el resultado de su trabajo al grupo.

Teselados irregulares

A los teselados formados por polígonos regulares e irregulares se les llama **teselados irregulares** y al igual que las otras teselaciones, cubren toda la superficie sin superponerse y sin dejar espacios vacíos.



Existen teselados más creativos en los que incluso se diseñan otras figuras, como el que se muestra en la derecha de los polígonos.

Trabajen en parejas.

1. Diseñen un teselado irregular. Pueden usar los polígonos irregulares, así como los polígonos que se muestran, con las medidas y colores que deseen. Cubran la región limitada del recuadro.

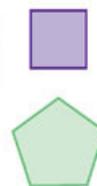
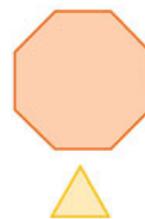
Después pueden elaborar teselados en cartulinas y exponerlos en la escuela, afuera de su salón o en alguna área que el profesor determine.



- a) ¿Por qué es posible cubrir el plano con las piezas elegidas? _____
- b) ¿Qué propiedad se debe conservar para formar teselados con polígonos regulares e irregulares? _____

- De manera grupal, lleguen a conclusiones generales.

¿Qué aprendimos?



Otras fuentes

Analiza el teselado que se presenta en el siguiente vínculo y escribe en tu cuaderno cómo se generó:

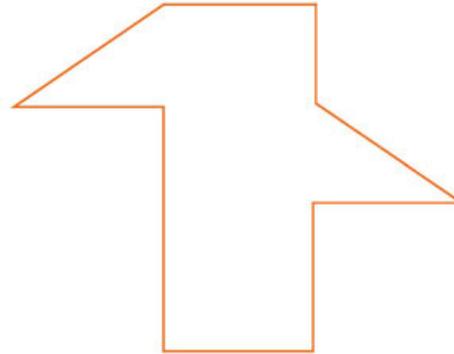
www.esant.mx/ecsema2-021

Áreas de polígonos



Resuelve.

1. Analiza la figura y contesta.



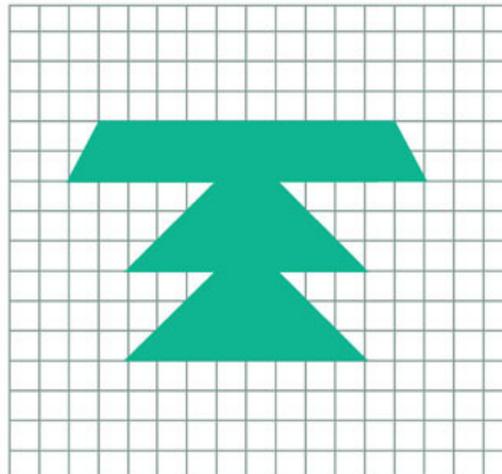
- a) ¿Puedes usar alguna de las fórmulas que conoces para calcular el área de la figura? Argumenta tu respuesta. _____
- b) Si respondiste que no, ¿qué procedimiento aplicarías para obtener el área total de la figura? _____
- c) Usa tu procedimiento para determinar algebraicamente el área de la figura. _____
- d) Asigna valores a los lados de la figura y comprueba si tu procedimiento es correcto o no.

- Compara tus estrategias de solución con las de otro compañero de tu grupo.

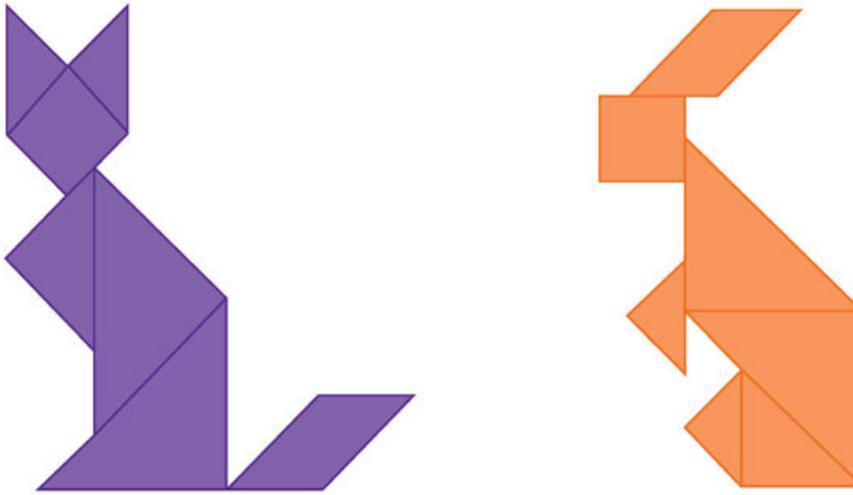


Reúnete con un compañero y hagan lo que se pide.

1. Determinen una estrategia para calcular el área de la figura. Obtengan su área y comenten sus resultados y estrategias con el grupo.



2. Usen al menos dos estrategias para calcular el área de las figuras.



- a) ¿Qué estrategias aplicaron para encontrar el área de las figuras? _____

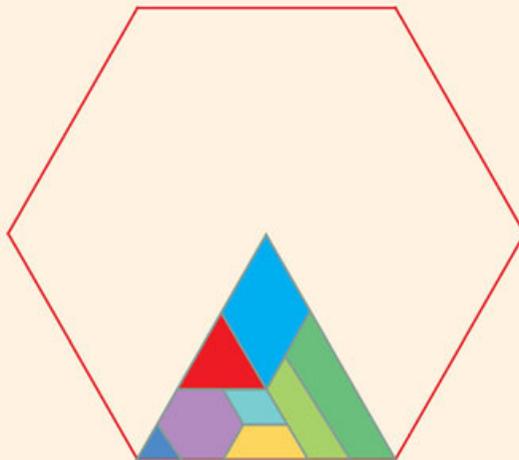
- b) ¿Cuál es el área de la figura morada? _____
- c) ¿Cuál es el área de la figura anaranjada? _____

- Comparen sus resultados con el resto del grupo. Si existen diferencias, averigüen las razones.

¿Cómo vamos?

Haz lo que se pide.

1. Si el área del triángulo más pequeño de color azul es de 3 cm^2 y este cabe 36 veces en el triángulo grande, ¿cuál es el área del hexágono más grande?

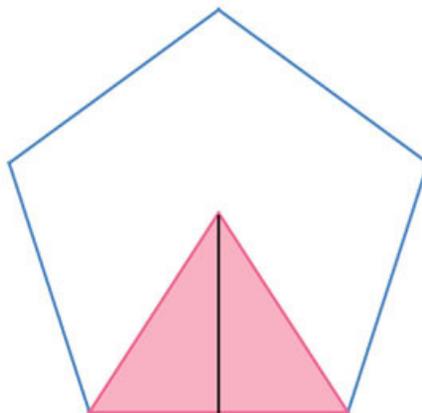


- Comparen sus respuestas con los de otros compañeros y juntos lleguen a acuerdos.

Descomponiendo en triángulos

Haz lo que se pide.

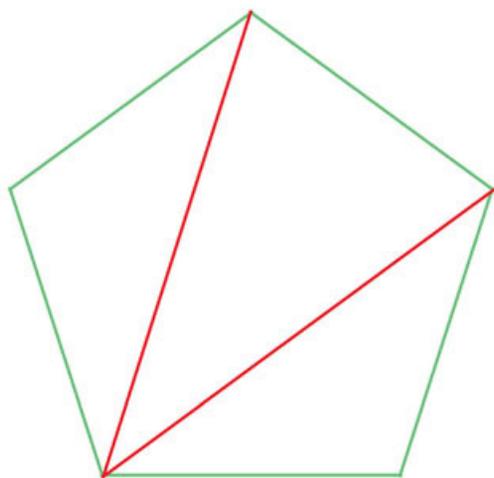
1. Observa la imagen y contesta.



- a) Si la altura del triángulo es igual a x y su base es y , ¿qué procedimiento te permite calcular el área del pentágono? _____

- b) ¿Qué fórmula te permitiría encontrar el área del pentágono? _____
- c) Escribe otra fórmula que te permite calcular el área del pentágono. _____

- d) ¿Cuál es el área del pentágono? _____
- e) Si las medidas son $x = 1.38$ y $y = 2$, ¿cuál es el área del pentágono? _____
- f) ¿Cuál es la fórmula para calcular el área de un pentágono regular? _____



2. Si el pentágono se divide como se muestra en la imagen de la izquierda, ¿qué datos necesitas para calcular el área del pentágono a partir de los triángulos?

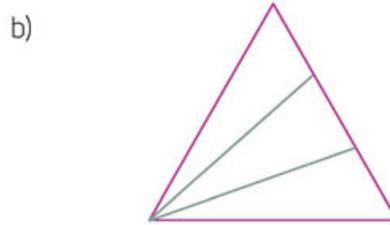
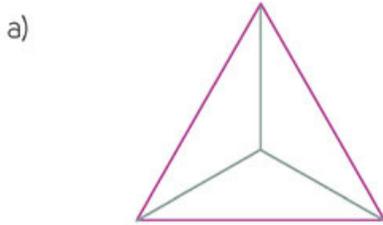
- a) ¿De qué otra forma puedes dividir el pentágono para calcular su área? _____

- b) ¿Cuál de las dos divisiones sirve más para calcular el área de cualquier pentágono? ¿Por qué? _____

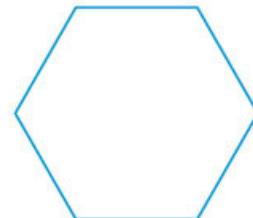
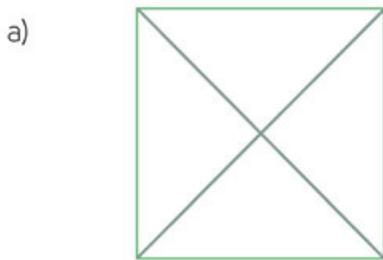
- Compara tus estrategias y tus respuestas con las de otro compañero y compartan sus argumentos. Propongan otras divisiones que puedan hacer dentro del pentágono para calcular su área y determinen cuál de todas es más eficiente.

3. En cada par de figuras, determina los datos que necesitas conocer para calcular su área. Toma como referencia únicamente los triángulos.

Asigna una variable a cada medida que necesitas conocer y anótalas en las figuras. Escribe en cada recuadro la fórmula con la cual obtienes el área de cada figura.



4. Reúnete con un compañero y propongan una división en triángulos para la segunda figura, distinta a la primera división. Tomen como referencia los triángulos trazados y calculen el área de los polígonos.



- Compara tus respuestas con las del resto del grupo y observa qué tipo de divisiones hicieron para la segunda figura y qué fórmulas encontraron. En el pizarrón listen las fórmulas y comprueben que obtienen correctamente el área con ellas.

Sesión 2. Descompones un polígono regular en triángulos para calcular su área. Estableces expresiones algebraicas equivalentes al área de un polígono regular.

Descomposición triangular. Significado de la fórmula $A = \frac{P\alpha}{2}$

Haz lo que se pide.

- Resalta con un color la base del triángulo que se encuentra dentro del pentágono y asígnale una variable. Haz lo mismo con la altura del triángulo.

Figura 1

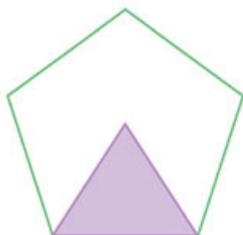
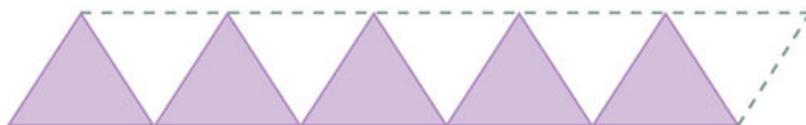


Figura 2



- ¿Qué variable usaste para la base? _____ ¿Y para la altura? _____
- ¿Qué representa la figura 2? _____

- Remarca en la figura 2, la base y la altura de los triángulos.

- Al marcar con líneas punteadas la figura 2, como se muestra en la imagen, ¿qué figura se forma? _____
- ¿Qué fórmula te permite calcular el área del pentágono tomando como base los triángulos que se forman dentro de él? _____
- ¿Qué fórmula te permite calcular el área de la figura 2? _____

- ¿Qué diferencias hay entre las fórmulas? Argumenta tu respuesta. _____

- En la figura 1, toma como centro el vértice que representa el punto más alto de la altura del triángulo. Abre tu compás hasta uno de los vértices del pentágono y traza un círculo.

- ¿El círculo toca todos los vértices del pentágono? _____
- ¿Qué representa la altura del triángulo en el pentágono? _____
- Escribe la fórmula que te permite calcular el área de un pentágono. _____

- Asigna valores a las medidas que necesitas para calcular el área del pentágono usando las tres fórmulas encontradas. ¿Qué diferencia hay entre las tres fórmulas?

Perímetro por apotema entre dos

La fórmula para calcular el área de cualquier polígono regular es $A = \frac{Pa}{2}$ "perímetro por apotema entre dos". La literal p representa el perímetro y a , la apotema, ya que representa el área de los triángulos que se forman dentro del polígono al desdoblarlos.



En equipos, resuelvan.

- Asignen valores a las medidas de cada figura. Para los paralelogramos, tomen en cuenta el complemento con la línea punteada.

a)

Perímetro del triángulo:
 Apotema del triángulo:
 Área:
 Base del paralelogramo:
 Altura del paralelogramo:
 Área:

b)

Perímetro del cuadrado:
 Apotema del cuadrado:
 Área:
 Base del paralelogramo:
 Altura del paralelogramo:
 Área:

c)

Perímetro del hexágono:
 Apotema del hexágono:
 Área:
 Base del paralelogramo:
 Altura del paralelogramo:
 Área:

Otras fuentes

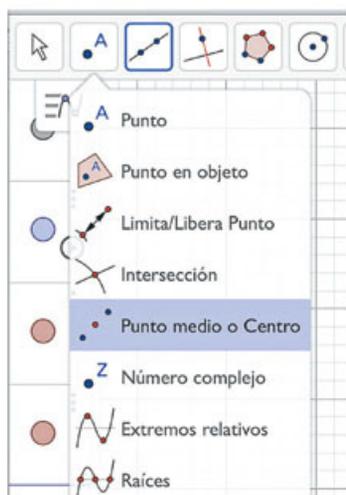
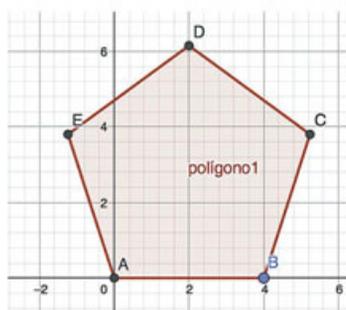
Entra en www.esant.mx/ecsema2-022 y ve el video. Con la información que se proporciona en ella, complementarás lo aprendido en la secuencia.

- Compara tus respuestas con el resto del grupo. Lleguen a conclusiones generales.

Área de polígonos

En esta sección comprenderás la fórmula para calcular el área de polígonos con apoyo de GeoGebra.

1. De manera individual, realiza lo que se pide.



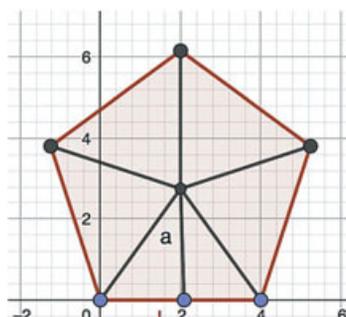
- Visita la página www.geogebra.org/classic.
- Selecciona la herramienta Polígono regular.
- Haz clic en el origen del plano (0, 0) y luego en el punto (4, 0). Se abrirá una ventana para introducir el número de vértices que tendrá el polígono regular; escribe "5" y presiona OK.
- Ahora, en la pestaña Punto, selecciona la herramienta Medio o centro y haz clic sobre el pentágono que trazaste (de ese modo aparecerá el centro del polígono).
- Elige la herramienta Segmento y divide el polígono en triángulos, partiendo desde el centro hasta cada uno de sus vértices: selecciona el punto F y luego el punto A, y repite este proceso para obtener los segmentos FB, FC, FD y FE. Usa de nuevo la herramienta Segmento, pero ahora para trazar la altura del triángulo inferior del polígono. Selecciona el punto F y luego el lado opuesto al punto. El segmento será perpendicular a dicho lado.
- En el margen izquierdo, haz clic sobre los puntos y segmentos que has trazado y desactiva la casilla Etiqueta visible para quitar las letras que aparecen.

Después, con la herramienta Texto, nombra la altura del triángulo como " a " y el lado inferior del polígono, como " l ".

2. Responde lo siguiente.

a) ¿En cuántos triángulos se dividió el polígono y cómo son estos entre sí? _____

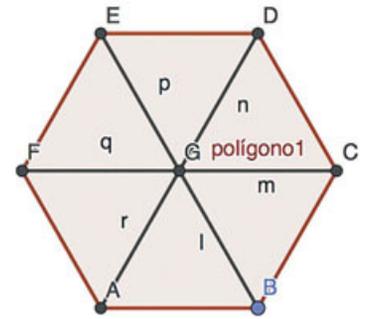
b) Expresa el área del triángulo inferior usando las literales a y l . _____



- De acuerdo con el resultado anterior, ¿cómo se expresa el área del polígono regular? _____
- Expresa ahora el área del polígono según su perímetro y su apotema. Recuerda que la apotema de un polígono regular es la distancia del centro a uno de los lados. _____

3. Haz lo siguiente.

- En una nueva ventana, repite los pasos de la actividad anterior para un hexágono, un heptágono y un octágono regulares, todos con un lado de 4 unidades de longitud. Después de trazar los polígonos, puedes desactivar los ejes y la cuadrícula para que las figuras se vean como se muestra.
- Traza la altura del triángulo inferior de cada polígono. Luego agrega textos para nombrar "a" a esa altura y "l" al lado inferior del polígono.



4. Contesta.

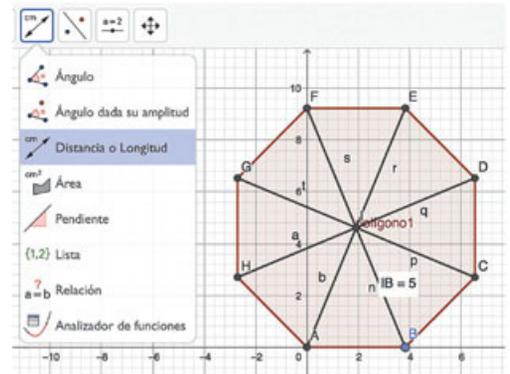
- Expresa el área de los tres polígonos con las literales a y l . _____

- ¿Qué diferencias o similitudes hay entre la fórmula de la actividad anterior y las que acabas de escribir? _____

- A partir de tus conclusiones, escribe la fórmula general para calcular el área de un polígono de n lados. _____

5. Comprueba tus resultados siguiendo estos pasos.

- Haz clic en la herramienta Distancia o Longitud y mide la apotema de cada polígono y la medida de un lado.
- Usa la expresión para calcular en tu cuaderno el área de los polígonos.
- Elige la herramienta Área y haz clic sobre los polígonos para comprobar tus respuestas.



6. Contesta.

- ¿Cuál es la altura de un triángulo del hexágono regular? _____
- ¿Y cuál es el área de ese triángulo? _____
- Con los datos anteriores, calcula el área del hexágono con la fórmula general. _____
- ¿Cuál es el área de ese polígono según la herramienta Área? _____
- ¿Las dos respuestas anteriores son iguales? Explica. _____

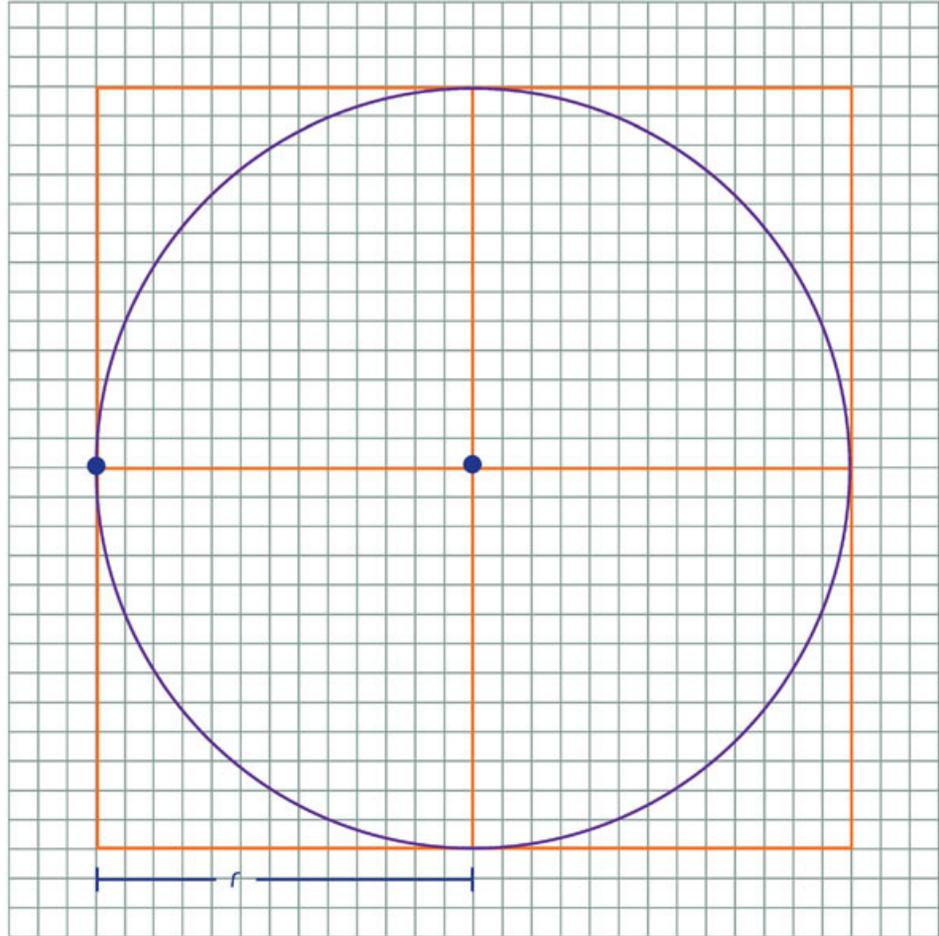
- Verifica que tu construcción sea correcta. Compara tus resultados con los de tus compañeros. Corrige si lo consideras necesario.

Área del círculo



Analicen en parejas la situación que se presenta y respondan.

1. En la imagen se muestran cuatro cuadrados unidos por un vértice formando un cuadrado mayor. Dentro de ese cuadrado mayor hay una circunferencia.



- a) Si el lado de un cuadrado pequeño mide r unidades, ¿cómo se representa su área? _____
 - b) ¿Cuántas veces cabe el cuadrado dentro de la circunferencia? _____

 - c) ¿Qué procedimiento siguieron para responder la pregunta anterior? _____
 - d) ¿Cuál es el radio de la circunferencia? _____

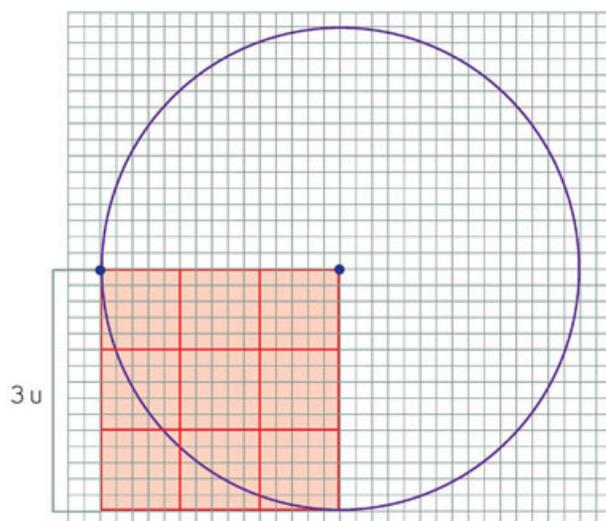
 - e) ¿Qué expresión algebraica representa el área del círculo? _____
- Comparen sus respuestas con las del resto de tu grupo. Compartan sus estrategias de solución.

Área del círculo por área de cuadrados

Trabajen en parejas.



1. El lado del cuadrado anaranjado mide 3 u. Determinen cuántas veces cabe el cuadrado en el círculo. Usen la expresión algebraica de la página anterior.



- a) ¿Cuál es el área del cuadrado? _____
 - b) ¿Cuántas veces cabe el cuadrado dentro del círculo? _____
 - c) ¿Cuánto mide el radio del círculo? _____ ¿Y su área? _____
 - d) ¿La expresión algebraica les permitió determinar correctamente el área del círculo? _____
 - e) ¿El número de veces que cabe el cuadrado dentro del círculo fue distinto al de la primera página? _____
 - f) ¿Importa la medida del lado del cuadrado para determinar cuántas veces cabe dentro del círculo? _____
- Comprueben sus resultados usando el esquema. Determinen si la expresión empleada funciona para calcular el área de cualquier círculo. En tu cuaderno traza otro cuadrado con distinta medida y comprueba lo anterior.

Expresión para calcular el área del círculo

La fórmula para calcular el área del círculo es $A = \pi r^2$ (pi por radio al cuadrado). Una demostración de lo anterior es trazar un cuadrado de lado r ; su área será igual a r^2 y cabrá 3.1415... veces dentro del círculo, que es un valor aproximado de π .

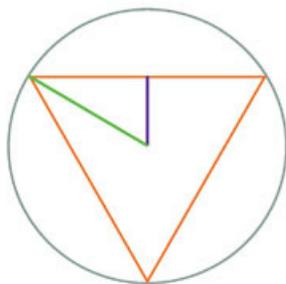
- Comparen la expresión algebraica que usaron para resolver las actividades con la fórmula del recuadro. Con ayuda de su profesor lleguen a conclusiones generales.

Acercamiento al área del círculo por área de polígonos

Analiza las figuras y contesta.

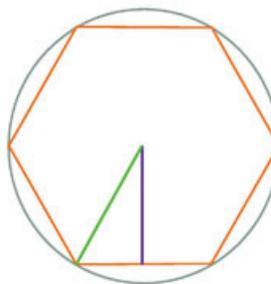
1. Toma las medidas que consideres necesarias y calcula el área de los polígonos inscritos en cada circunferencia. Usa la fórmula de la secuencia 23.

a)



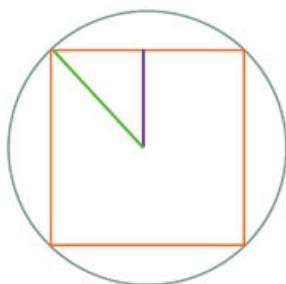
Medida del segmento morado: _____
 Medida del segmento verde: _____
 Área del polígono inscrito: _____

d)



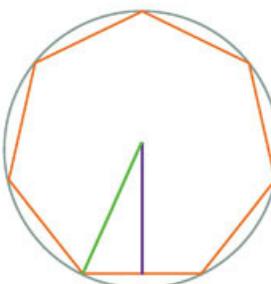
Medida del segmento morado: _____
 Medida del segmento verde: _____
 Área del polígono inscrito: _____

b)



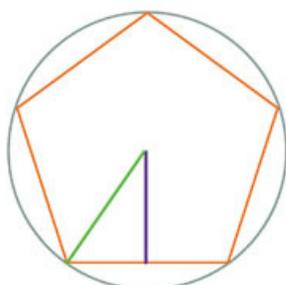
Medida del segmento morado: _____
 Medida del segmento verde: _____
 Área del polígono inscrito: _____

e)



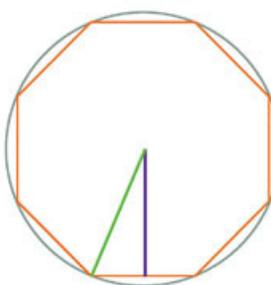
Medida del segmento morado: _____
 Medida del segmento verde: _____
 Área del polígono inscrito: _____

c)



Medida del segmento morado: _____
 Medida del segmento verde: _____
 Área del polígono inscrito: _____

f)

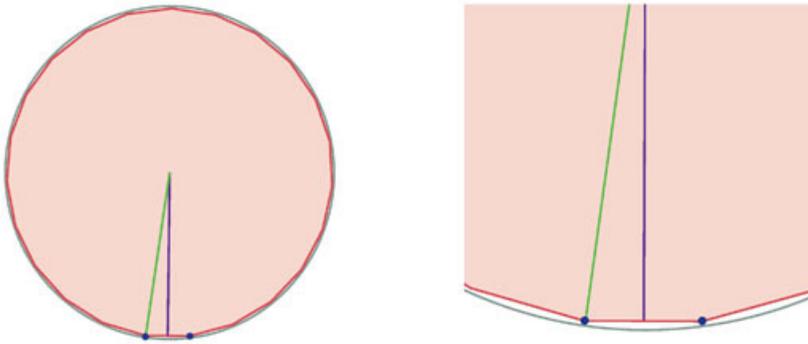


Medida del segmento morado: _____
 Medida del segmento verde: _____
 Área del polígono inscrito: _____

- g) ¿Qué representa el segmento morado en todos los polígonos? _____
 h) ¿Qué representa el segmento verde? _____
 i) Calculen la diferencia entre la medida del segmento verde y la medida del segmento morado en todos los polígonos. ¿Qué observan en la diferencia cuantos más lados tiene el polígono? _____

Trabajen en parejas.

2. En la imagen se muestra un polígono inscrito en una circunferencia y el acercamiento a una de las secciones del polígono.



- ¿Cuántos lados tiene el polígono? _____
- ¿Qué sucede entre el polígono y el círculo, al aumentar el número de lados del polígono? _____
- Midan la apotema y el radio. ¿Cuál es la diferencia entre sus medidas? _____
- ¿Esta diferencia es mayor o menor que la diferencia entre ambos segmentos en un polígono de 8 lados? _____
- ¿Qué sucedería si el número de lados aumentara a 1 000 o más? _____
- ¿En algún momento la medida de la apotema y el radio serán iguales? Argumenten su respuesta. _____

Otro acercamiento a la fórmula para calcular el área del círculo

El área de cualquier polígono regular puede calcularse con la fórmula $A = \frac{Pa}{2}$ donde p representa el perímetro del polígono y a su apotema. Al aumentar el número de lados del polígono un número infinito de lados, la apotema y el radio son prácticamente iguales y el polígono se va aproximando a un círculo.

El perímetro del círculo se calcula con la fórmula $A = 2\pi r$; al sustituirla en la fórmula del cálculo del área del polígono tenemos que $A = \frac{Pa}{2} : \frac{2\pi r a}{2}$ y como la apotema puede llegar a tomar la medida del radio, tenemos que $A = \frac{2\pi r r}{2}$.

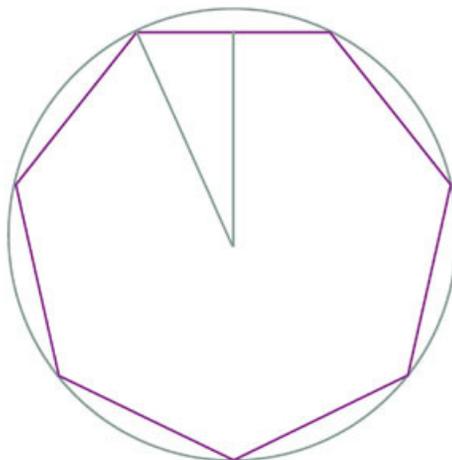
Al reducir términos queda $A = \pi r r$, lo cual finaliza con la fórmula que conocemos del cálculo del área del círculo que es $A = \pi r^2$ (pi por radio al cuadrado).

- De manera grupal analicen la información anterior y con ayuda de su profesor interpreten cada párrafo y visualícenlo en los círculos y polígonos de esta sesión. Lleguen a conclusiones generales.

Cálculo de áreas con la fórmula deducida

Haz lo que se pide.

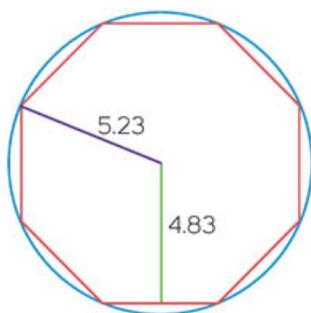
1. Toma como referencia la imagen y el valor aproximado de $\pi = 3.14$.



- a) Si el radio de la circunferencia mide 6.91 cm, el apotema del polígono es igual a 6.23 cm y el lado del polígono mide 6 cm...

- i. ¿cuál es el área del polígono inscrito en la circunferencia? _____
- ii. ¿Cuál es el área del círculo? _____

- Compara tus respuestas y tus procedimientos con los de otro compañero.
2. Con el compañero con el que comprobaste tus respuestas, determina en cuál de los siguientes procedimientos se cometió algún error al calcular el área del círculo de la izquierda.



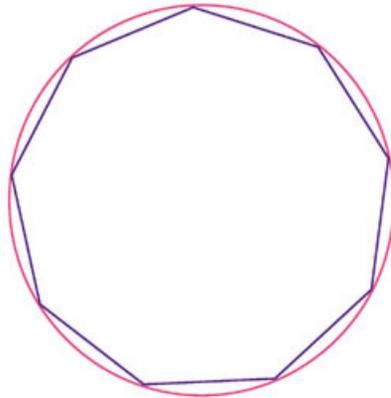
Expresión 1	Expresión 2	Expresión 3
Área polígono	Área círculo	Área círculo
$\frac{Pa}{2} = \frac{8(4)(5.23)}{2}$ $= \frac{8(4)(5.23)}{2}$ $= \frac{167.36}{2} = 83.6$	$\frac{Pa}{2} = \frac{3.14(5.23 + 5.23)(5.23)}{2}$ $= \frac{3.14(10.46)(5.23)}{2}$ $= \frac{171.77}{2} = 85.8$	$\pi r^2 = 3.14(4.83)^2$ $= 3.14(23.32)$ $= 73.22$

- a) ¿En cuál procedimiento se cometió algún error y en qué consiste? _____

- De manera grupal comenten sus respuestas y sus argumentos. Lleguen a conclusiones generales.

Resuelve las actividades.

1. Toma las medidas que consideres necesarias para responder.



- a) ¿Cuál es el área del polígono inscrito en la circunferencia? _____

- b) ¿Cuál es el área del círculo? _____
- c) ¿Qué procedimiento seguiste para calcular el área del polígono? _____

- d) ¿Qué procedimiento seguiste para calcular el área del círculo? _____

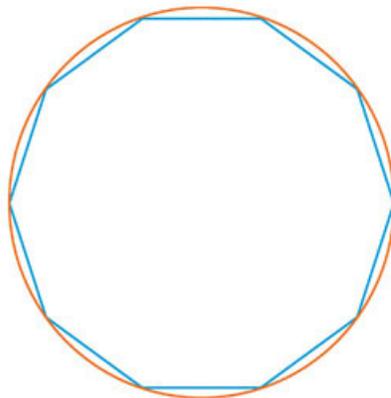
Otras fuentes

Compara lo aprendido en esta secuencia con la actividad que se presenta en el siguiente vínculo. Interactúa con el recurso.

www.esant.mx/ecsema2-023

- Compara tu procedimiento con el de otro compañero.

2. Encuentra con un compañero los datos que se solicitan.



- a) ¿Cuál es el área del polígono inscrito en la circunferencia? _____

- b) ¿Cuál es el área del círculo? _____

- Compara tus respuestas con el resto del grupo y expliquen cómo resolvieron las actividades sin conocer la apotema y ni el radio.

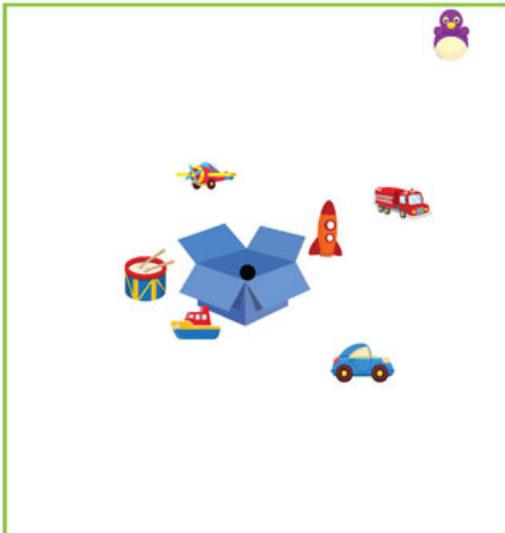
Nociones de dispersión



Analiza la situación y contesta.

1. A dos niños les pidieron que levantaran los juguetes que dejaron regados por todo el cuarto. Ambos tienen su caja de juguetes en el centro de la habitación y, para guardarlos, caminan directamente hacia uno, lo dejan en la caja y van por otro.

Imagina que los dos cuadrados representan las habitaciones. Considera la distancia del punto negro de la caja a cada uno de los juguetes.



- a) ¿A qué distancia de la caja se encuentra cada uno de los juguetes en la habitación azul? Anótalos de menor a mayor. _____

- b) ¿A qué distancia de la caja se encuentra cada uno de los juguetes en la habitación verde? Anótalos de menor a mayor. _____

- c) En ambas habitaciones:
 - i. ¿Qué distancia hay del objeto más cercano a la caja? _____
 - ii. ¿Qué distancia hay entre los objetos más lejanos y la caja? _____
- d) ¿En qué habitación los juguetes están más dispersos? _____

- e) ¿Por qué a pesar de que en ambas hay un juguete a la misma distancia más cercana y más lejana, determinaste que en una habitación están más dispersos los juguetes? _____

- Comenta con tus compañeros cómo determinaron la dispersión en la actividad.

Dispersión

Reúnete con un compañero y hagan lo que se solicita.



- Arriba de cada recta hay un conjunto de datos ordenados de menor a mayor. Marca con un punto sobre la recta el número que corresponde a cada dato. Después calcula la media aritmética de cada conjunto y márcala en la recta con un color distinto. La media aritmética la escribimos como \bar{x} .

Conjunto 1: 2.04, 4.19, 5.3, 5.44, 6.04, 6.31 y 8.36 $\bar{x} =$



Conjunto 2: 2.04, 2.76, 2.99, 3.25, 3.3, 3.69 y 8.36 $\bar{x} =$



- Considera que los dos conjuntos de datos anteriores, son las distancias que tienen los juguetes al centro de cada caja. ¿Qué conjunto está más disperso? ____

Conjunto A: 2, 4, 5, 6, 8 $\bar{x} =$



Conjunto B: 2, 3, 7, 8 $\bar{x} =$



- ¿Cuál es la media aritmética del conjunto A y cuál la del conjunto B?
- ¿Cuál es el rango del conjunto A y cuál la del conjunto B?
- ¿En qué conjunto se encuentran más alejados los datos de su media aritmética?
- ¿Qué conjunto de datos consideras que está más disperso?
- ¿Por qué a pesar de que ambos conjuntos tienen la misma media aritmética y el mismo rango consideras que uno está más disperso que el otro?

Aprendo mejor

Cuando un problema te haya resultado difícil de resolver en la clase, intenta solucionarlo nuevamente en casa. Tómate tu tiempo para analizar qué es lo que se te dificultó y, si requieres apoyo, solicítalo al profesor o algún compañero.

El rango y la dispersión

El **rango** es la diferencia entre el mayor y el menor de los valores dados en un conjunto de datos. El rango es una medida de tendencia central que no da información de lo que sucede dentro del conjunto.

La **dispersión** nos dice qué tan distanciados se encuentra el conjunto de valores respecto a su media aritmética.

- Compara tus resultados con otro compañero y corroboren sus argumentos.

Sesión 1. Calculas el rango de uno o más conjuntos de datos e interpretas la dispersión de dicho conjunto de datos.

La desviación media

Reúnete con un compañero y hagan las actividades.

1. Se tienen dos conjuntos de datos ordenados de menor a mayor.
 - a) Calculen la media aritmética en cada conjunto de datos.
 - b) En la casilla *Distancia del valor a la media* escriban la distancia que hay entre el dato y su media aritmética. Por ejemplo, si la media del primer conjunto fuera 23.5 y el primer dato es 5, entonces la distancia que hay entre ellos es 18.5. Recuerden que la distancia es un valor absoluto y siempre es positivo.

$$\bar{x} =$$

Valores del conjunto 1	5	20	25	30	45
Distancia del valor a la media					

$$\bar{x} =$$

Valores del conjunto 2	5	15	25	35	45
Distancia del valor a la media					

- c) ¿Cuál es el promedio de las distancias del conjunto 1? _____
 - d) ¿Cuál es el promedio de las distancias del conjunto 2? _____
 - e) ¿Cuál de los dos conjuntos está más disperso? _____
 - f) ¿Cómo pueden relacionarse el promedio de las distancias con la dispersión de los datos? _____
2. Observa el siguiente conjunto y calcula la distancia que hay entre el valor del dato y la media aritmética.

$$\bar{x} =$$

Valores del conjunto 3	3	19	24	32	47
Distancia del valor a la media					

- a) Sin hacer cálculos contesta. ¿Están más dispersos los valores del conjunto 3 que los del conjunto 2? _____
 - b) Realiza las operaciones necesarias y responde. ¿Qué datos están más dispersos, los del conjunto 2 o los del conjunto 3? Justifica tu respuesta. _____

- Socialicen sus respuestas con el grupo y lleguen a conclusiones generales.

Desviación media

La desviación media es una medida estadística que muestra qué tan dispersos están los datos de un conjunto. Cuando se dificulta colocar los datos sobre un segmento de recta y observar la dispersión, se calcula la desviación media siguiendo los siguientes pasos:

1. Se calcula la media aritmética del conjunto de datos.
2. Se calcula la distancia o el valor absoluto entre la media aritmética y cada uno de los valores dados en los datos del conjunto.
3. Con todas las distancias se calcula el promedio.

El valor que resulta es la desviación media y se puede denotar como Dm .

Por ejemplo, en los siguientes conjuntos de datos, la media es 8.

Valores del conjunto 1	1	2	8	10	19
Distancia del valor a la media	7	6	0	2	11
Valores del conjunto 2	3	5	6	12	14
Distancia del valor a la media	5	3	2	4	6

En el conjunto 1 la desviación media es $Dm = \frac{7+6+0+2+11}{5} = 5.2$.

En el conjunto 2 la desviación media es $Dm = \frac{5+3+2+4+6}{5} = 4$.

Por tanto, los valores del conjunto 1 están más dispersos que en el conjunto 2.

3. Analicen la información anterior y realicen las operaciones para comprobar el cálculo de la media y de las desviaciones medias. Corroboen que su elección del conjunto más disperso es correcto.

¿Cómo vamos?

Haz lo que se pide.

1. Resalta con color rojo el conjunto que tiene desviación media más pequeña.

Pareja 1	Pareja 2	Pareja 3	Pareja 4
16, 21, 32, 45, 96	1, 2, 3, 4, 12	60, 70, 80, 90, 100	2, 4, 6, 8, 10
16, 45, 50, 80, 96	1, 9, 10, 11, 12	10, 20, 30, 40, 50	0, 2, 4, 6, 8,

- Corroborar tus respuestas con el resto del grupo, lleguen a acuerdos generales.

El rango y la dispersión

Analiza y contesta.

- Los siguientes conjuntos de datos representan las calificaciones de los alumnos de dos grupos de segundo de secundaria.

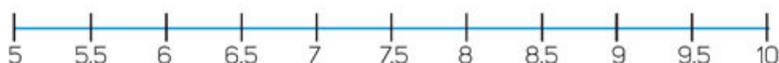
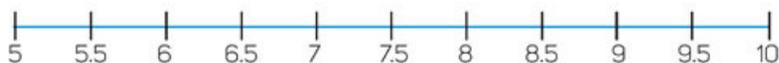
Grupo A

6	9	8	7	9	9	7	5	8	6
8	5	5	10	10	8	10	9	7	5
10	10	8	7	6	10	5	5	8	8

Grupo B

6	7	8	8	8	9	6	8	10	10
5	5	8	8	9	9	6	7	6	9
8	10	9	7	6	8	8	10	9	8

- Calcula el rango en ambos conjuntos.
 Rango del grupo A: ____
 Rango del grupo B: ____
- Calcula la media aritmética, hasta décimos, de ambos conjuntos.
 En el grupo A: ____
 En el grupo B: ____
- Calcula la desviación media de ambos conjuntos.
 En el grupo A: ____
 En el grupo B: ____
- Representa en cada recta el rango y la media aritmética del grupo A y el B. Utiliza diferentes colores en cada caso.



- ¿En qué grupo están más dispersos los valores? _____

- Corroborar tus respuestas con el resto de tus compañeros.

Resuelve el problema.

- En dos comunidades distintas se realizó una encuesta y se registró las veces que las personas usaron los servicios médicos al año. Los registros que se obtuvieron son los siguientes:

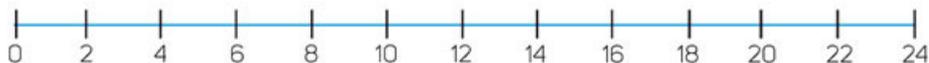
Comunidad X

5	12	1	2	3	4	6	8	9	12
1	2	5	10	6	12	8	3	8	4
3	4	6	11	5	8	10	1	2	6
6	24	10	1	8	2	5	4	3	8

Comunidad Y

2	4	12	6	3	0	6	4	4	8
8	10	2	12	4	2	5	6	3	4
0	1	5	2	6	12	3	1	0	2
3	6	4	0	5	2	4	3	2	1

- Calcula el rango de ambos conjuntos de datos.
De la comunidad X: _____
De la comunidad Y: _____
- Calcula hasta décimos la media aritmética de ambos conjuntos.
De la comunidad X: _____
De la comunidad Y: _____
- Calcula la desviación media de ambos conjuntos.
De la comunidad X: _____
De la comunidad Y: _____
- Representa con un intervalo el rango y ubica el valor de la media aritmética de la comunidad X y la comunidad Y. Utiliza diferentes colores.



- ¿En qué comunidad están más dispersos los datos? _____
- Argumenta tu respuesta, considera el rango de los conjuntos. _____

- Socialicen sus comentarios con el resto del grupo y lleguen a conclusiones.

Otras fuentes

Entra en www.esant.mx/ecsema2-024. Comienza la lectura a partir del subtítulo "Distribución de las especies". Analiza las diferencias y similitudes con lo que trabajaste en esta secuencia.

¿Para qué sirve la desviación media?



Analicen en parejas la situación.

- Un sastre tiene dos pedidos: Uno es de camisas color café de diferentes tallas y otro es de camisas moradas, también de diferentes tallas. El sastre tiene que elegir un trabajo, ya que no puede hacer los dos. El sastre tiene un molde de talla 34 que usa como base para realizar conversiones a otras tallas. Él invierte más tiempo cuanto más alejada del molde esté la talla. Además, la cantidad de tela que usa para camisas grandes aumenta el costo de producción y el tiempo que invierte.

- Analicen las tallas de ambos pedidos y respondan.

Tallas de las personas que mandaron hacer camisas color café.

28	32	28	38	40
32	40	36	40	38
28	38	30	28	38
34	40	30	34	36

Tallas de las personas que mandaron hacer camisas color morado.

34	40	38	36	36
28	36	30	34	28
36	34	36	34	36
30	32	38	36	34

- ¿Qué pedido le conviene elegir? Argumenten su respuesta. _____

- Si al primer pedido se agrega una camisa talla 28 y al segundo, una camisa talla 40, ¿cambiará de decisión el sastre? _____

- Realiza lo que consideres conveniente para argumentar tu respuesta. _____

- Muestren sus argumentos al resto del grupo y lleguen a acuerdos generales.

Lee, analiza y realiza lo que se indica.

1. Una empresa contrató a tres encuestadores para que realizaran un sondeo sobre sus productos. Se pidió a los encuestados degustar el producto y elegir un número entre 0 y 10, donde 0 significó que les desagradó por completo y 10 significó que les gustó por completo. La empresa se percató de que uno de los encuestadores entregó los datos en menor tiempo que los demás y decidieron no volverlo a contratar.
 - a) Observa los tres conjuntos de datos. ¿Quién consideras que fue la persona que terminó las encuestas mucho antes que el resto?

Encuestador 1	7	0	9	5	9	1	10	7	8	9
	6	8	7	10	7	0	9	8	9	2
	8	10	9	6	8	10	6	10	7	8
	10	9	10	7	9	8	7	8	9	7
	9	7	8	8	10	9	8	10	7	8
	8	10	9	7	9	8	9	10	9	10
Encuestador 2	1	10	10	9	8	5	6	7	8	9
	4	1	3	2	0	6	9	2	2	0
	0	2	2	0	4	10	5	1	3	8
	3	1	3	4	1	1	10	10	4	5
	5	4	5	0	10	8	2	3	5	7
	10	3	2	10	5	4	9	6	6	10
Encuestador 3	6	2	10	5	9	8	10	8	7	9
	6	7	2	10	7	5	9	8	9	10
	8	10	9	10	8	1	6	10	6	8
	10	9	10	9	9	8	10	8	10	7
	10	7	8	6	10	9	8	10	7	8
	9	10	7	9	10	7	9	10	9	10

b) ¿A qué encuestador consideras que ya no volvieron a contratar? _____

c) ¿Por qué razón consideras que la empresa tomó tal decisión? _____

d) ¿Qué procedimiento seguiste para averiguar quién fue la persona afectada? _____

- Compara tus respuestas con el resto del grupo y lleguen a acuerdos.

Teoría de errores

Trabajen en equipos.

1. Lean las indicaciones en grupos de cinco integrantes.
 - a) En una hoja blanca, tracen un segmento. La longitud del segmento debe estar en centímetros y tener una cifra decimal.
 - b) Intercambien con otro equipo la hoja en la que dibujaron el segmento de recta. Asegúrense de que todos los equipos tengan un segmento diferente al que trazaron.
 - c) En la hoja que tiene el equipo, anoten la medida que cada integrante estima que tiene el segmento. Enciérrenlas y coloquen la letra *C* como etiqueta de los datos. No usen ningún instrumento de medición ni objeto alguno para comparar. Anoten las medidas únicamente por medio de la observación:

 - d) Una vez anotadas las medidas de cada integrante, vuelvan a cambiar la hoja con otro equipo distinto al que trazó el segmento.
 - e) Para esta parte de la actividad, coloquen una marca en el piso y elijan a un integrante que detendrá la hoja con el segmento a 5 pasos de distancia de la marca. Cada integrante del equipo podrá usar una regla graduada y lo que considere necesario para intentar calcular la medida del segmento sin acercarse a él y sin pedir a otra persona que intervenga. Cuando llegue el momento de que la persona que sostiene la hoja calcule la medida, seleccionen a otra persona que intercambie su lugar. También anoten las medidas en la hoja, enciérrenlas y coloquen la letra *E* como etiqueta de los datos. Anoten las medidas:

 - f) Anoten las medidas que cada integrante calculó a manera de que se distingan de las que escribieron en los incisos *c* y *e*.
 - g) Cambien nuevamente la hoja con otro equipo distinto a todos los anteriores y contesten.
 - i. Calculen la media aritmética de las medidas de *C*. Anótenla: _____
 - ii. Calculen la media aritmética de las medidas de *E*. Anótenla: _____
 - iii. Calculen la desviación media de las medidas de *C*. Anótenla: _____
 - iv. Calculen la desviación media de las medidas de *E*. Anótenla: _____
 - v. ¿Disminuyó o aumentó Dm de la etiqueta *C* a *E*? _____
 - vi. Tomen la medida real del segmento directamente con una regla graduada y anótenla. _____
 - vii. ¿A qué medida se acerca más el valor real del segmento? _____
 - viii. ¿Las Dm reflejan esta precisión o cercanía al valor real? _____

- De manera grupal comenten dos casos y lleguen a conclusiones generales.

Teoría de errores

La **teoría de errores** determina las imprecisiones que se derivan de medir experimentalmente un objeto de estudio. El error que surge al medir una magnitud se determina a partir de analizar la dispersión del conjunto de datos.

Por ejemplo, algunas empresas que lanzarán un producto realizan sondeos para que las personas den su opinión. Recolectan esas opiniones, les dan un valor, las cuantifican y analizan. En este caso, si es muy disperso el conjunto de datos significa que no hay una aceptación de dicho producto, por lo que la desviación media (Dm) será un número grande. Si después de hacer modificaciones al producto se reduce el valor Dm , significa que mejoró la aceptación del producto.

Es así como con la **teoría de errores** se busca reducir el margen de error u obtener el valor real de una magnitud determinada.

Individualmente, analicen la situación.

2. Una empresa produce antídotos para la picadura de la araña violinista y realiza pruebas de efectividad. En la primera fase se registró el tiempo en minutos que tardan en manifestarse las primeras reacciones. El registro se muestra en la tabla 1.

Tabla 1

3	2	8	6	8	5	5
8	3	1	10	7	6	12
6	4	2	5	9	1	2

A partir de los resultados anteriores se modificó la fórmula y se realizó la segunda fase. Los resultados obtenidos se muestran en la tabla 2.

- a) Calcula la desviación media de cada conjunto.

Dm de la tabla 1 es: _____ Dm de la tabla 2 es: _____

- b) Escribe una recomendación para la empresa. _____

Tabla 2

1	3	2	7	8	2	4
8	8	5	9	7	6	16
6	7	9	5	9	10	8

A partir de la fórmula inicial, hicieron nuevas modificaciones y realizaron la tercera fase. Los registros se muestran en la tabla 3.

- c) Calcula Dm de la tabla 3: _____ Escribe una recomendación para la empresa. _____

Tabla 3

1	2	1	3	5	1	3
2	3	1	3	5	3	2
2	3	1	2	2	1	2

3. En grupo analicen la información de la imagen de la derecha y dialoguen sobre el proceso matemático que utilizaron para calcular los tiempos que se observan.
- Compartan en grupo sus resultados. Analicen si las recomendaciones sugeridas son las adecuadas.



El sentido de la desviación media

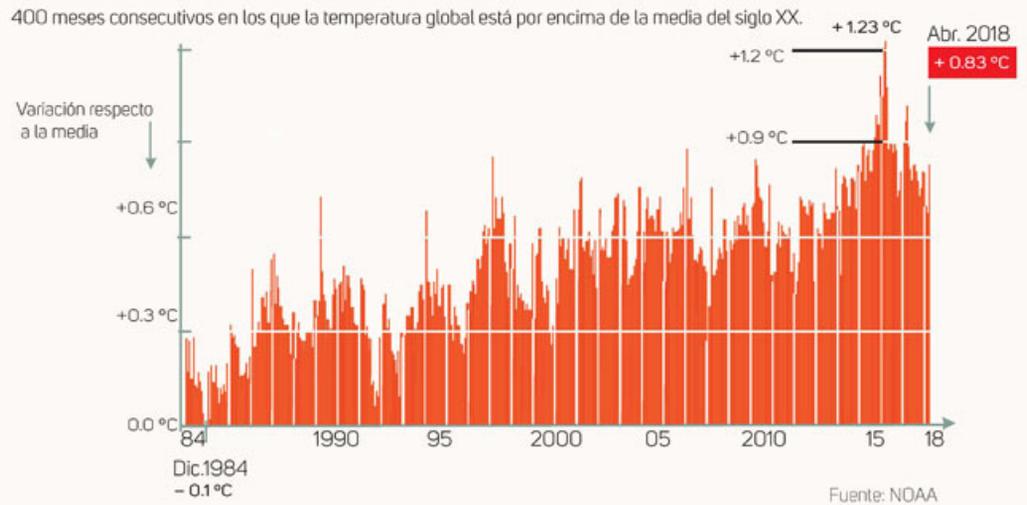
Analicen la información de manera grupal.

1. Identifiquen las medidas involucradas en el texto y determinen la utilidad que tiene analizar los datos de la manera que se muestra.

Recientemente, la Administración Nacional Oceánica y Atmosférica (cuyas siglas en inglés son NOAA) dio a conocer que abril de 2018 significó el tercero más cálido desde 1880, año en que el organismo comenzó a registrar estos datos. Es decir, que fue el cuadragésimo segundo mes de abril consecutivo con temperaturas más altas que el promedio histórico. Llevamos en conclusión 33 años consecutivos con una temperatura por arriba de lo normal, en promedio hablamos de 14.5 grados Celsius en mar y Tierra pero el mes pasado se superó por 0.83 grados.

Fuente: elpais.com/elpais/2018/05/16/ciencia/1526488984_261713.html
(Consulta: 29 de mayo de 2018)

Subida de la temperatura mundial



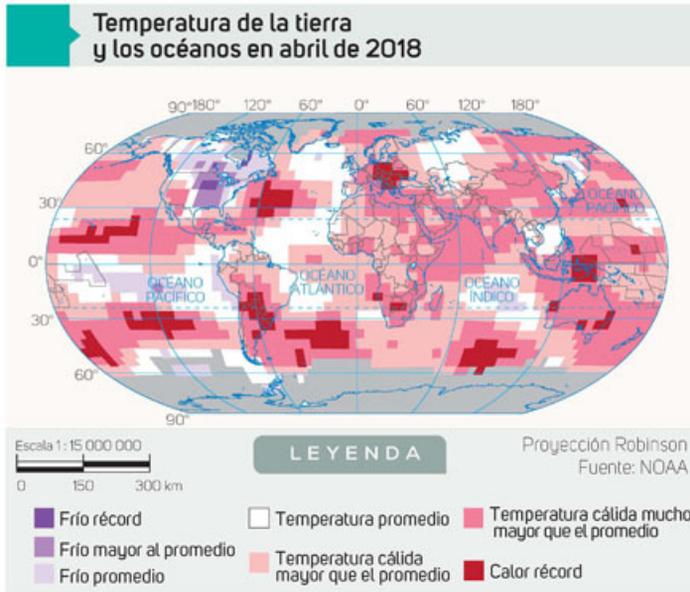
- a) ¿Qué información se ubica en el eje de las y ? _____

- b) ¿Qué información se ubica en el eje de las x ? _____

- c) Aproximadamente, ¿cuál fue la temperatura más alta? _____

- Investiguen las temperaturas registradas en nuestro planeta y las posibles repercusiones del aumento en la temperatura.

2. Ubiquen alguno de los países que se observan en el mapa e investiguen las temperaturas registradas en él. Consideren un periodo de 10 años. Calculen las desviaciones medias. Presenten al grupo el resultado de sus investigaciones.



En equipos hagan lo que se pide.

1. Analicen la gráfica.



- Investiguen el precio del dólar en pesos mexicanos de 2010 a 2018.
- Calculen las D_m de ese periodo y comparen con el periodo de 2001 a 2009.
- Determinen en qué periodos hubo más variación y cómo influye esto en la economía de nuestro país.

- Compartan su información con el resto del grupo y determinen si la desviación media fue de utilidad o no para analizar esta situación.

¿Qué aprendimos?

Otras fuentes

Apóyate en el video que se presenta en el siguiente vínculo para repasar el concepto y el cálculo de la desviación media:
www.esant.mx/ecsema2-025.

¿Cómo lo hicimos?

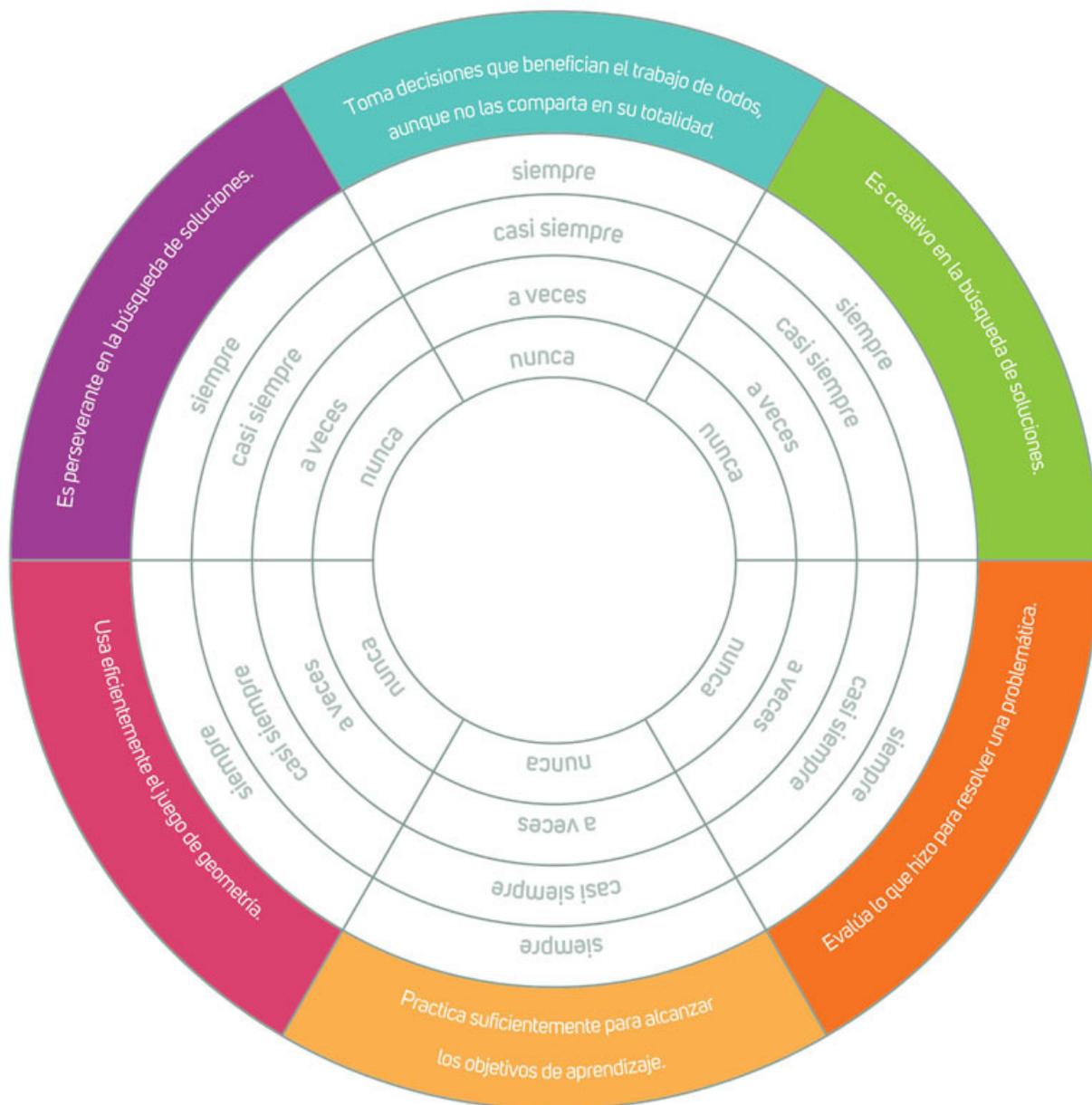
1. Marca la casilla que describe mejor tu desempeño.

Aprendizajes Esperados	Nivel de logro		
	En proceso	Satisfactorio	Excelente
Interpreto el significado de obtener raíces cuadradas.	Solamente puedo calcular raíces cuadradas mediante ensayo y error o con la calculadora. <input type="checkbox"/>	Resuelvo problemas en los que debo dar significado y calcular raíces cuadradas por diferentes métodos. <input type="checkbox"/>	Identifico que todo número positivo tiene dos raíces cuadradas y discrimino alguna de ellas según el contexto del problema. <input type="checkbox"/>
Elaboro, utilizo y justifico procedimientos para calcular productos y cocientes de potencias enteras de la misma base.	Tengo dificultades para identificar cuándo aplicar los procedimientos para calcular productos y potencias de la misma base. <input type="checkbox"/>	Aplico correctamente los procedimientos para calcular productos y potencias de la misma base. <input type="checkbox"/>	Aplico correctamente los procedimientos para calcular productos y potencias de la misma base y relaciono la potenciación y la radicación como operaciones inversas. <input type="checkbox"/>
Formulo expresiones para representar el perímetro y el área de polígonos.	Se me dificulta distinguir las expresiones algebraicas que representan el perímetro o el área de polígonos. <input type="checkbox"/>	Represento correctamente el perímetro usando expresiones algebraicas, pero se me dificulta hacerlo para el área. <input type="checkbox"/>	Resuelvo problemas que implican calcular el área de diversas figuras mediante expresiones algebraicas. <input type="checkbox"/>
Resuelvo problemas de construcción de polígonos.	Construyo polígonos regulares con instrumentos geométricos y congruentes a otros. <input type="checkbox"/>	Puedo construir polígonos regulares a partir de diversas informaciones y a escala. <input type="checkbox"/>	Construyo polígonos regulares con cualquier información e identifico las propiedades de los polígonos que permiten cubrir el plano. <input type="checkbox"/>
Calculo el área de diversas figuras.	Tengo dificultades para identificar la fórmula que permite calcular el área de algunas figuras. <input type="checkbox"/>	Identifico diversas expresiones algebraicas para calcular el área de polígonos regulares y el círculo. <input type="checkbox"/>	Utilizo adecuadamente las fórmulas para calcular el área de polígonos regulares y del círculo en la resolución de problemas. <input type="checkbox"/>
Uso e interpreto las medidas de tendencia central y de dispersión de un conjunto de datos y valoro su conveniencia.	Calculo el rango y la desviación media de un conjunto de datos. <input type="checkbox"/>	Interpreto la dispersión de conjuntos de datos. <input type="checkbox"/>	Analizo la relación entre el rango y la desviación media en la dispersión de un conjunto de datos y uso la desviación media en la teoría de errores. <input type="checkbox"/>

- Reflexiona sobre tus resultados y, con tu profesor, busca estrategias para fortalecer tus áreas de oportunidad.

¡Vamos a reflexionar sobre las actitudes y los valores que desarrollaste en este trimestre!

- Pide a un compañero que colorea la franja que representa mejor el nivel donde te ubicas.



- Lee y responde de manera individual.

- ¿Qué es lo que más te gustó de este trimestre? _____
- ¿Qué es lo que menos te gustó de este trimestre? _____
- ¿Qué puedes mejorar en el próximo trimestre? _____

Trimestre tres



Sistemas de ecuaciones lineales, proporcionalidad inversa, volumen de prismas y cilindros rectos...

Estás por empezar el estudio del último trimestre del ciclo escolar.

En este trimestre resolverás problemas que impliquen plantear y solucionar sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, utilizando distintos métodos: gráfico, igualación, sustitución y suma y resta. Identificarás que algunos sistemas de ecuaciones tienen solución única, un número infinito de soluciones o ninguna solución.

Profundizarás en el estudio del álgebra y resolverás problemas que impliquen verificar algebraicamente la equivalencia de expresiones de primer grado, formuladas a partir de sucesiones.

Analizarás y compararás situaciones de proporcionalidad inversa. Resolverás problemas que se modelan con ese tipo de variación, asociados con fenómenos de la física y otros contextos.

Convertirás unidades del Sistema Internacional de Unidades a unidades del Sistema Inglés y resolverás problemas en los que se usen ambos sistemas.

En primer grado aprendiste a calcular el volumen de prismas de base triangular, rectangular y cuadrangular. En este trimestre retomarás lo aprendido y calcularás el volumen de prismas cuyas bases sean polígonos regulares. Establecerás la relación entre el volumen de estos prismas y el de cilindros rectos.

Avanzarás en el estudio de la probabilidad y reconocerás las características de la probabilidad frecuencial y teórica de un evento en un experimento aleatorio.

Deseamos que sea provechoso este tercer trimestre del curso.



Sistema de dos ecuaciones lineales



En parejas resuelvan la situación.

1. Encuentren dos números cuya suma sea 41 y cuyo producto sea 400.

- ¿Qué estrategias pueden seguir para obtener la respuesta? _____
- Expresen algebraicamente esta situación: _____
- Completen la siguiente tabla.

x	y	x + y	x × y
9	32		
10		41	310
	30	41	330
		41	348
13			364
14	27		
15	26		
		41	400

- ¿Cuáles son esos números que cumplen con ambas condiciones del problema? _____

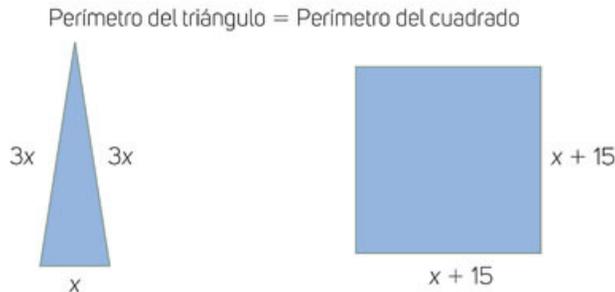
- Socialicen con sus compañeros sus resultados.

Sistemas de ecuaciones simultáneas



Trabajen en equipos.

1. Resuelvan con base en el esquema.



- ¿Cuál es el perímetro del triángulo? _____
- ¿Cuál es el perímetro del cuadrado? _____
- ¿Qué ecuación indica que la medida del perímetro del triángulo, es igual que la medida del perímetro del cuadrado? _____

d) Completen la tabla.

x	$7x$	$4x + 60$
12		
13		
14		
15		
16		
17		
18		
19		
20		

- ¿Cuánto debe medir de lado el cuadrado? _____
- ¿Cuánto miden los lados del triángulo? _____

- Comparen sus resultados con los demás compañeros. Discutan sus dudas y dificultades con ayuda de su maestro.

Sistemas de ecuaciones simultáneas

Se llama **sistema de ecuaciones simultáneas** a las que tienen en común el mismo resultado.

En un sistema de ecuaciones simultáneas, se establecen condiciones que deben cumplirse al mismo tiempo. Los valores de las variables de una ecuación, deben cumplirse para todas las ecuaciones planteadas en el sistema.

En un sistema de ecuaciones, la cantidad de incógnitas indica la cantidad de ecuaciones que deberán existir para que el sistema pueda ser resuelto.

¿Cómo vamos?

Representa algebraicamente la situación.

1. Encuentra dos números tales que, el triple del primero más el segundo sea igual a 820 y el doble del primero menos el segundo sea igual a 340.

a) ¿Cuáles son los números buscados?

- Comparen sus resultados con los demás compañeros y compartan sus estrategias.

Método gráfico

En parejas, lean la situación y hagan lo que se pide.

1. Teresa y su prima Gabi planean salir de vacaciones a la playa, por lo que fueron a comprar lentes de sol y sandalias. Por los lentes de sol y un par de sandalias, Teresa pagó \$164. Gabi compró 2 lentes de sol y un par de sandalias y pagó \$249.

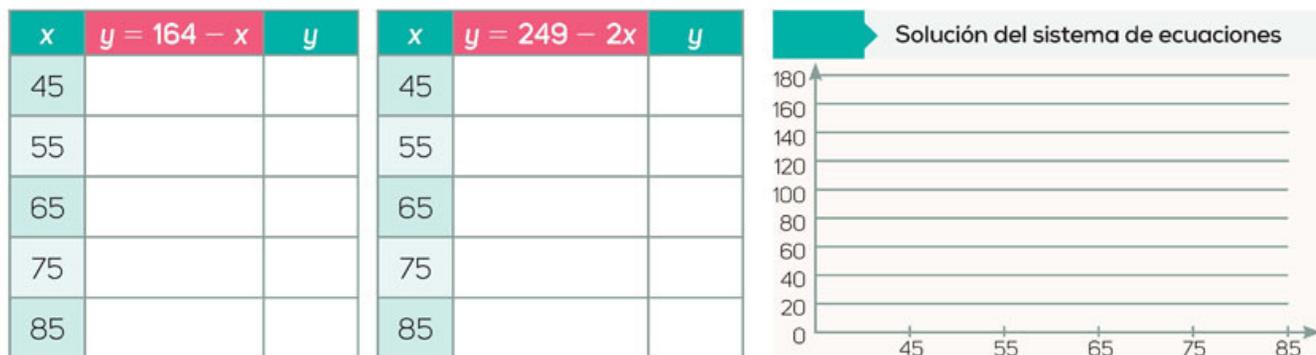
- a) Expresen algebraicamente la compra de Tere. _____
- b) Expresen algebraicamente la compra de Gabi. _____
- c) ¿Qué representa cada variable? _____

- d) ¿Cuántas incógnitas tienen las ecuaciones? _____
- e) ¿Por qué? _____
- f) Las ecuaciones que resuelven el sistema, en las cuales se ha despejado una de las variables son:

$$y = 164 - x$$

$$y = 249 - 2x$$

- g) Completen las tablas y tracen en el mismo plano la gráfica que las representa.



- i. ¿En qué punto se intersecan ambas rectas? _____
- ii. ¿Cuál es el valor de x? _____ ¿Y el de y? _____
- iii. ¿Qué significa esta intersección? Discútanlo con sus compañeros. _____

- Comparen sus respuestas con las del resto de sus compañeros. Lleguen a conclusiones.

Método gráfico

El **método gráfico** es un procedimiento de solución que consiste en representar las gráficas asociadas con cada ecuación del sistema. Para realizarlo, es necesario tabular las ecuaciones, despejando una de las variables (y) y sustituyendo con posibles valores de la otra variable (x) y así, obtener pares ordenados que representan los puntos en el plano cartesiano. El punto donde se intersecan las gráficas es la solución del sistema.

2. Antonio y Esteban van a la papelería. Antonio compra 2 lápices y una pluma por \$9 mientras que Esteban compra 3 lápices y una pluma por \$11. ¿Cuánto vale cada lápiz y cada pluma?

- a) Escriban el sistema de ecuaciones que representa la situación.

Antonio: _____ Esteban: _____

- b) Escriban una de las variables en común en cada ecuación.

Antonio: _____ Esteban: _____

- c) Completen las tablas para graficar las ecuaciones despejadas.

x		y	x		y
1			1		
2			2		
3			3		
4			4		

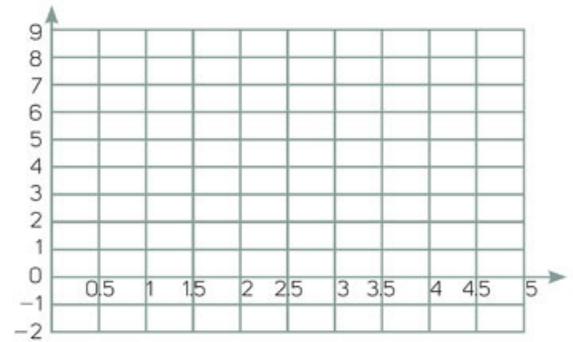
- d) En el plano cartesiano, grafiquen ambas ecuaciones con un color diferente cada una.

i. ¿Cuál es la coordenada del punto de intersección? _____

ii. ¿Cuál es el valor de x? _____

¿Cuál es el valor de y? _____

iii. ¿Qué representan estos valores? _____



Solución por el método gráfico

Cuando se elabora la gráfica de un sistema lineal de dos ecuaciones simultáneas y las rectas se intersecan en un punto, el sistema tiene una **solución única**, ya que son los únicos valores que satisfacen las dos ecuaciones del sistema.

¿Cómo vamos?

1. Escribe una situación que represente el sistema de ecuaciones y resuélvelo.

$$2x + y = 10 \quad x - y = 1$$

- Comparte con el resto del grupo tus planteamientos y lleguen a conclusiones generales. En su cuaderno, tomen nota de los acuerdos a los que llegaron.

Diferentes tipos de solución: única, un número infinito de soluciones o no existe

Lee la situación y contesta.

- Dado el sistema de ecuaciones, completa las tablas y represéntalas en un plano cartesiano.

$$y = -2 + 2x$$

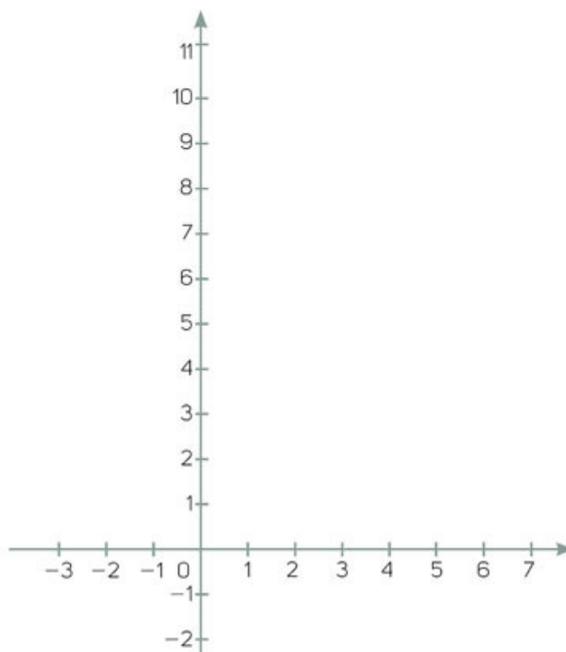
$$y = \frac{4 - 4x}{-2}$$

x		y
1		
2		
3		
4		

x		y
1		
2		
3		
4		

Aprendo mejor

Procura resolver diariamente un problema de los trabajados en clase. Esto te ayudará a mejorar tus estrategias de solución.



- ¿Se intersecaron ambas rectas? Expliquen. _____

- ¿Cuáles son los valores de x y y? _____

- De manera grupal corroboren sus respuestas.

Un número infinito de soluciones

Si al graficar un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, ambas rectas **son coincidentes**, hay infinitos puntos que pertenecen a ambas, es decir, **existe una infinidad de soluciones del sistema**, ya que cualquier coordenada de la gráfica cumple con las soluciones del problema.

Otras fuentes

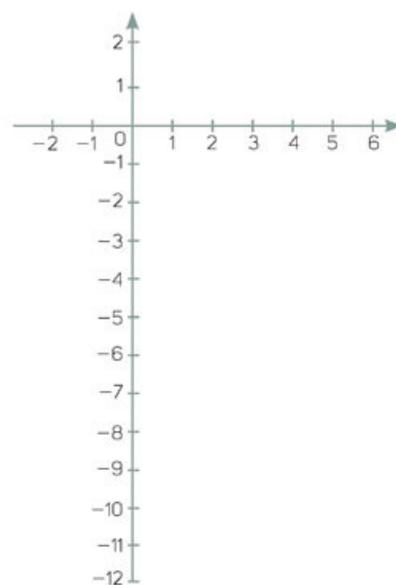
En el siguiente vínculo www.esant.mx/ecsema2-026 encontrarás un video acerca del número de soluciones de un sistema de ecuaciones.

Resuelvan en parejas.

2. Dado el sistema de ecuaciones, completen las tablas y representélas en un plano cartesiano.

$$\begin{aligned} 3x + y &= -2 \\ 3x + y &= 4 \end{aligned}$$

x	y	x	y
1		1	
2		2	
3		3	
4		4	



- a) ¿Se intersecaron ambas rectas? ¿Por qué? _____

- b) ¿Cuáles son los valores de x y y? _____

Sistemas sin solución

Si al graficar un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, las dos **rectas son paralelas**, no tienen ningún punto en común, por lo que no habrá un punto de intersección que satisfaga las dos ecuaciones a la vez. Por tanto, el sistema **no tiene solución**.

¿Cómo vamos?

Lee la situación y contesta.

1. Bibiana quiere construir un jardín, pero según los planos, la diferencia entre el cuádruple del largo y el triple del ancho debe ser de 8 m y también se sabe que el perímetro es de 18 m. ¿Cuáles dimensiones deberá tener su jardín?
- a) Escribe el sistema de ecuaciones que representa la situación.
 b) ¿En qué punto del plano cartesiano ambas rectas se intersecan?

Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

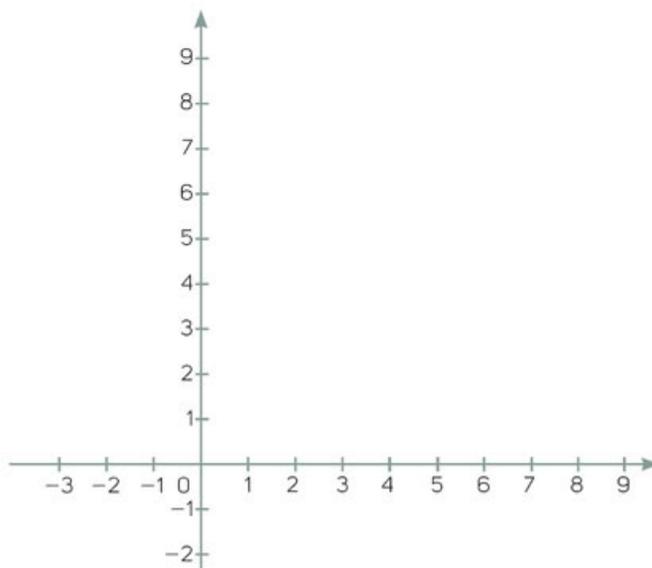
Haz lo que se pide.

1. Completa la tabla, grafica el sistema de ecuaciones y determina qué tipo de solución se obtiene.

$$3x + 4y = 23$$

$$5x + 7y = 39$$

x	y =	x	y =



- a) ¿Cuál es el valor de x ? _____ ¿Cuál es el valor de y ? _____
 - b) ¿Cuántas soluciones tiene el sistema? _____
 - c) Si las rectas se prolongan, ¿existirán otras soluciones? _____ ¿Por qué? _____
- Escribe un sistema de ecuaciones que tenga solo un par de soluciones y compártelo con el grupo, gráfíquenlo y verifiquen sus soluciones.

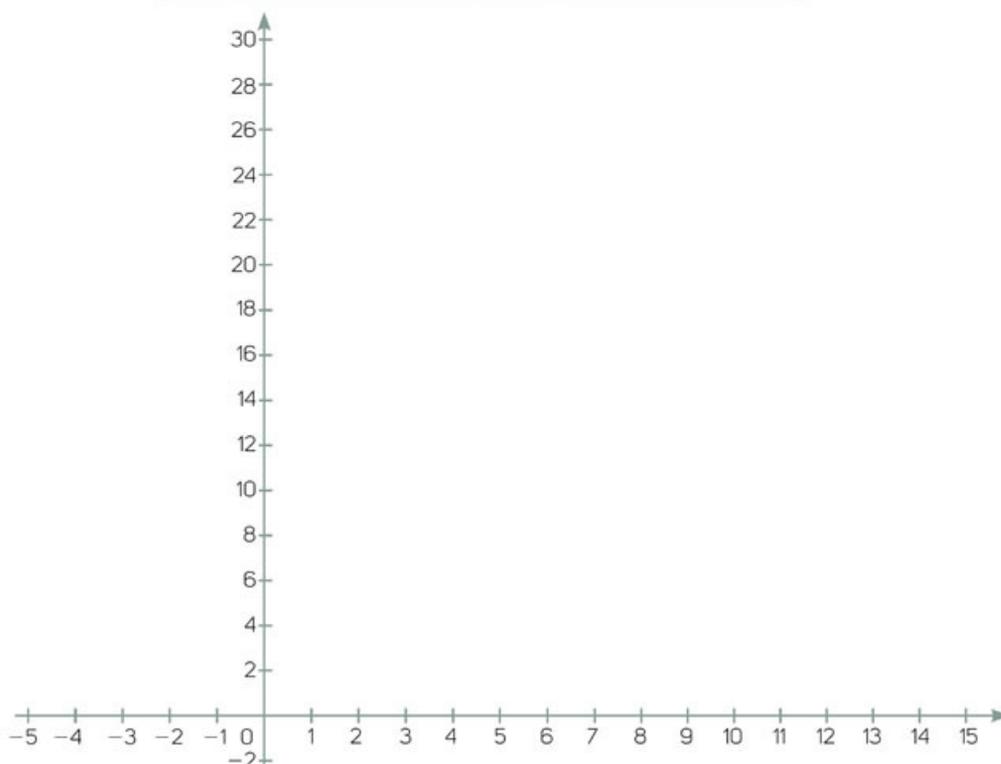
En parejas, trabajen lo que se propone.

- Resuelvan el sistema de ecuaciones. Completen la tabla y grafiquen los datos.

$$4x + 2y = 44$$

$$16x + 8y = 176$$

x	y =	x	y =



- ¿Qué valor de x es la solución? _____
 - ¿Qué valor de y es la solución? _____
 - ¿Cuántas soluciones tiene el sistema de ecuaciones? _____
 - ¿Qué cambios harías para que el sistema tuviera solución? _____
- Modifiquen una de las ecuaciones para que haya un par de respuestas únicas, tabulen y grafiquen en su cuaderno. Compartan con el resto del grupo la modificación realizada.

Gráficas de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

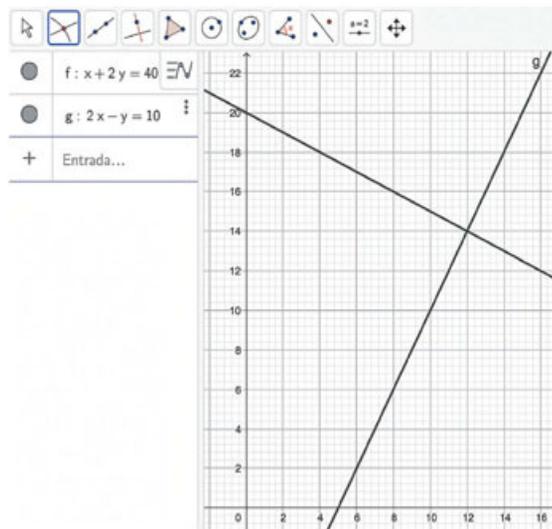
En esta sección aprenderás a graficar sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas con apoyo de GeoGebra.

1. Lee la situación y haz lo que se pide.

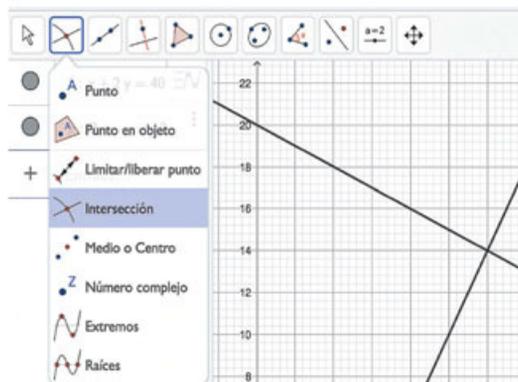
En una cafetería, por un té y dos cafés se pagan \$40, mientras que el precio de dos té menos el del café es igual a \$10. ¿Cuál es el precio de un té y cuál el de un café?

- ¿Cómo obtendrías la respuesta? _____
- Utiliza las literales x y y para representar la situación. ¿Cuántas ecuaciones obtuviste? Escríbelas. _____

2. Haz lo siguiente.



- Ingresa a la página www.geogebra.org/classic.
- En la barra lateral izquierda, anota una de las ecuaciones que obtuviste en el inciso anterior y presiona Enter. Haz lo mismo para la otra ecuación. Deberás obtener una construcción como la de la imagen de la izquierda.
- Elige la herramienta Intersección en el segundo ícono (de izquierda a derecha) superior y haz clic sobre una de las rectas, después sobre la otra. Del lado izquierdo aparecerán las coordenadas del punto de intersección de las rectas.



- ¿Cuáles son los valores de x y y en el punto de intersección de las rectas? _____
- ¿Cómo se relaciona lo anterior con la respuesta del problema? ¿Cuál es la solución? _____

3. Haz lo que se solicita.

- a) En una nueva ventana de GeoGebra, grafica las rectas del sistema de ecuaciones del siguiente problema.

Dos galletas de avena y un chocolate caliente cuestan \$20, mientras que ocho galletas iguales y cuatro chocolates calientes valen \$40.

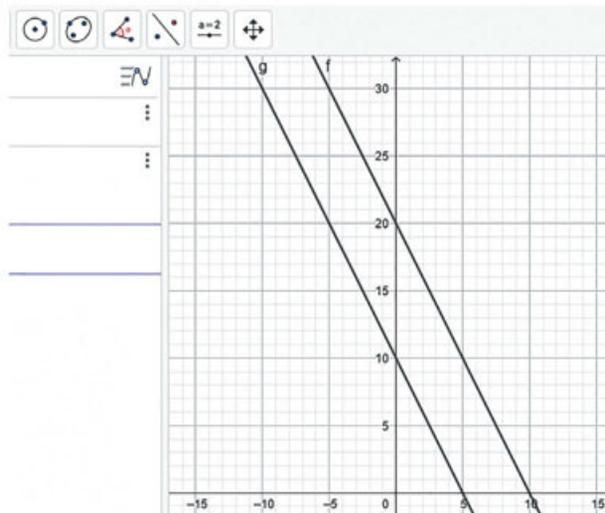
- b) Revisa que tu gráfica sea como la que se muestra en la imagen de la derecha. Si no es así, revisa las ecuaciones que planteaste en el inciso anterior y corrígelas.

- c) Contesta.

- i. ¿Con estas rectas se puede hallar una solución a la situación planteada?

¿Por qué? _____

- ii. ¿Qué significa la respuesta anterior en la situación planteada? _____



4. Representa el sistema de ecuaciones correspondiente a la siguiente situación.

En la misma cafetería, dos panqués y un sándwich cuestan \$42, mientras que cuatro panqués más dos sándwiches cuestan \$84.

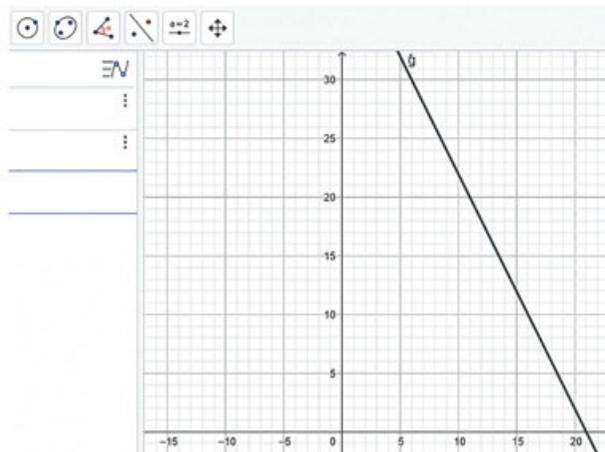
- a) Verifica que tu gráfica sea como la que se muestra del lado derecho. De no ser así, verifica y corrige las ecuaciones que usaste para trazarla.

- b) Responde.

- i. ¿En cuántos puntos se intersecan las rectas?

- ii. ¿Qué significa lo anterior en el contexto de la situación? _____

- iii. ¿Cuáles podrían ser los precios de los productos? Menciona al menos dos posibilidades y explica cómo los obtuviste. _____



- Compara tus resultados con los de tus compañeros. Corrige si lo consideras necesario.

Construcción del concepto de igualdad



En parejas, analicen la situación y respondan.

1. En un cine hay 700 personas entre adultos y niños. El costo de un boleto de adulto es de \$44 y de niño, \$35. Si se juntaron \$27 200, ¿cuántos adultos y cuántos niños hay en el cine?
 - a) ¿Cuántas incógnitas hay en el problema? ¿Cuáles son? _____
 - b) ¿Cómo representarían cada una de estas incógnitas? _____
 - c) ¿Pueden utilizar la misma representación para cada incógnita? ¿Por qué? _____
 - d) Escriban el sistema de ecuaciones que representa la situación.
 - e) ¿Cuántos adultos y niños hay en el cine? _____

- Comparen sus procedimientos y sus resultados con los de otros compañeros.



Resuelvan en parejas.

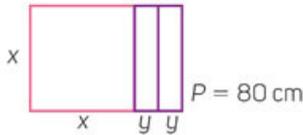
1. Retomen la actividad inicial. Del sistema de ecuaciones que escribieron, elijan una variable y despéjenla en ambas ecuaciones.

Ecuación 1: _____ Ecuación 2: _____

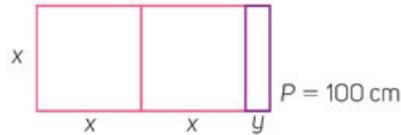
- a) ¿Por qué consideran que se despeja la misma literal en las dos ecuaciones? _____
 - b) ¿Qué tienen en común los despejes? _____
 - c) Igualen las dos expresiones despejadas: _____
 - d) ¿Cuántas incógnitas y ecuaciones obtuvieron? _____
 - e) Resuelvan la ecuación. ¿Qué resultado obtuvieron? _____
 - f) ¿Qué significa este resultado? _____
 - g) Sustituyan el valor encontrado en una de las ecuaciones originales: _____
 - h) ¿Qué representa ese valor? _____
- Comparen sus procedimientos y sus resultados con los de otras parejas. Validen sus resultados en ambas ecuaciones. Despejen la otra incógnita y observen si obtienen los mismos resultados.

2. Se tienen dos trozos de cartulina rectangulares con las dimensiones que se muestran en las figuras. Si el perímetro de la primera es de 80 cm y el de la segunda es de 100 cm, ¿cuánto miden la longitud y la anchura de cada una?

Rectángulo 1



Rectángulo 2



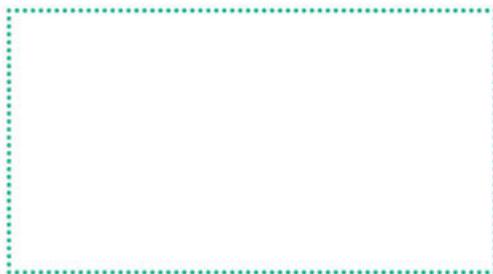
- a) Representen algebraicamente el perímetro de cada rectángulo.



- b) Si dividen entre 4 la ecuación del rectángulo 1, ¿se alterará el resultado? _____
- c) Dividan la ecuación del rectángulo 2 entre 2 para obtener una ecuación equivalente: _____
- d) Despejen la misma variable en ambas ecuaciones: _____
- e) Igualen ambas expresiones y resuelvan la ecuación.



- f) Si la expresión dice $y = 20 - x$, ¿cuánto vale y ? _____
- g) ¿Se obtendría el mismo valor de y si se despejara en una de las ecuaciones originales? Compruébalo.



- h) ¿Cuánto miden la base y la altura del rectángulo 1? _____
- i) ¿Cuánto miden la base y la altura del rectángulo 2? _____

- Validen con otra pareja sus procedimientos y sus resultados. Redacten en su cuaderno las características del método de igualación.

Uso de las propiedades de la igualdad

Lee la situación y contesta.

1. En un rectángulo, el doble del largo menos el triple del ancho es 8 cm y el triple del largo más el doble del ancho es 25 cm. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

a) ¿Cuáles son las incógnitas del problema? _____

b) Representa algebraicamente la situación.



c) Despeja la misma variable en ambas ecuaciones.

Ecuación 1



Ecuación 2



d) ¿Cómo interpretan el significado de que la misma incógnita esté despejada en ambas ecuaciones? Pide a tu profesor que valide el análisis. _____

e) ¿Cómo resuelves la ecuación? Discutan en parejas y realicen el procedimiento que consideren adecuado. _____

f) Determina el valor de las variables.



g) ¿Cómo comprobarías que tus resultados son correctos? _____

- Compara con el grupo tus respuestas y procedimientos. Luego, argumenten cada una de ellas y lleguen a acuerdos en común.

Otras fuentes

En www.esant.mx/ecsema2-027 se explica la aplicación de la propiedad distributiva al resolver ecuaciones.

Método de igualación

El **método de igualación** consiste en despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones e igualar las expresiones que resulten. Podemos suponer que ambas valen lo mismo; esa es la base para afirmar que pueden ser igualadas. Al igualar se forma una ecuación con una incógnita que podemos resolver despejándola. Una vez obtenido el resultado, podemos sustituirlo en alguna ecuación original para calcular el valor de la otra incógnita.

Por ejemplo, para resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 5x + y &= 28 \\ -7x + y &= -32 \end{aligned}$$

se despeja la misma incógnita (y) en ambas ecuaciones obteniendo $y = 28 - 5x$; $y = -32 + 7x$; se igualan estas dos expresiones para obtener una ecuación con una sola incógnita:

$$28 - 5x = -32 + 7x$$

Resolvemos esta ecuación y obtenemos $x = 5$. Sustituimos este valor en cualquiera de las ecuaciones del sistema, por ejemplo en la primera y obtenemos $y = 28 - 5(5) = 3$. De modo que la pareja de valores $x = 5$, $y = 3$ es la solución del sistema.

¿Cómo vamos?

Hagan en equipos lo que se pide.

1. El boleto de admisión para un adulto en un juego fue de \$10 y el de niño, de \$5. Asistieron al juego 250 personas y se recaudaron \$2 100. ¿Cuántos adultos y cuántos niños asistieron?

- a) ¿Cuáles son las incógnitas del problema? _____

- b) Representen algebraicamente la situación y resuélvanla con el método de igualación. ¿Cuáles son los valores de x y y ? _____

2. El día del estudiante, los alumnos del grupo A compraron hamburguesas y refrescos. Un equipo compró 5 hamburguesas y 3 refrescos y pagó en total \$285. Otro equipo compró, a los mismos precios, 2 hamburguesas y 3 refrescos y pagó \$150. ¿Cuánto costó cada hamburguesa y cuánto cada refresco?

- a) ¿Cuáles son las incógnitas del problema? _____

- b) Representa algebraicamente la situación y resuélvela con el método de igualación. ¿Cuáles son los valores de x y y ? _____

- Comenten sus respuestas con el resto del grupo y lleguen a conclusiones generales.

Análisis de procedimiento

Trabajen en parejas.

1. Analicen la situación y determinen si el procedimiento es correcto al calcular el precio de cada producto.

José fue a la tlapalería y compró 3 litros de pintura y 2 litros de barniz, por los cuales pagó \$480 en total. En su segunda compra, por 6 litros de barniz y $7\frac{1}{2}$ litros de pintura iguales que los de la primera compra, pagó \$1 260. ¿Cuánto cuesta un litro de pintura y cuánto uno de barniz?

- i. Identifico las variables del problema: p = precio de un litro de pintura
 b = precio de un litro de barniz

- ii. Expreso el sistema de ecuaciones que representa la situación:

$$\begin{aligned} 3p + 2b &= 480 \\ 6p + 7b &= 1260 \end{aligned}$$

- iii. Despejo la misma incógnita en ambas ecuaciones:

$$p = \frac{480 - 2b}{3} \text{ y } p = \frac{1260 - 7b}{6}$$

- iv. Igualo ambos despejes:

$$\frac{480 - 2b}{3} = \frac{1260 - 7b}{6}$$

- v. Resuelvo:

$$\begin{aligned} 3\left(\frac{480 - 2b}{3}\right) &= 6\left(\frac{1260 - 7b}{6}\right) \\ 480 - 2b &= 1260 - 7b \\ 7b - 2b &= 1260 - 480 \\ 5b &= 780 \\ b &= \frac{780}{5} \end{aligned}$$

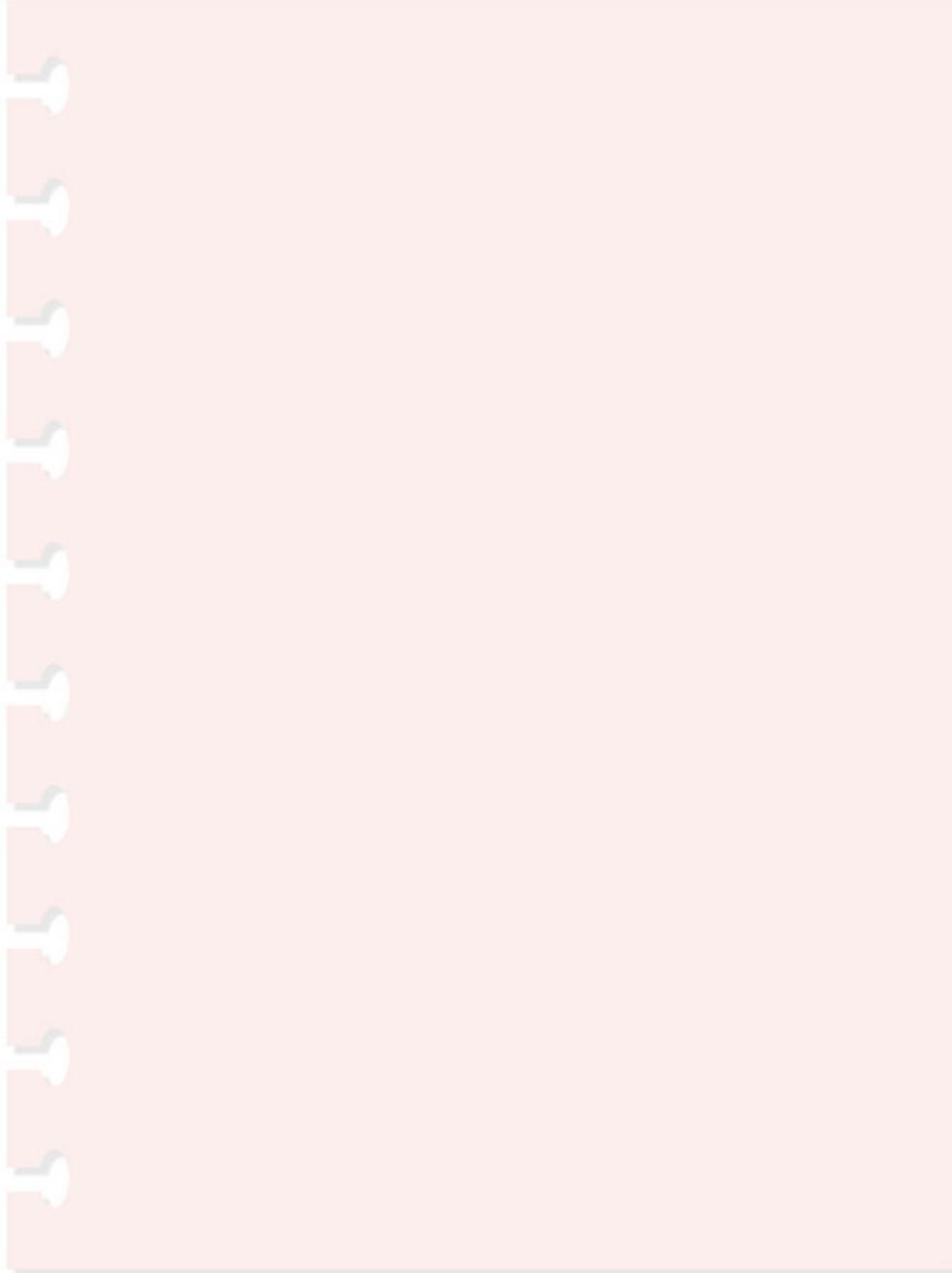
- vi. Por tanto, $b = 156$. Es decir, el litro de barniz cuesta \$156.
- vii. Sustituyendo el valor de b en la primera ecuación, tenemos que:

$$\begin{aligned} 3p + 2(156) &= 480 \\ 3p + 312 &= 480 \\ 3p &= 480 - 312 \\ p &= \frac{168}{3} = 56. \text{ El litro de pintura cuesta } \$56. \end{aligned}$$

- Si existe un error en el procedimiento, corrígelo y sugiere cómo evitarlo.

Resuelvan en parejas, por el método de igualación.

1. Manuel compró 3 cobertores y 2 cobijas y pagó \$1 300 en total. Carlos compró 5 cobertores y 6 cobijas iguales y pagó en total \$2 700. ¿Cuál es el precio de cada artículo?



- a) ¿Cuál es el precio de un cobertor? _____
- b) ¿Cuál es el precio de una cobija? _____

- Comparen sus respuestas y sugerencias de procedimiento con las del resto del grupo. Con ayuda del profesor, lleguen a conclusiones generales.

Método de sustitución y de suma y resta



Lee el problema y contesta.

1. Un veterinario cuenta con 56 galletas para premiar a sus mascotas. En total tiene 10 animales entre perros y gatos, y a cada perro le ofrece 6 galletas y a cada gato, 5.
¿Cuántos perros y cuántos gatos tiene?

- a) ¿Cuáles son las incógnitas? _____
- b) Escribe el sistema de ecuaciones que representa la situación.

- c) Elige la ecuación que consideres más sencilla, despeja una incógnita y escríbela. _____
- d) ¿En qué te basaste para elegir la ecuación para realizar el despeje? _____

- e) Sustituye la ecuación con la incógnita despejada en la otra ecuación. Escribe cómo quedaría: _____

- f) Aplica la propiedad distributiva y resuelve la ecuación.

- g) ¿Qué representa este resultado? _____
- h) Sustituye el valor encontrado en una de las ecuaciones. _____

- i) ¿Qué sucede si en vez de sustituir el valor de la incógnita encontrada en una de las ecuaciones originales se sustituye en la ecuación despejada? Compruébalo. _____

- j) ¿Por qué será necesario comprobar los valores en las dos ecuaciones originales? _____

- Compara tu procedimiento y tus resultados con los de otro compañero. Validen sus resultados en ambas ecuaciones y con ayuda del profesor anoten las características más importantes de este método.

Método de sustitución

Resuelvan en parejas.

- Un automovilista compró 3 envases de un litro y 4 de medio litro de aceite para motor y en total pagó \$340. Por un envase de un litro y 3 de medio litro pagará \$180. ¿Cuánto cuesta cada envase de aceite?
 - ¿Cuáles son las incógnitas? _____
 - Escriban en su cuaderno, el sistema de ecuaciones que representa la situación.
 - Despejen una incógnita en la ecuación que consideren más sencilla y escribela.
 - ¿Por qué eligieron despejar esa incógnita en esa ecuación? _____
 - Sustituyan la expresión en la otra ecuación. _____
 - Apliquen la propiedad distributiva y resuelvan en su cuaderno la ecuación.
 - Sustituyan el valor encontrado en una de las ecuaciones. _____
- Validen sus resultados en ambas ecuaciones y compárenlos. Analicen lo que sucedería si despejaran la otra incógnita. Escriban el resultado de su análisis en su cuaderno.

Método de sustitución

El **método de sustitución** consiste en despejar una incógnita de una de las ecuaciones y sustituir en la otra ecuación el valor hallado. De este modo se tiene una sola ecuación con una sola incógnita y se puede resolver despejando.

Por ejemplo, en el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2x + 4y &= 24 \\ x + 7y &= 27 \end{aligned}$$

Despejamos x en la segunda ecuación: $x = 27 - 7y$; sustituimos esta expresión en la primera ecuación: $2(27 - 7y) + 4y = 24$; realizando las operaciones y agrupando los términos semejantes obtenemos la ecuación: $54 - 10y = 24$, cuya solución es $y = 3$. Ahora sustituimos este valor en la segunda ecuación: $x = 27 - 7(3)$, de donde concluimos que $x = 6$. También se puede comenzar despejando primero la incógnita y y sustituyéndola en la otra ecuación.

Otras fuentes

Utiliza el siguiente recurso para trabajar el método de sustitución:
www.esant.mx/ecsema2-028.

¿Cómo vamos?

- Inventa un problema que se pueda resolver con cada sistema de ecuaciones.

a) $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ 3x + 4y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x - y = 7 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases}$

Método de suma y resta

Realicen la actividad en parejas.

1. Dos familias visitaron un museo. Una familia pagó \$545 por un boleto de adulto y cuatro de niño y la otra familia pagó \$565 por dos boletos de adulto y tres de niño. ¿Cuánto cuesta cada boleto?

a) ¿Cuáles son las incógnitas? _____

b) Si representamos con $x =$ el precio del boleto de un adulto y $y =$ el precio de un boleto de niño, ¿cuáles son las ecuaciones que se forman?

c) Multipliquen la primera ecuación por 2 y la segunda por 1. Igualen con respecto a los coeficientes de x .

d) Multipliquen por -1 una de las ecuaciones. Hagan las sumas y reduzcan términos semejantes.

e) ¿Siempre se tendrá que multiplicar por -1 o de qué depende? _____

f) ¿Por qué consideran que se requiere tener signos diferentes? _____

g) Escriban en cada casilla de la tabla el coeficiente, su incógnita con su signo y el resultado de cada ecuación. Reduzcan términos semejantes por columnas.

		=	
		=	

h) Escriban la nueva ecuación resultante: _____

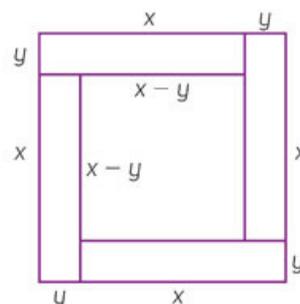
i) Resuelvan la ecuación.

j) ¿Qué representa este resultado? _____

k) Sustituyan este valor en cualquiera de las ecuaciones. _____

- Para comprobar que los resultados son correctos, sustitúyanlos en ambas ecuaciones y observen si se satisface la igualdad en ambas. Comparen sus resultados con los de otras parejas y comenten qué características distinguen a este método de los anteriores.

2. El perímetro del cuadrado exterior de la figura es de 100 cm y el del cuadrado interior, de 60 cm. Hallen los valores de x y y .



a) ¿Cuánto mide por lado el cuadrado exterior? _____

b) ¿Cómo representan algebraicamente su perímetro? _____

c) ¿Cómo representan el perímetro del cuadrado interior? _____

d) ¿Cuál sistema de ecuaciones representa ambos perímetros? _____

e) ¿Se tienen que igualar los coeficientes de alguna incógnita para resolverla? _____

f) ¿Tendrían que multiplicar por -1 alguna ecuación? _____

g) ¿Cómo queda la ecuación al reducir los términos semejantes? _____

h) Resuelvan la ecuación.

i) Sustituyan en su cuaderno, el valor en una de las ecuaciones.

- Comprueben los resultados en ambas ecuaciones y comenten sus respuestas.

Método de suma y resta

El **método de suma y resta** consiste en operar con las ecuaciones para eliminar alguna de las variables, es decir, reducir términos semejantes, con la intención de encontrar una ecuación lineal con una incógnita. Para ello se deben igualar los coeficientes de la incógnita que deseamos reducir. Por ejemplo,

$$\begin{array}{ccc}
 & \begin{array}{c} 1 \\ \longrightarrow \\ \boxed{\times(-4)} \end{array} & \begin{array}{c} 2 \\ \hline 3 \end{array} \\
 \begin{array}{l} x + 5y = 11 \\ 4x + 3y = 10 \end{array} & & \begin{array}{l} -4x - 20y = -44 \\ 4x + 3y = 10 \\ \hline 0x - 17y = -34 \end{array} \\
 & & y = \frac{-34}{-17} = 2
 \end{array}$$

1. Se multiplican cada una de las ecuaciones del sistema por un número que haga que los coeficientes de alguna de las incógnitas sean iguales.
2. Sumamos las dos ecuaciones y agrupamos términos semejantes.
3. Resolvemos y encontramos el valor de la incógnita.
4. Sustituimos el valor en la primera ecuación del sistema original: $x + 5(2) = 11$
5. Finalmente, resolvemos esta ecuación para encontrar el valor de x ; $x = 1$.

Análisis de procedimiento

Trabajen en parejas.

- Analicen los pasos empleados para resolver el sistema de ecuaciones.

$$5w + 3h = 86$$

$$7w + 8h = 166$$

- Despejamos cualquier incógnita en cualquiera de las ecuaciones.

$$w = \frac{166 + 8h}{7}$$

- Sustituimos el despeje en la otra ecuación.

$$5\left(\frac{166 + 8h}{7}\right) + 3h = 86$$

- Resolvemos.

$$\frac{830 + 40h}{7} + 3h = 86$$

$$830 + 40h + 3h = 86(7)$$

$$830 + 43h = 602$$

$$43h = 602 - 830$$

$$43h = -228$$

$$h = \frac{-228}{43} = 5.3$$

- Sustituyendo el valor de la variable en el despeje del primer paso tenemos que:

$$w = \frac{166 + 8(5.3)}{7}$$

$$w = \frac{166 + 42.4}{7}$$

$$w = \frac{208.4}{7}$$

$$w = 29.77$$

- ¿Es correcto el resultado? Si existe un error en el procedimiento, corrígelo y sugiere una manera de evitarlo.

- Analicen los pasos que se realizaron para resolver el sistema de ecuaciones.

$$6m + 5n = 113$$

$$3n + 8m = 125$$

- a) Multiplicamos la segunda ecuación por -2 .

$$\begin{aligned} -2(3n + 8m) &= -2(125) \\ -6n - 16m &= -250 \end{aligned}$$

- b) Retomamos la primera ecuación y la que se obtuvo al multiplicar por -2 y resolvemos por el método de suma y resta.

$$\begin{array}{r} 6m + 5n = 113 \\ -6n - 16m = -250 \\ \hline 0m - 11n = 137 \end{array}$$

- c) Despejamos la variable en la ecuación resultante.

$$\begin{aligned} -11n &= 137 \\ n &= \frac{137}{-11} = -12.45 \end{aligned}$$

- d) Sustituimos el valor de la variable en cualquier ecuación.

$$\begin{aligned} 6m + 5n &= 113 \\ 6m + 5(-12.45) &= 113 \\ m &= \frac{175.5}{6} = 29.2 \end{aligned}$$

- e) ¿Es correcto el resultado? ¿Hay algún error en el procedimiento? _____

- Comenten sus resultados con el resto del grupo.



Resuelvan en parejas.

- Resuelvan en su cuaderno los sistemas de ecuaciones.

a) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x + 7y = 1 \\ 2x + 15y = 11 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x - y = -6 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + 5y = 11 \\ -x + 3y = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y = 14 \\ x - y = 3 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x + y = 10 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$

- Compartan sus resultados con el resto del grupo y, con asesoría de su profesor, concluyan las ventajas de resolver un sistema de ecuaciones por alguno de los métodos vistos en la secuencia.

Sistemas de ecuaciones 2×2



Trabajen en parejas y contesten.

- Un terreno rectangular tiene un perímetro de 380 m y mide 50 m más de largo que de ancho. ¿Cuáles son las dimensiones del terreno?
 - ¿Cuáles son las incógnitas? _____
 - ¿Qué sistema de ecuaciones representa la situación?



- ¿Qué características tiene el sistema de ecuaciones que escribieron? Sin resolverlo, ¿qué método les parece más eficiente usar? _____
¿Por qué? _____
- Compartan sus respuestas. Argumenten en grupo sobre qué método es el más pertinente para resolver el sistema de ecuaciones.

Método más pertinente



Realicen en parejas lo que se indica.

- Resuelvan el sistema anterior usando los tres métodos.

Sustitución	Igualación	Suma y resta

- Comprueben que sus respuestas cumplen con las condiciones del problema.
 - ¿Qué método les pareció más eficiente para resolver el problema? Argumenten su respuesta.
- Validen con otra pareja sus procedimientos y sus resultados y, de manera grupal, escuchen los argumentos sobre cuál método es más práctico para resolver el sistema y por qué lo consideran así.

¿Cómo vamos?

Analiza cada situación, resuelve en tu cuaderno los sistemas de ecuaciones y contesta.

1. En un deshuesadero hay tantos automóviles como motocicletas. El total de llantas de automóviles y motocicletas es de 1178. Si al triple de las llantas de automóviles se le restara el doble de las llantas de motocicletas, se obtendría 61. ¿Cuántos automóviles y motocicletas hay?

Sistema de ecuaciones	¿Qué método utilizarías para resolver el sistema de ecuaciones? ¿Por qué?	Solución

2. Alejandra y Eduardo fueron al cine y compraron dos helados y un refresco por \$75. Si se sabe que el refresco cuesta la mitad del precio de un helado, ¿cuál es el precio de un helado y cuál el de un refresco?

Sistema de ecuaciones	¿Qué método utilizarías para resolver el sistema de ecuaciones? ¿Por qué?	Solución

3. En un rectángulo, el doble del largo menos el triple del ancho es 12 cm y el doble del largo más el doble del ancho es 42 cm. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

Sistema de ecuaciones	¿Qué método utilizarías para resolver el sistema de ecuaciones? ¿Por qué?	Solución

4. A un evento asistieron 270 personas. Si los boletos de caballero costaban \$100 y los de dama \$80 y en total se recaudaron \$24 800, ¿cuántas mujeres y cuántos hombres asistieron al evento?

Sistema de ecuaciones	¿Qué método utilizarías para resolver el sistema de ecuaciones? ¿Por qué?	Solución

- Valida con el resto del grupo tus resultados. Socializa las razones por las que elegiste un método en lugar de los otros dos.

Solución de un sistema de ecuaciones (única, una infinidad o no existe)

En parejas lean la situación y realicen las actividades.

- Encuentren dos números tales que el quintuple del primero menos el triple del segundo dé como resultado 15 y, diez veces el primero menos seis veces el segundo dé como resultado 60.

Aprendo mejor

Estudia con un compañero. Cada uno escriba un problema similar a los realizados en clase e intercámbienlos. Revisen si los plantearon correctamente, si pudieron resolverlos y si las estrategias que siguieron para solucionarlos fueron eficientes.

- ¿Qué sistema de ecuaciones representa la situación?

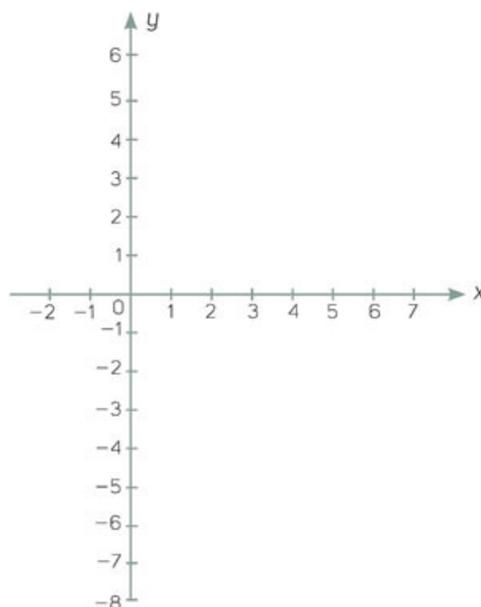
- ¿Qué método utilizarían para resolverlo? _____
- ¿Por qué? _____
- Resuelvan el sistema de ecuaciones.

- ¿Cuál es el resultado? _____
- ¿Qué significa? _____

- Completen las tablas y grafiquen el sistema de ecuaciones. Describan qué observan.

x	y =
1	
2	
3	
4	
5	
6	

x	y =
1	
2	
3	
4	
5	
6	



- Comparen sus gráficas con las de otra pareja y determinen si el sistema tiene o no solución.

Soluciones de un sistema de ecuaciones

Una ecuación lineal tiene como **conjunto solución todos los pares ordenados (x, y) que satisfacen la ecuación**. Cuando se trabaja con un sistema de ecuaciones lineales pueden ocurrir diversos casos: que el sistema tenga una solución única, que tenga una infinidad de soluciones o que no tenga solución.

3. Resuelvan utilizando el método más pertinente.

Encuentren dos números tales que su suma sea igual a 4 y que el triple del primero más el triple del segundo sea igual a 12.

- a) ¿Qué sistema de ecuaciones representa la situación?



- b) ¿Qué método es el más eficiente para resolver el sistema de ecuaciones?

¿Por qué? _____

- c) Resuelvan el sistema.



- d) ¿Qué resultado obtuvieron? _____ ¿Qué representa? _____

- e) ¿Consideran que si el sistema se resuelve con un método distinto al que eligieron pueden obtener una respuesta distinta?

- f) En su cuaderno, usen otro método para resolver el sistema.

- g) ¿Obtuvieron una respuesta diferente? Argumenten su respuesta.

Otras fuentes

En el siguiente vínculo se muestran las diferentes soluciones de un sistema de ecuaciones lineales:

www.esant.mx/ecsema2-029

¿Cómo vamos?

Haz lo que se pide.

1. Escribe un problema que se pueda resolver con los sistemas de ecuaciones dados y encuentra el resultado.

a) $x + y = 23$
 $2x + 5y = 70$

b) $x + y = 2$
 $2x + 2y = 4$

c) $5x + y = 4$
 $10x + 2y = 12$

- Comenta con el resto del grupo los problemas que escribiste y lleguen a conclusiones generales. En tu cuaderno, y con ayuda del profesor, determina las características de los sistemas que no tienen solución, de los que tienen una infinidad y los que tienen una sola solución.

Sesión 2. Resuelves problemas de sistemas de ecuaciones 2×2 . Identificas y argumentas las diferencias entre la solución de una ecuación lineal con una incógnita y la solución (única, un número infinito de soluciones o no existe) de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Análisis de procedimiento

Trabajen en parejas.

- Analicen los pasos que se realizaron para resolver el sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} 3y + 5x &= 71 \\ x &= y - 5 \end{aligned}$$

- Despejamos cualquier incógnita en la primera ecuación.

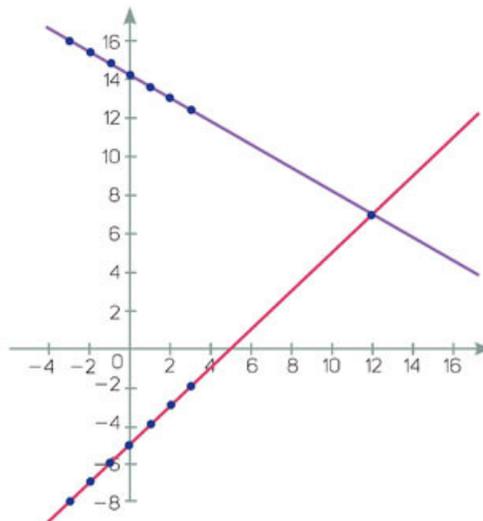
$$x = \frac{71 - 3y}{5}$$

- Obtenemos los valores de una incógnita a partir de la otra.

y	$x = \frac{71 - 3y}{5}$
-3	16
-2	15.4
-1	14.8
0	14.2
1	13.6
2	13
3	12.4

y	$x = y - 5$
-3	-8
-2	-7
-1	-6
0	-5
1	-4
2	-3
3	-2

- Graficamos los valores de la tabla.



- Por la intersección de las gráficas, podemos observar que los valores de las variables son $x = 12$ y $y = 7$.
- ¿Es correcta la solución del sistema? _____

- Comparen sus conclusiones con las de otra pareja y lleguen a acuerdos.

En parejas, analicen los siguientes sistemas de ecuaciones y las opciones en torno a estos. Elijan aquella con la que estén más de acuerdo y argumenten por qué.

1. Resuelvan los sistemas de ecuaciones eligiendo una de las opciones que se ofrecen en los recuadros. Comprueben si eligieron la más práctica.

a) $-5m + 3y = 1$
 $5m - 6y = -8$

Opción 1. Es más fácil multiplicar la primera ecuación por 2 para reducir las y .

Opción 2. Es más fácil eliminar directamente las m , pues tienen coeficientes iguales con signo contrario.

Explicación: _____

b) $y = 35 + x$
 $y = 51 - x$

Opción 1. Es más fácil usar el método gráfico porque ya está despejada la y .

Opción 2. Es más fácil usar el método de igualación porque ya están despejadas las y .

Explicación: _____

c) $8w + 4z = 16$
 $w = -4z - 5$

Opción 1. Es más fácil usar el método de suma y resta porque la variable z tiene coeficientes iguales con signo contrario.

Opción 2. Es más fácil usar el método de sustitución porque ya está despejada la w .

Explicación: _____

- Comparen sus elecciones y sus argumentos con el resto del grupo.

Variación inversa



Analiza la situación y contesta.

- Un tren recorre 405 km de distancia de una ciudad a otra.
 - ¿Qué sucede con el tiempo que el tren tarda en llegar si aumenta su velocidad?

 - ¿Qué sucederá si el tren disminuye su velocidad? _____

Expresión algebraica de variación inversa



Resuelvan en parejas.

- Escriban en la tabla la relación que hay entre los elementos.

	Relación
Entre el tiempo y la distancia	
Entre el tiempo y la velocidad	
Entre la distancia y la velocidad	

- ¿Cuánto tiempo tarda en llegar si viaja a velocidad promedio de $40 \frac{\text{km}}{\text{h}}$? Argumenten su respuesta. _____
 - ¿Y si viaja a velocidad promedio de $80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$? _____
 - ¿Y si viaja a velocidad promedio de $20 \frac{\text{km}}{\text{h}}$? _____
 - Viajando a velocidad promedio de $100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, ¿cuánto tarda en llegar? _____
 - ¿Qué sucede con el tiempo que tardará el tren en llegar, si la velocidad a la que viaja se acerca cada vez más a 0 km/h? _____
- Escriban una expresión algebraica que represente la relación entre el tiempo y la distancia al aumentar o disminuir la velocidad del tren. _____
- Validen sus respuestas con la expresión algebraica propuesta y úsenla para calcular el tiempo que tardará el tren en llegar con distintas velocidades. Comparen sus procedimientos y sus resultados con los de otras parejas y expongan sus argumentos para llegar a una conclusión común.

Trabajen en equipos.

3. Un triángulo tiene de área 20 cm^2 . Expresen, algebraicamente, la altura del triángulo.

Si la base del triángulo aumenta 2 cm...

- a) ¿Qué sucede con su altura si la medida del área se conserva? _____

- b) ¿Qué sucede con la altura si la base disminuye 5 cm y la medida del área se conserva? _____

- c) ¿Qué expresión algebraica permite calcular el área del triángulo?



- d) ¿Qué expresión algebraica expresa cómo varía la altura del triángulo (h) cuando su base (b) varía?



- Comprueben que sus expresiones permiten encontrar el área y la altura del triángulo.

4. Elijan una figura diferente al triángulo. Determinen su área y escriban una expresión que permita observar la variación del área al variar una de sus medidas. Dibújela en el siguiente espacio.



- Muestren sus figuras y sus resultados al resto del grupo. Con ayuda del profesor, lleguen a conclusiones generales.

Gráfica de proporcionalidad inversa

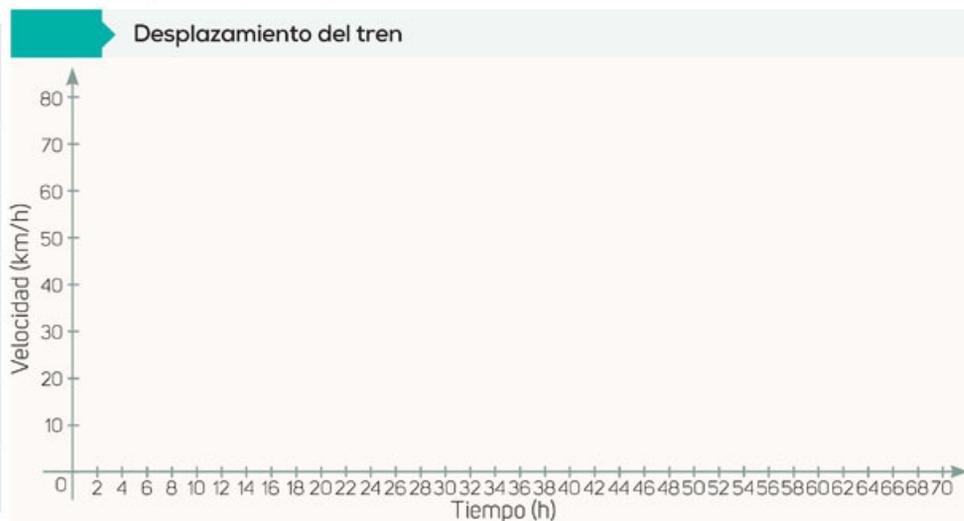
Realicen en parejas lo que se indica.

- Retomen la situación del tren de la actividad inicial.
 - Describan el procedimiento para determinar cuánto tarda el tren en llegar a la estación si viaja a velocidad constante de $10 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. _____

 - ¿Cuánto tarda en recorrer la distancia entre las dos ciudades a una velocidad constante de $10 \frac{\text{km}}{\text{h}}$? _____
 - Usen un procedimiento distinto al anterior y determinen:
 - ¿Cuánto tardará en llegar si viaja a $20 \frac{\text{km}}{\text{h}}$? _____

 - ¿Cuánto tardará en recorrer la misma distancia a $5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$? _____
- Comparen sus respuestas y sus procedimientos con los de otras parejas. Retomen la expresión algebraica que determinaron para saber cuánto tardará en recorrer la distancia entre las dos ciudades si la velocidad cambia.
- Completen la tabla empleando diferentes velocidades a las que se desplaza el tren y realicen la gráfica que la representa.

Velocidad ($\frac{\text{km}}{\text{h}}$)	Tiempo empleado (horas)
5	
10	
20	
40	
60	
70	



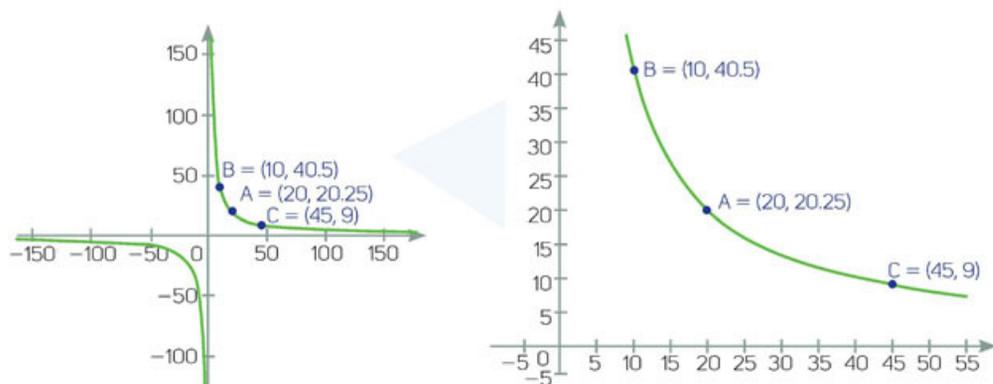
- ¿Qué elementos consideraron al realizar la gráfica? _____

 - ¿Qué representa el eje x? _____
 - ¿Qué representa el eje y? _____
- Comparen sus gráficas y sus tablas con las de otras parejas y verifiquen que sus gráficas hayan pasado por los mismos puntos. Comenten los pasos empleados para pasar de la tabla a la gráfica.

Propiedades de la gráfica

En parejas, analicen las gráficas y respondan.

1. La imagen de la derecha representa una región de la gráfica de la izquierda.



- a) ¿A qué cuadrante de la gráfica se le hizo un acercamiento? _____
- b) ¿Qué valor toman los datos en este cuadrante? _____
- c) Para generar la gráfica, se usó la expresión $405 = vt$, que representa la situación del tren de la actividad inicial de la secuencia, y se tabuló usando algunos de los valores.

...	...
10	40.5
20	20.25
45	9
...	...

- i. ¿Qué representan los valores de la primera columna? _____
- _____
- ii. ¿Qué representan los valores de la segunda columna? _____
- _____
- d) Tomando como referencia las preguntas anteriores y el contexto del problema, dialoguen con el grupo y respondan:
- i. ¿Qué representa la parte de la gráfica que se encuentra en el cuadrante III?
- _____
- _____
- ii. ¿Por qué en la gráfica no se observa un corte con alguno de los ejes? _____
- _____
- _____

- Escriban sus conclusiones en su cuaderno. Posteriormente tendrán oportunidad de ratificarlas o modificarlas.

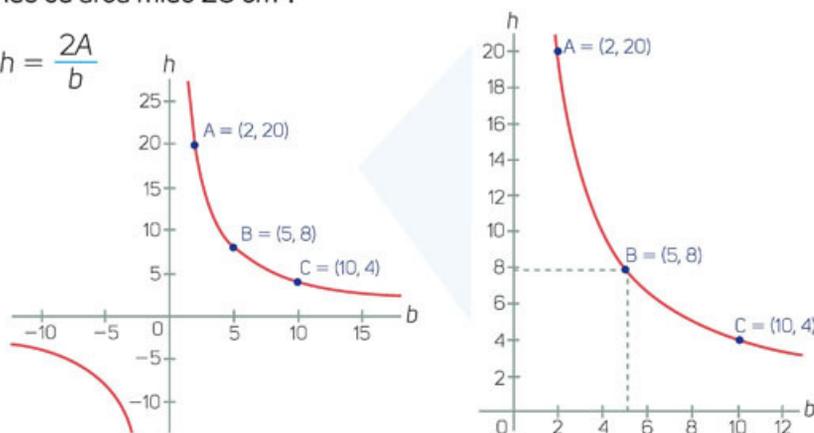
Hipérbola

Es una **curva abierta** que se aproxima indefinidamente a los ejes **sin tocarlos**. En los casos estudiados en este ciclo escolar, surge de una expresión algebraica como $y = \frac{a}{x}$ y representa ejemplos donde ocurre la **variación inversa**.

2. Analicen la expresión algebraica, la tabla, la gráfica y el acercamiento a uno de los cuadrantes que representan la forma en que varía la altura de un triángulo al variar la medida de su base cuando su área mide 20 cm^2 .

- Expresión algebraica: $h = \frac{2A}{b}$

...	...
2	20
5	8
10	4
...	...



- ¿Qué representan los valores de la primera columna de la tabla? _____
 _____ ¿Y los de la segunda columna? _____
- ¿Cómo se representan en la gráfica algunos de los valores de la base y la altura del triángulo que cumplen con las condiciones dadas? _____

- ¿Pueden usar los valores del cuadrante III para resolver el problema? Argumenten su respuesta. _____
- ¿Por qué la gráfica no toca un eje del plano? ¿Qué significa esto en el contexto del problema? _____
- ¿Podría existir un punto $(0, 5)$ o $(10, 0)$ en el contexto del problema? ¿Por qué? _____

Otras fuentes

Usa el siguiente recurso para observar lo que ocurre al modificar el valor de una variable inversamente proporcional a otra: www.esant.mx/ecsema2-030.

¿Cómo vamos?

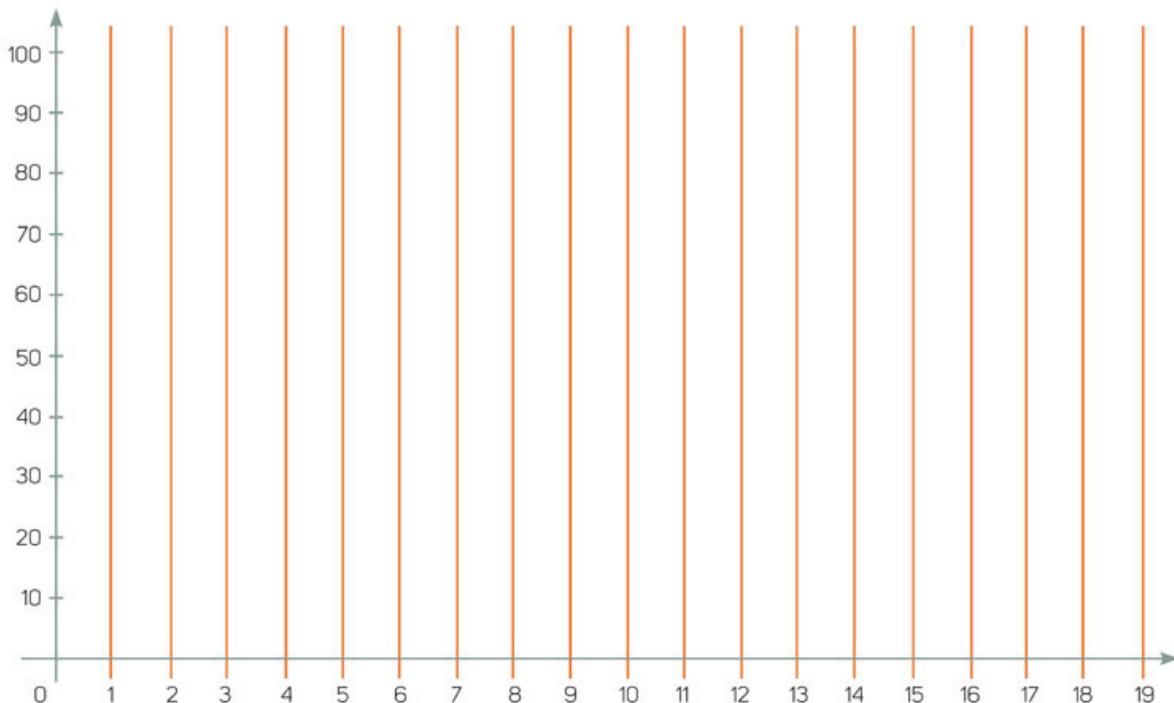
En parejas, hagan lo que se pide.

- Analicen la expresión, la tabla y la gráfica del problema que elaboraron en la actividad 4 de la sesión 1. Dialoguen sobre los valores que pueden tomarse en cuenta dependiendo del contexto del problema y los que no deben usarse. Con el resto del grupo, lleguen a conclusiones generales.

Propiedades de la variación

Lee las situaciones y haz lo que se pide.

1. Un albañil tarda 80 días en realizar un trabajo. ¿Cuánto tiempo tardarán 6 albañiles en concluir la misma tarea si trabajan todos al mismo ritmo?
 - a) En tu cuaderno, tabula los valores que relacionan el tiempo (en días) con el número de albañiles que se emplean.
 - b) En el plano cartesiano que se muestra, realiza la gráfica que representa los valores de tu tabla.



c) ¿La gráfica crece o decrece? _____ ¿Por qué? _____

d) Las franjas anaranjadas muestran los intervalos. Por ejemplo, de 1 a 2 o de 11 a 12.

i. ¿En qué intervalos la gráfica crece o decrece más rápidamente? _____

ii. ¿Cómo deduces lo anterior? _____

iii. ¿En qué intervalos la gráfica crece o decrece más lentamente? _____

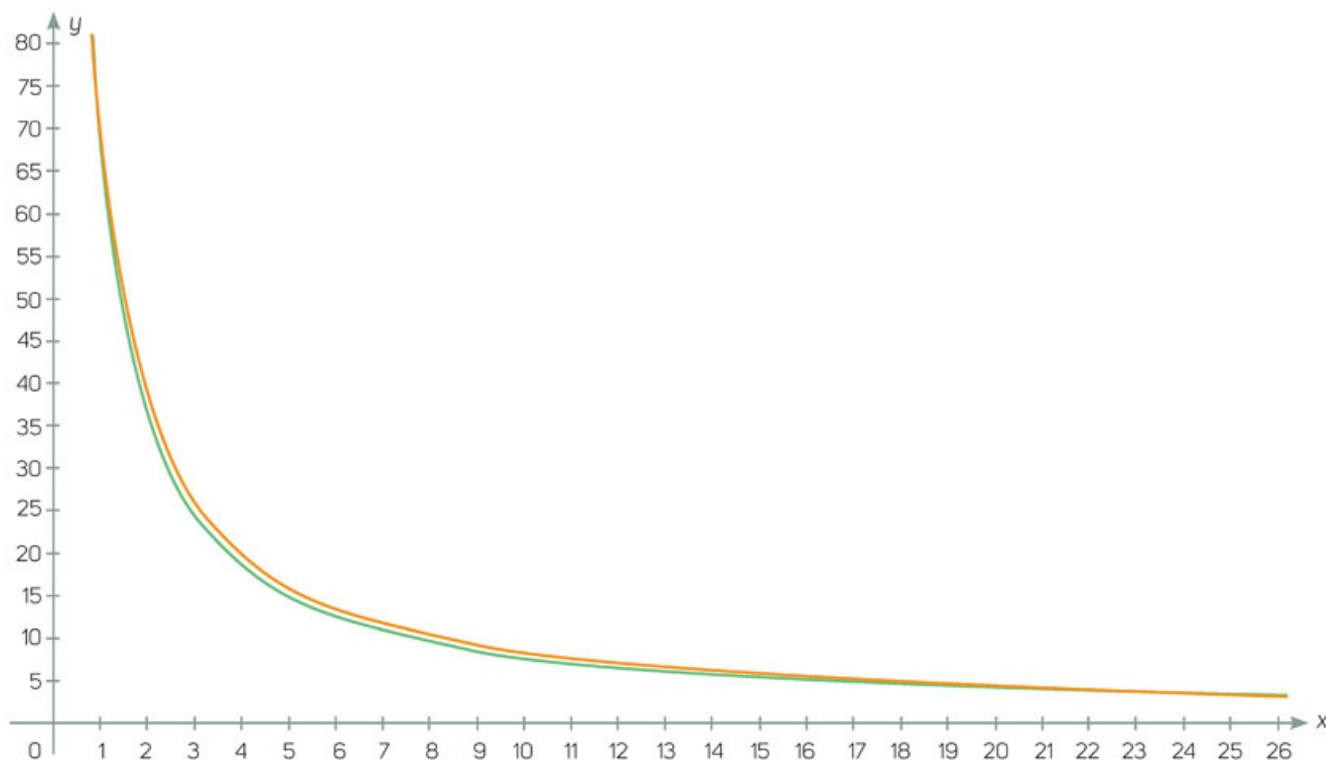
iv. ¿Cómo deduces lo anterior? _____

- Comenta tu respuesta con el grupo. Si tienen dudas, coméntenlas para resolverlas.



En parejas, trabajen lo que se pide.

1. Modifica los datos de la actividad inicial de esta sesión y traza la gráfica. ¿Los intervalos de crecimiento o decrecimiento siguen siendo los mismos para el más rápido y el más lento?
2. Las siguientes gráficas representan albañil del problema anterior y a otro que realiza su trabajo a un ritmo distinto y a más albañiles que trabajan al ritmo del primero y el segundo respectivamente.



- a) ¿Tiene sentido hablar de valores menores a uno para el eje de las equis? _____
¿Por qué? _____
- b) ¿Qué sucede con la función cuando x se aproxima a cero? _____

- c) ¿Cuánto tardarán cero albañiles en terminar cualquiera de las obras? _____

- d) ¿Por qué? _____

- e) ¿Sucede lo mismo en cualquiera de las gráficas? _____ ¿Por qué? _____

- Propongan con su profesor otra situación y respondan las preguntas. Analicen con todo el grupo cada respuesta.

Expresión algebraica de proporcionalidad inversa



Resuelve.

1. ¿Alguna vez has visto una ceremonia de pesaje en el boxeo?



La ceremonia de pesaje es un evento obligatorio que se lleva a cabo un día antes de una pelea, para verificar que los boxeadores cumplan con el límite de la división en la que se ha programado su combate. Cada peleador sube a la báscula en presencia de su rival, los representantes y las autoridades que sancionarán la contienda.

Este evento es obligatorio y si cada contendiente no está dentro del límite, la pelea se cancela. Aquel boxeador que no cumpla con el peso permitido es amonestado, e incluso puede llegar a perder la pelea.

- a) ¿Por qué consideras que es importante que los boxeadores se encuentren dentro del límite de peso? _____

- b) ¿Qué pasa si uno pega con más rapidez que otro? _____

- c) ¿Qué pasa si uno de ellos pesa mucho menos que su rival? _____

- Comenta tus respuestas con el resto del grupo.



Analicen y respondan en parejas.

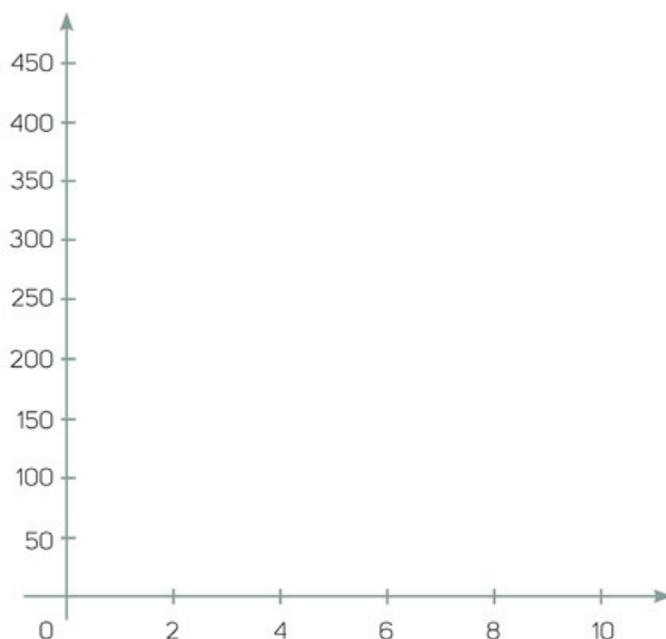
1. Seguramente entre los comentarios en el grupo mencionaron aspectos como “uno de ellos es más fuerte” o “tiene que ser más rápido que el otro”. Para calcular la fuerza (F) se dice que es igual al producto de la masa (m) por la aceleración (a), que se representa como $F = ma$.
 - a) ¿Qué expresión algebraica nos permite calcular la aceleración? _____
- Discutan con sus compañeros si la expresión algebraica es correcta y si puede considerarse de proporcionalidad inversa.

2. Un helicóptero debe llevar víveres a una comunidad que se encuentra a 940 km de distancia. Si viaja a $100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, ¿cuántas horas tardará en llegar a la comunidad?

a) Completen la tabla que muestra la variación del tiempo al cambiar la velocidad.

Velocidad (kilómetros por hora)	100	150	200	250	300	350	400
Tiempo (horas)							

b) Realicen la gráfica que representa los datos de la tabla.



- Comparen su gráfica con la de otra pareja; en caso de que sea diferente, corroboren los valores de su tabla.

c) ¿Qué representa el eje de las y ? _____ ¿Y el eje de las x ? _____

d) ¿Qué pasa con el tiempo cuando la velocidad aumenta? _____

e) ¿Consideran que el problema y la gráfica representan una situación de variación inversa? Argumenten su respuesta. _____

f) ¿Qué expresión algebraica modela el problema? _____

- Realicen un resumen de lo que significa para ustedes la variación inversa.

Problemas de variación inversa

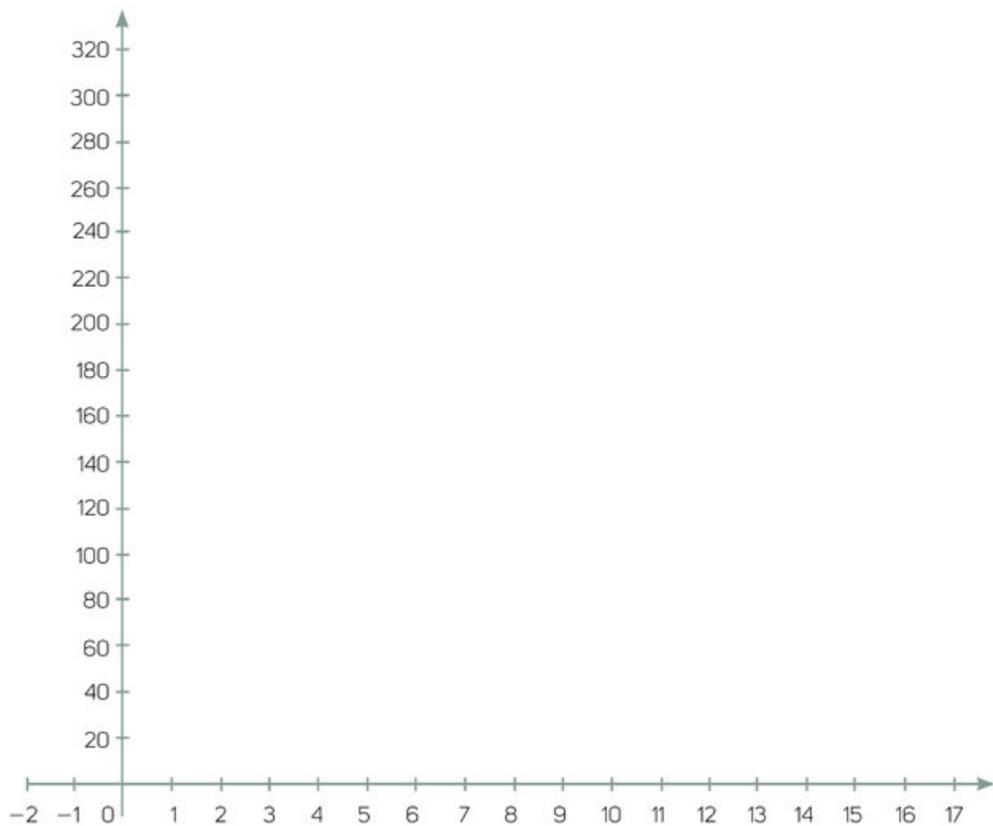
Completa la tabla y realiza la gráfica que la representa.

- Una constructora ha contratado a 10 albañiles para que terminen una obra en 60 días.
 - ¿Cuántos albañiles se necesitan para terminar la obra en 5 días, si todos trabajan al mismo ritmo?

Aprendo mejor

No todos aprendemos con la misma facilidad, ni de la misma manera. Por ello, es importante compartir las dificultades que enfrentaron al resolver una actividad y las estrategias que siguieron para resolverlas. Este tipo de intercambio favorece el aprendizaje autónomo.

Albañiles																				
Días																				



- ¿Qué información se representa en cada uno de los ejes? _____

- ¿Cuántos albañiles serán necesarios para terminar la obra en 5 días? _____
¿En qué parte de la gráfica puedes observar la respuesta? _____

- ¿Qué expresión algebraica modela el problema? _____

- Compara tu gráfica con la de otro compañero y argumenta las razones de considerarla como variación inversa.

Analicen y respondan en parejas.

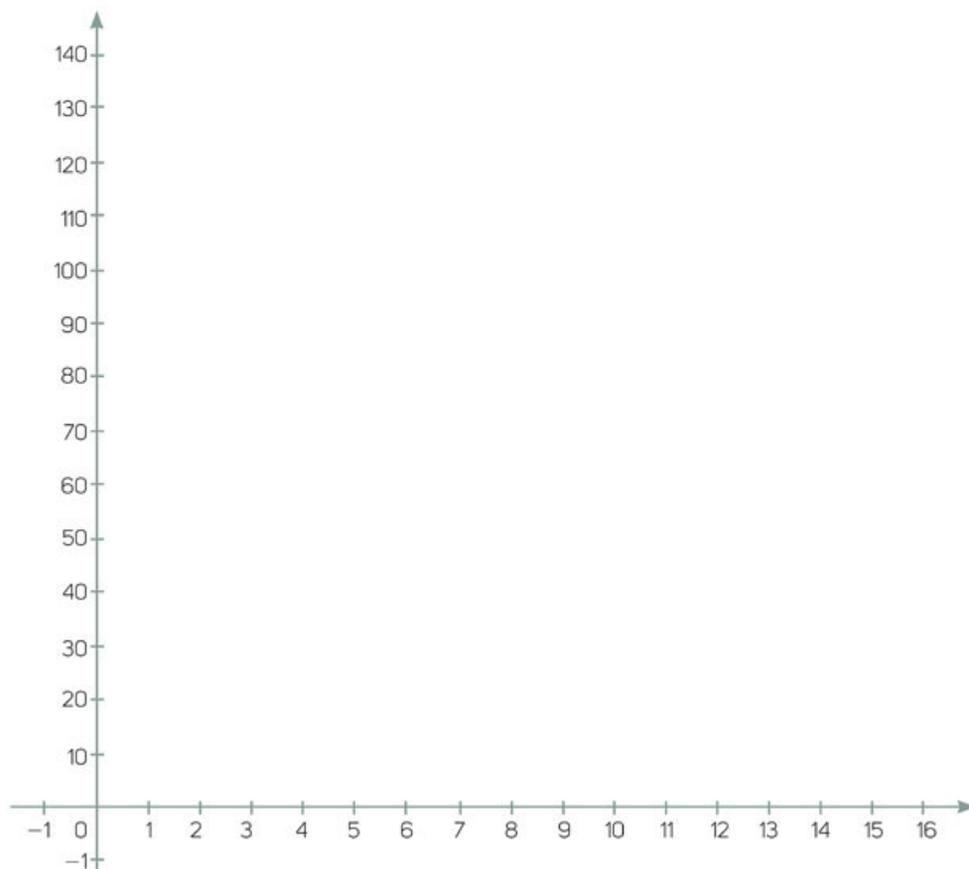
2. Un terreno rectangular tiene un área de 252 m^2 .

a) Si se necesita conservar el área y la medida del largo disminuye, ¿qué sucede con la medida del ancho del terreno? Argumenten su respuesta. _____

b) Tabulen los valores que consideren necesarios.

Largo									
Ancho									

c) Realicen la gráfica.



d) ¿Qué expresión algebraica modela el problema? _____

e) Cada uno redacte un problema que plantee una situación de variación inversa. Tabúlenlo, gráfiquenlo y comprueben si realmente se trata de este tipo de variación. Por último, determinen la expresión que modele el problema.

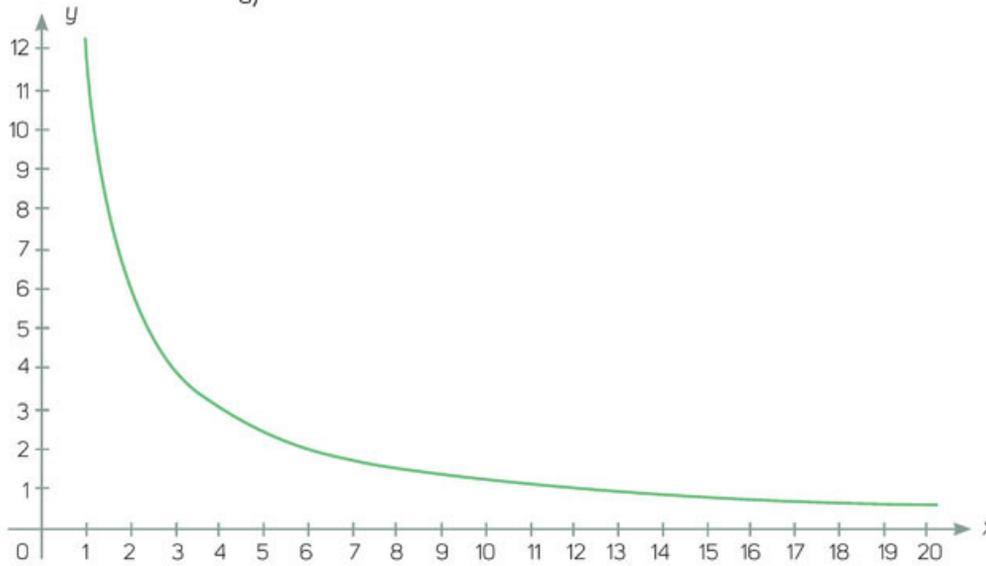
- Socialicen en grupo y con ayuda de su maestro, lleguen a conclusiones generales.



Resuelvan en parejas.

- Para cada gráfica completan la tabla de valores, escriban la ecuación que la representa y propongan un problema que ejemplifique cada situación.

a)

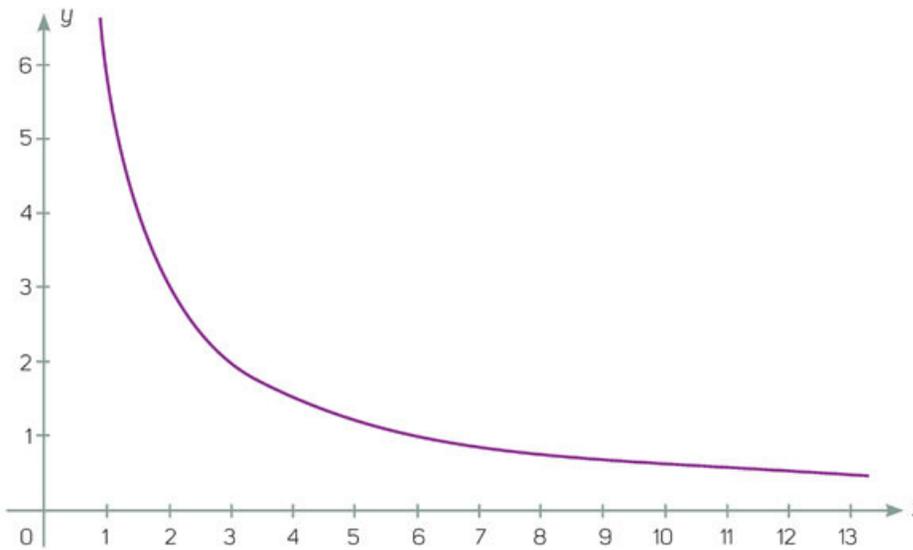


x	y

Ecuación: _____

Problema: _____

b)

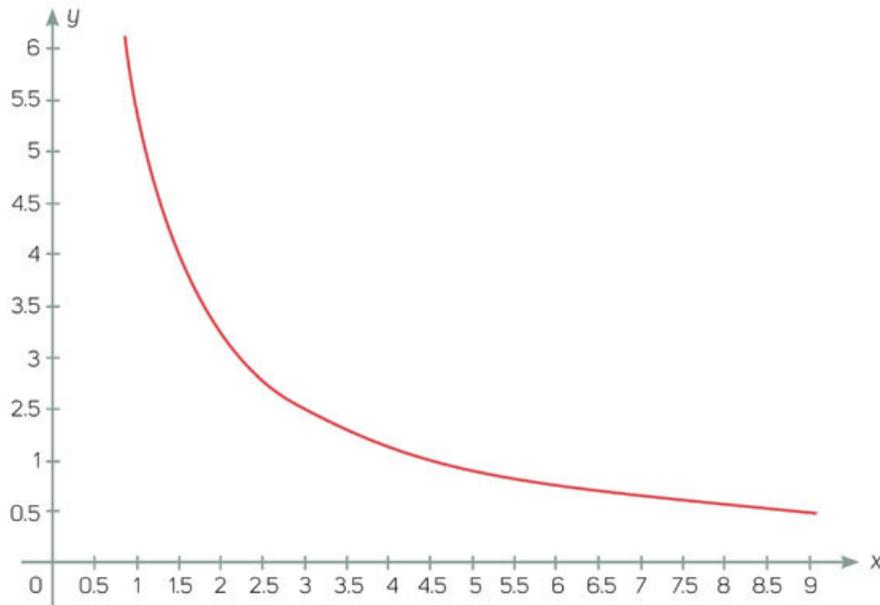


x	y

Ecuación: _____

Problema: _____

c)

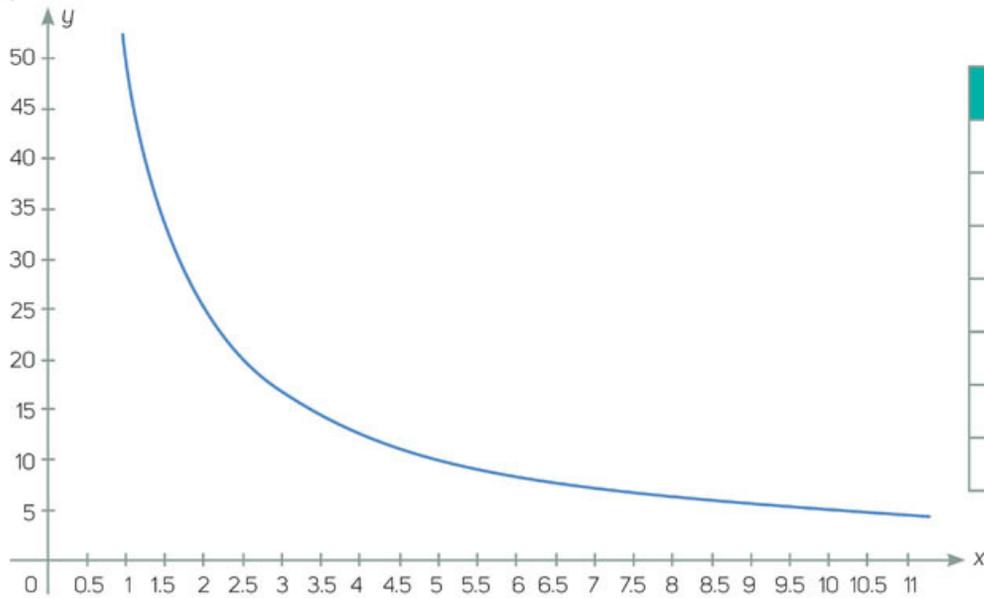


x	y

Ecuación: _____

Problema: _____

d)



x	y

Ecuación: _____

Problema: _____

- Compara tus respuestas y problemas planteados con el resto del grupo. Verifiquen que cumplan con la condición dada y que los valores sean correctos.

Expresiones a partir de sucesiones



Responde.

1. Analiza la sucesión 8, 14, 20, 26, 32...

- ¿Cuál es el patrón de la sucesión? _____
- ¿Qué número continúa la sucesión? _____
- ¿Qué número ocupa la posición 9? _____
- ¿Cuál es la regla de la sucesión? _____

• Verifica con un compañero tus respuestas.



Resuelvan en parejas.

1. Analicen la siguiente sucesión y contesten.

−8, −14, −20, −26, −32...

- ¿Cuál es el patrón de la sucesión? _____
- ¿Qué número continúa la sucesión? _____
- ¿Qué número ocupa la posición 9? _____
- ¿Cuál es la regla de la sucesión? _____
- ¿Qué diferencias hay entre esta sucesión y la de la actividad inicial? _____

- ¿Qué procedimiento siguieron para encontrar la regla de cada sucesión? _____

2. Observen las sucesiones.

i. 32, 26, 20, 14, 8...

ii. −32, −26, −20, −14, −8...

- ¿Las reglas de las sucesiones serán las mismas que las dos anteriores? _____

- ¿Qué número sigue en la sucesión *i*? _____ ¿Y en la sucesión *ii*? _____
- ¿Cuál es la regla general de la sucesión *i*? _____ ¿Y de la sucesión *ii*? _____
- ¿Qué cambió y qué se conservó entre las reglas generales de estas dos sucesiones y las de las actividades anteriores? _____

• Comparen sus respuestas con las de otras parejas. Verifiquen sus respuestas y procedimientos. Usen la regla general de cada sucesión para encontrar otros términos.

En equipos, hagan lo que se pide y respondan.

3. Analicen las sucesiones y completen la tabla.

Sucesión	Patrón	Regla general	Término que ocupa el lugar 51
5.5, 8, 10.5, 13...			
-10, -7, -4, -1...			
29, 21, 13, 5...			
$\frac{4}{3}, \frac{3}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \dots$			
-8, -15.2, -22.4, -29.6...			

- a) ¿Qué estrategia siguieron para identificar el patrón? _____

- b) ¿Usaron la misma estrategia en las primeras dos sucesiones que en las últimas tres? Expliquen. _____

- c) ¿Qué estrategia emplearon para determinar las reglas generales de cada sucesión? _____

- Comparen sus respuestas con el resto del grupo. Listen las dificultades encontradas al completar la tabla y, entre todos, propongan al menos dos estrategias para resolverlas.

4. En equipos de tres integrantes, cada uno escriba una regla general. Posteriormente pidan a los demás integrantes que calculen los primeros cinco términos de la sucesión.

Regla general	Primeros cinco términos
Mi regla: _____ _____	_____ _____ _____ _____ _____
Integrante 2: _____ _____	_____ _____ _____ _____ _____
Integrante 3: _____ _____	_____ _____ _____ _____ _____

- Comprueben si coinciden todos sus términos. Si no es así, apóyense para encontrar el error. Con los integrantes de su equipo, lleguen a conclusiones generales y verifiquen que todos cuentan con las herramientas para resolver las dificultades que se presentaron durante la actividad.

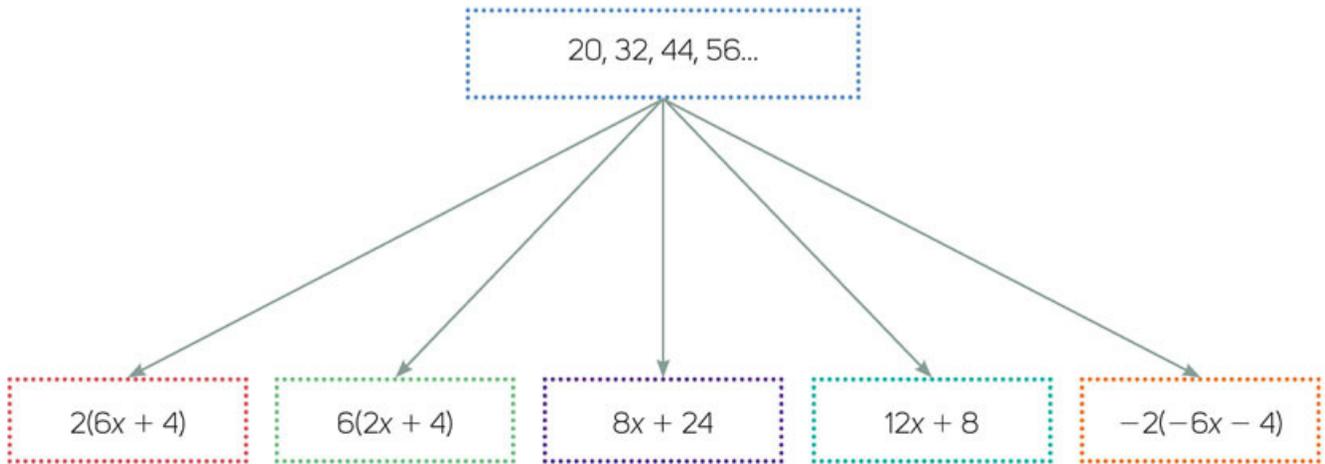
Equivalencia de expresiones algebraicas

Resuelvan en parejas.

1. ¿Solo una regla general puede representar a una sucesión?

Analicen la sucesión y determinen, sin hacer operaciones, si las reglas generales que se encuentran debajo de ella pertenecen a la sucesión.

Coloquen un punto sobre las que consideran que representan a la sucesión y, si ninguna de ellas la representa, escriban la expresión.



- Realicen las operaciones necesarias para comprobar que las expresiones marcadas representan a la sucesión.
- De acuerdo con la regla $2(6x + 4)$, ¿qué número ocupa la posición 4? _____
- De acuerdo con la regla $6(2x + 4)$, ¿qué número ocupa la posición 4? _____
- ¿Qué número ocupa la posición 4 con la regla $8x + 24$? _____
- ¿Qué número ocupa la posición 4 con la regla $12x + 8$? _____
- ¿Y con la regla $-2(-6x - 4)$, qué número ocupa la posición 4? _____
- ¿A qué se debe que exista un mismo resultado con diferentes operaciones? _____

- De acuerdo con el resultado del número que ocupa la posición 4, ¿pertenecen a una misma regla general que representa a la sucesión? ¿Por qué? _____

- Con base en los resultados anteriores, ¿excluirían alguna regla general como representativa de la sucesión? Expliquen su respuesta. _____

- Dialoguen con otras parejas si existen más formas de representar la sucesión y escribanlas. Comprueben sus respuestas y respondan nuevamente la pregunta inicial.

Trabajen en equipos y contesten.

2. Analicen los primeros cinco términos de cada sucesión, determinen al menos tres maneras de expresar la regla general y completen la tabla.

Sucesión	Reglas que representan la sucesión	Número que ocupa la posición 123
50, 60, 70, 80, 90...		
	$\frac{1}{2}x + 3.8$	
24, 20, 16, 12, 8...		
		247
		247
		247

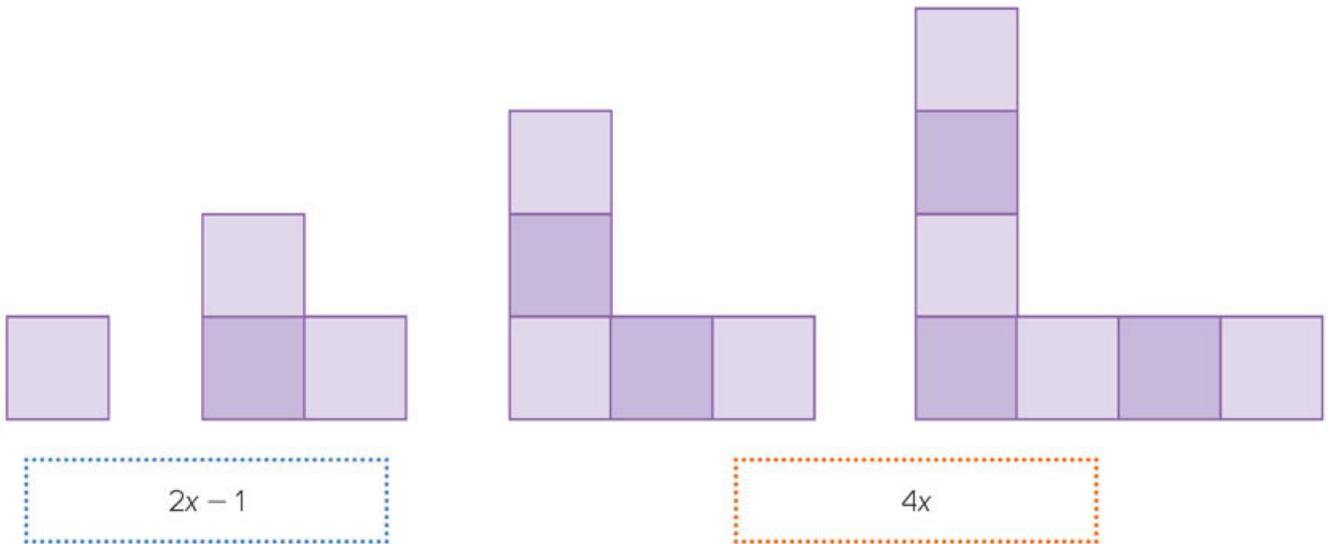
- a) ¿Qué estrategia siguieron para completar la información faltante de la primera sucesión? _____
- b) ¿Obtuvieron resultados distintos en el número que ocupa la posición 123? ¿A qué se debe? _____
- c) ¿Qué estrategia siguieron para completar la información de la sucesión $\frac{1}{2}x + 3.8$? _____
- d) ¿Qué diferencias existen entre la tercera sucesión y las dos primeras? ¿Emplearon diferentes estrategias para completar la tabla? _____
- e) ¿Obtuvieron distintos resultados en el número que ocupa la posición 123? ¿A qué se debe? _____
- f) ¿Qué estrategia usaron para encontrar la regla cuando solo se tiene uno de los términos? _____

- Comparen con el resto del grupo las respuestas del inciso d. ¿Todas fueron iguales? A manera de conclusión expongan y validen sus hallazgos.

Expresiones equivalentes

En parejas, realicen lo que se pide.

1. Observen la sucesión de figuras. Determinen a qué hacen referencia las expresiones que aparecen debajo de ellas.



- a) Con respecto a la relación entre las figuras y las expresiones, ¿qué representa la expresión algebraica del recuadro azul? _____
- b) ¿Qué representa la expresión algebraica del recuadro anaranjado? _____
- c) ¿Qué otras expresiones equivalentes se pueden usar para representar a cada una de las expresiones de los recuadros azul y anaranjado? _____

- Comparen sus respuestas con otra pareja y entre todos determinen cuántos cuadrados tendrá la figura que ocupa la posición 84 y cuál será el perímetro de esa figura.

Lean la siguiente información y comenten si sus expresiones son equivalentes.

Formas equivalentes de una expresión algebraica

En las sesiones anteriores trabajaste con expresiones algebraicas y las planteaste de diversas maneras. Cuando usabas esa expresión para encontrar el término de una sucesión y obtenías el mismo resultado, se demostraba que las expresiones eran equivalentes.

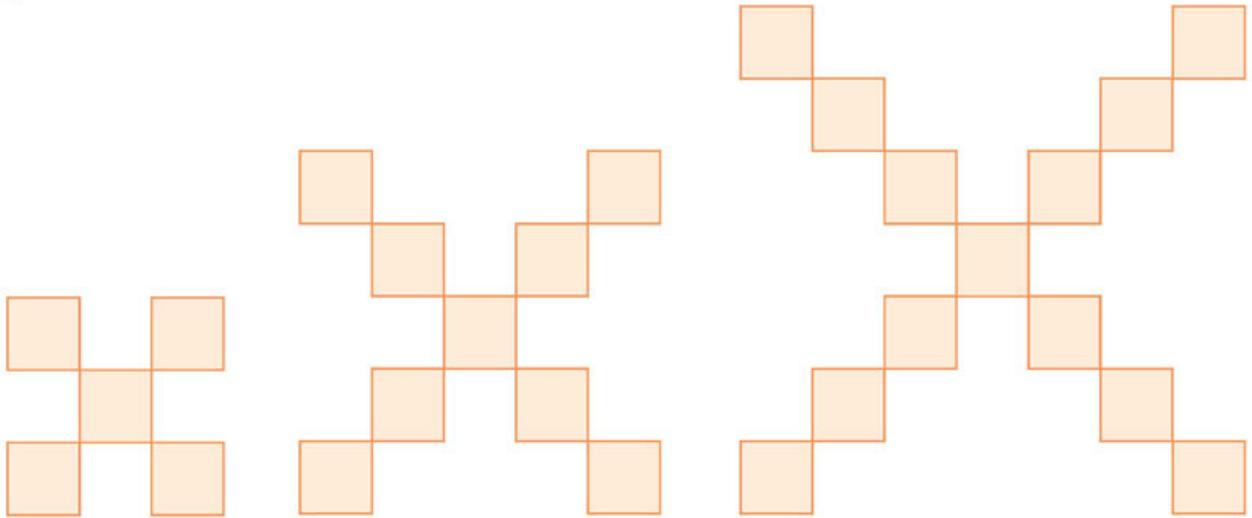
Por ejemplo:

$$5x + 25 = 5(x + 5) = 5x + 5 \times 5$$

Haz lo que se pide.

1. Determina y escribe dos reglas generales equivalentes de las siguientes sucesiones.

a)

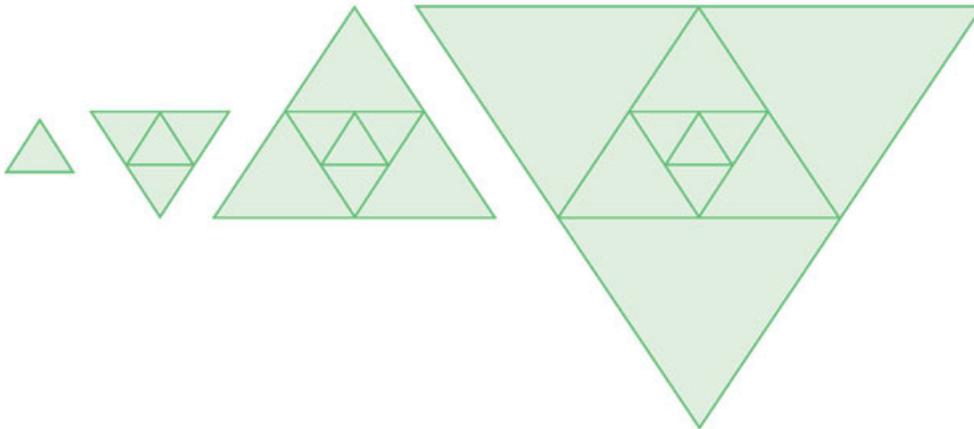


Regla 1: _____

Regla 2: _____

- i. ¿Cuántos cuadrados tendrá el cuarto término de la sucesión? _____
- ii. ¿Y el término 100? _____

b)



Regla 1: _____

Regla 2: _____

- i. ¿Cuántos triángulos tendrá el cuarto término de la sucesión? _____
- ii. ¿Y el término 100? _____

Otras fuentes

Entra en www.esant.mx/ecsema2-031.
Escribe la expresión de la sucesión en "Fórmula explícita" y presiona *play*, para que puedas ver los términos que se generan con la sucesión.

- Compara tus respuestas con las de otro compañero y verifiquen que sus expresiones algebraicas representan cada una de las sucesiones.

Múltiplos y submúltiplos



Analiza la situación y contesta.

- Una empresa fabrica chicles con forma de tiras rectangulares que miden 1.8 metros de largo.



- ¿Cuántos pedazos de chicle puedes obtener si cortas porciones de 1 cm de largo? _____
- ¿Cuántas porciones de 10 cm de largo se obtienen al cortar la golosina? _____
- ¿Qué unidades están involucradas? _____

- Un entrenador prepara a un atleta para una carrera. Cerca de su casa hay dos parques. Cuando tomó las medidas en internet se percató de que la distancia total de la ruta en la que piensa entrenar es de 4.97 km.



- Si solo realiza un recorrido a la ruta, ¿cuántos metros correrá? _____
- El entrenador planea medir el tiempo cada 100 metros. ¿Cuántas veces tomará la medición? _____
- Cada 10 m el atleta realizará una respiración profunda para evitar un dolor de costado. ¿Cuántas respiraciones profundas realizará? _____
- ¿Qué procedimiento realizaste para obtener las respuestas? _____

- ¿Qué diferencias hay entre la primera situación y la segunda? _____

- Compara tus respuestas y procedimientos con otro compañero. Corrobores que ambos tengan las mismas respuestas, en caso contrario, argumenten la razón de ellas y lleguen a acuerdos.

Trabajen en parejas y hagan lo que se pide.

- Analicen la información del recuadro.

Múltiplos y submúltiplos del metro

El **metro** es una unidad de medida de longitud del Sistema Internacional de Unidades. Dependiendo de la situación se puede usar alguno de sus múltiplos o submúltiplos.

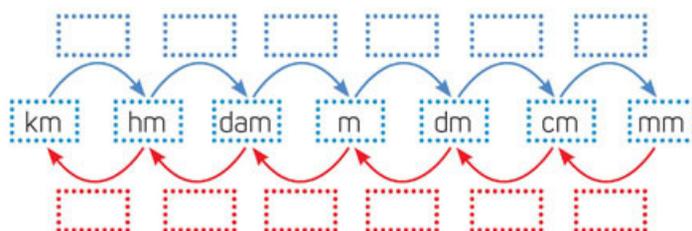
Unidad	Equivalencia	Representación
Kilómetro	1 000 metros	1 km = 1000 m
Hectómetro	100 metros	1 hm = 100 m
Decámetro	10 metros	1 dam = 10 m
Metro	1 metro	1 m = 1 m
Decímetro	0.1 metros	1 dm = 0.1 m
Centímetro	0.01 metros	1 cm = 0.01 m
Milímetro	0.001 metros	1 mm = 0.001 m

Para medir objetos pequeños se utilizan unidades menores al metro, **submúltiplos**, y para longitudes mayores que el metro se utilizan **múltiplos**. Por ejemplo, si se quiere saber cuántos decímetros hay en 25.3 metros, se puede establecer una relación proporcional.

$$25.3 \text{ m} \left(\frac{1 \text{ dm}}{0.1 \text{ m}} \right) = 253 \text{ dm}$$

Por tanto, en 25.3 metros hay 253 decímetros.

- En el diagrama escriban qué operación se realiza para pasar de una unidad a otra.



- Comparen sus respuestas con las del resto del grupo y sinteticen los pasos necesarios para transformar una unidad de longitud menor en otra mayor y viceversa.

¿Cómo vamos?

- Haz las conversiones.

a) 25.3 m = _____ dm

c) 63.45 cm = _____ dam

b) 46.8 dam = _____ hm

d) 253 dam = _____ cm

- Compara tus respuestas y procedimientos con los de tus compañeros.

Sesión 1. Resuelve problemas en donde es necesario realizar conversiones en múltiplos y submúltiplos de las unidades de longitud.

Múltiplos y submúltiplos de las unidades de capacidad

Lee y contesta.

- Una persona encontró una receta para preparar un vaso de jugo mixto con los siguientes ingredientes.



Ingredientes:

- 1 taza y media de hielo
- $\frac{1}{2}$ taza de piña picada congelada
- 60 mL de jugo de piña
- 60 mL de crema de coco
- Rodajas de piña natural

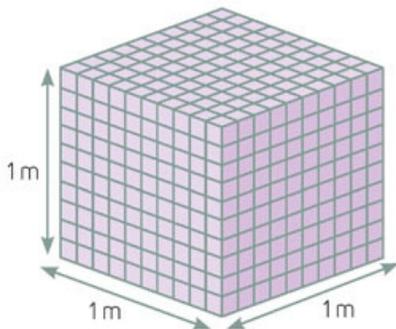
En la imagen se indica la cantidad de jugo y crema de coco con que cuenta.

- ¿Cuántos vasos de piña colada podrá preparar con la cantidad de líquido que contienen los envases? Argumenta. _____

- Las medidas del frasco son 6 cm de largo, 5 cm de ancho y 5 cm de altura. ¿Cuántos mililitros de agua necesitará para llenar el frasco? Argumenta. _____



- ¿Qué tipo de unidades están involucradas en las situaciones anteriores y qué miden? _____



- ¿Cuál es el volumen de uno de los cubos pequeños? _____

- ¿Cuántos litros le caben a un contenedor que tiene las medidas de la imagen? _____
- ¿A cuántos litros equivale cada cubo morado de la figura? _____

- Compara tus respuestas con el resto del grupo. Externen las dificultades que tuvieron para resolver los problemas.

Unidades de capacidad

La unidad más común para medir la cantidad de líquido que contiene un cuerpo es el **litro** y se denota con el símbolo **L**. Sin embargo, como se mide un objeto de tres dimensiones, el decímetro cúbico, **dm³**, equivale a **1 litro**. El litro y sus derivados se usan para medir capacidad. Esta unidad no pertenece al Sistema Internacional de Unidades y tampoco sus múltiplos y submúltiplos.

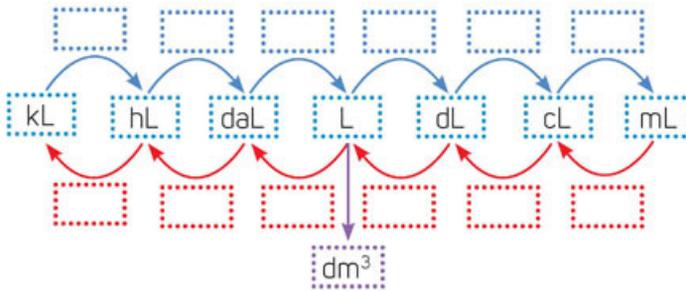
Unidad	Equivalencia	Representación
Kilolitro	1 000 litros	1 kL = 1 000 L
Hectolitro	100 litros	1 hL = 100 L
Decalitro	10 litros	1 daL = 10 L
Litro	1 litro	1 L
Decilitro	0.1 litros	1 dL = 0.1 L
Centilitro	0.01 litros	1 cL = 0.01 L
Mililitro	0.001 litros	1 mL = 0.001 L

Por ejemplo, si se quiere saber cuántos mililitros hay en 325 litros, se puede establecer una relación proporcional.

$$325 \text{ L} \left(\frac{1 \text{ mL}}{0.001 \text{ L}} \right) = 325\,000 \text{ mL}$$

Por tanto, en 325 L hay 325 000 mL.

4. En parejas, completen el diagrama.



- Comparen sus respuestas con el resto del grupo y sintetizen los pasos necesarios para convertir unidades de capacidad.

¿Cómo vamos?

1. Realiza las conversiones.

- | | |
|----------------------|-------------------------------------|
| a) 75.2 L = _____ dL | d) 5 600 dL = _____ dm ³ |
| b) 50 L = _____ kL | e) 26.9 daL = _____ hL |
| c) 36 mL = _____ hL | f) 21.36 cL = _____ daL |

- Compara tus respuestas con las del resto del grupo e intercambia estrategias de solución.

Sesión 2. Resuelve problemas en donde es necesario realizar conversiones en múltiplos y submúltiplos de las unidades de capacidad.

Múltiplos y submúltiplos de las unidades de masa

Resuelve los problemas. Escribe tus operaciones y procedimientos. Luego responde.

- Una receta para preparar tamales menciona que por cada kilogramo de masa se deben agregar 250 gramos de manteca de cerdo o vegetal.
 - ¿Qué unidades están involucradas? _____
 - ¿Cuántas veces es mayor la porción de masa que de manteca? _____

 - ¿Qué procedimiento seguiste para resolver el problema? _____



Las grúas son una herramienta importante en la construcción de edificios, ya que permiten elevar y distribuir materiales suspendidos en un gancho.

- Una grúa para construcción soporta 4 toneladas de peso. Para una obra se requiere subir 14 tubos de acero de 331 kilogramos de peso cada uno.
 - ¿Se puede subir todos juntos usando la grúa? _____ ¿Por qué?

 - ¿Qué unidades están involucradas? _____
 - ¿A cuántos kilogramos equivale una tonelada? _____

- Si el kilogramo de jitomate en una comunidad cuesta \$13...
 - ¿Cuánto se pagará por los gramos que indica la báscula de la imagen? _____
 - ¿Cuánto se paga por un cuarto de kilogramo de jitomate? _____
 - ¿Cuánto es en gramos un cuarto de kilogramo? _____



- Compara las respuestas de los tres contextos. Externa las dificultades que presentaste al resolver la actividad.

Unidades de masa

La unidad para medir masa es el **kilogramo** y se denota con el símbolo **kg**, el cual tiene múltiplos y submúltiplos, como se muestra en la tabla.

Unidad	Equivalencia	Representación
Tonelada	1 000 kilogramos	1 t = 1 000 kg
Quintal	100 kilogramos	1 q = 100 kg
Miriagramo	10 kilogramos	1 mag = 10 kg
Kilogramo	1 kilogramo	1 kg = 1 kg
Hectogramo	0.1 kilogramos	1 hg = 0.1 kg
Decagramo	0.01 kilogramos	1 dag = 0.01 kg
Gramo	0.001 kilogramos	1 g = 0.001 kg
Decigramo	0.0001 kilogramos	1 dg = 0.0001 kg
Centigramo	0.00001 kilogramos	1 cg = 0.00001 kg
Miligramo	0.000001 kilogramos	1 mg = 0.000001 kg

Tanto el quintal como el miriagramo, son unidades poco frecuentes y no corresponden a los prefijos y sufijos del Sistema Internacional.

Por ejemplo, si se quiere saber cuántos gramos hay en 4.2 kilogramos, se puede establecer una relación proporcional.

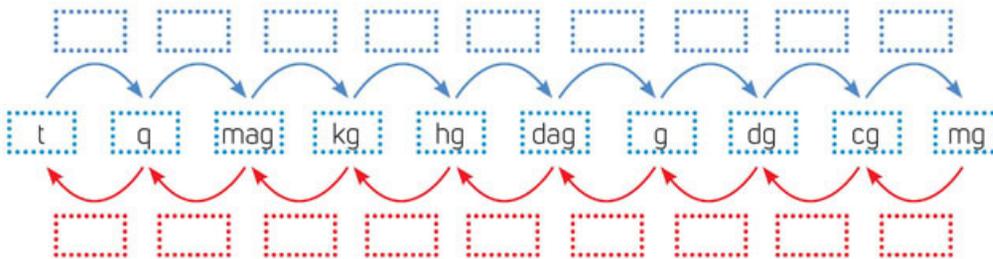
$$4.2 \text{ kg} \left(\frac{1 \text{ g}}{0.001 \text{ kg}} \right) = 4200 \text{ g}$$

Por tanto, en 4.2 kg hay 4 200 g.

Otras fuentes

Entra en www.esant.mx/ecsema2-032 donde podrás repasar lo aprendido en esta secuencia.

4. En parejas, completen el diagrama.



- Comparen sus respuestas con las del resto del grupo y redacten los pasos necesarios para convertir de una unidad de masa menor a una mayor y viceversa.

Haz lo que se pide.

1. Realiza las conversiones.

- a) 23.9 t = _____ dg c) 350 mg = _____ g
 b) 950 g = _____ q d) 850 g = _____ kg

- Compara tus respuestas y estrategias con las del resto del grupo.



Yarda, pie y pulgada



Contesten en equipos.

1. En una nota periodística se menciona que un jugador de futbol americano consiguió un gol de campo de 62 yardas (yd).

Fuente: <https://www.publimetro.com.mx/mx/deportes/2017/11/19/gostkowski-consigue-gol-campo-mas-largo-la-historia-patriotas.html> (Consulta: 4 de junio de 2018)



El gol de campo es una jugada con la que se pueden obtener puntos mediante una patada desde un punto fijo.

- a) ¿Conocen el significado de la palabra *yarda*? _____
- b) ¿Saben a cuántos metros equivalen 62 yardas? _____
- c) Si conocen el valor exacto, anótenlo. De lo contrario, escriban el valor que consideran que mide en metros .
- d) ¿En qué otras situaciones han escuchado esa unidad de medida? _____

2. Las medidas de las televisiones están dadas por la longitud de la diagonal del cuadrilátero que forman. Se quiere colocar una televisión en un mueble cuya longitud de su diagonal es 110 cm, como se muestra en la imagen.



- a) ¿Cabrará en el mueble una televisión de 60 pulgadas (in)? _____
- b) ¿A cuántos centímetros equivalen una pulgada? _____
- c) ¿En qué otras situaciones han escuchado esa unidad de medida? _____

3. En el anuncio se indica la altura desde la que se puede saltar en paracaídas. Su publicidad dice: "La diversión comienza a 17 000 pies (ft) de altura...".



- a) ¿Cuántos metros consideran que son 17 000 pies? _____
- b) ¿En qué otras situaciones han escuchado esa unidad de medida? _____

- Si algún compañero conoce las equivalencias de las unidades que se trabajan en la actividad, coméntenlas en grupo.

Unidades de longitud del Sistema Inglés

Trabajen en grupo.

1. Necesitarán un metro o cinta métrica graduada y un gis o tiza. Salgan al patio, tracen una línea recta de 182.88 centímetros de longitud y elijan a una persona que multiplique 31 veces esa distancia.

Cerca de la primera línea que marcaron, tracen una línea recta paralela a esta y cuya longitud sea de 152.4 cm.

- En el primer caso, la persona que multiplicó 31 veces, obtuvo 62 yardas, la distancia de un gol de campo.
- En el segundo caso, el segmento de 152.4 cm representa la medida en diagonal de una pantalla de 60 pulgadas.
- ¿Qué ocurre con los 17 000 pies? Para recorrer esa distancia, tendrían que multiplicar el primer segmento 2 833.3 veces en lugar de 31 veces.

2. De acuerdo con la actividad anterior, contesten.

- a) ¿A cuántos centímetros equivale una yarda? _____
- b) ¿A cuántos centímetros equivale una pulgada? _____
- c) ¿A cuántos centímetros equivale un pie? _____

3. Tracen en el pizarrón las tres unidades del Sistema Inglés (yd, in y ft). Tomen un hilo, agujeta o cordón y recorten una porción que mida 1 pulgada. Úsenla como ustedes decidan y respondan.

- a) ¿A cuántas pulgadas equivale un pie? _____ ¿Y una yarda? _____
- b) ¿Cuántos pies equivalen a una pulgada? _____
- c) ¿Cuántas yardas equivalen a una pulgada? _____
- d) ¿Cuántos pies equivalen a una yarda? _____
- e) ¿Cuántas yardas equivalen a un pie? _____

- Con ayuda de su profesor, y de manera grupal, corroboren sus resultados.

Unidades de longitud del Sistema Inglés

La **yarda** (yd), el **pie** (ft o ') y la **pulgada** (in o ") son unidades de longitud del Sistema Inglés.

1 yarda (yd) = 91.44 cm	1 yd = 3 ft = 3' = 36 in = 36"
1 pie (ft) = 30.48 cm	1 ft = 12 in = 0.333 yd
1 pulgada (in) = 2.54 cm	1 in = 0.083 ft = 0.027 yd

Otras fuentes

En el siguiente vínculo repasarás sobre las unidades de longitud del Sistema Inglés:
www.esant.mx/ecsema2-033

Onza y galón

Analiza las situaciones y contesta.



1. Una empresa extranjera importa lácteos en recipientes como el que se muestra. Una familia quiere saber a cuántos mililitros equivale su contenido, lo vacía en vasos de 500 mL y obtiene aproximadamente $7\frac{1}{2}$ vasos.

a) ¿Aproximadamente cuántos litros de leche tiene el garrafón? _____

2. Un perfume tiene una capacidad de 2 onzas líquidas (fl oz). Expulsa 0.2 mL de líquido, cada vez que se **atomiza**.



a) ¿A cuántos mililitros equivalen 2 onzas líquidas si el perfume duró 296 aspersiones? _____

b) ¿Qué unidades están involucradas en los dos casos anteriores? _____

c) ¿En qué otras situaciones has escuchado o visto este tipo de unidades? _____

d) Con base en tus respuestas, escribe una equivalencia entre 1 galón y una onza líquida.

$$1 \text{ gal} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ fl oz}$$

$$1 \text{ fl oz} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ gal}$$

- Corroborar que todos lleguen a las mismas respuestas, argumenten y, en caso de diferencias, apóyense para unificar criterios.

Unidades de capacidad para medir líquidos del Sistema Inglés

El **galón (gal)** y la **onza líquida (fl oz)** son unidades de capacidad del Sistema Inglés y se usan para medir líquidos.

La equivalencia entre ellas es:

Galón	Onza líquida o fluida
1 gal = 128 fl oz	1 fl oz = 0.00781 gal

Glosario

atomizar. esparcir un líquido en forma de diminutas gotas, o partículas.

Las equivalencias de estas unidades y el Sistema Internacional de Unidades son:

Sistema Inglés de Unidades	Sistema Internacional de Unidades
1 galón (gal)	3.78541 litros
1 onza líquida o fluida (fl oz)	0.02957 litros

¿Cómo vamos?

Trabaja con un compañero y resuelvan.

- Para preparar un vaso de jugo antigripal se utilizan los siguientes ingredientes y la cantidad indicada.

- 1 onza de jugo de limón
- 1 onza de jugo de naranja
- 2 cucharadas de miel
- 1 guayaba
- 2 fresas
- 1 rebanada de piña



Si se dispone de 0.26 galones de jugo de limón y 0.26 galones de jugo de naranja.

- ¿Cuántos vasos de jugo antigripal pueden prepararse? _____
- ¿Qué procedimiento usaron para calcular la cantidad de vasos de jugo que se pueden preparar? _____

- Un bebé debe tomar 7 fl oz de fórmula láctea. Dicha leche viene en empaques de 0.198 gal.

- ¿Cuántos biberones podrán prepararse con esta cantidad? _____
- Si el bebé toma 4 porciones al día, ¿qué cantidad en mL toma? _____
- ¿Qué procedimiento seguiste para calcular la respuesta? _____

- Comenten sus respuestas y sus procedimientos con el resto del grupo y lleguen a conclusiones generales.

Onza y libra

Resuelve.

1. Para preparar gazpacho, una receta tradicional indica que se deben utilizar los siguientes ingredientes en las cantidades que se indican.



Una persona desea preparar gazpacho y cuenta con los siguientes ingredientes:

- 1 kg de tomates y le sobrar  un poco
- 200 g de cebolla y le faltar  un poco
- 120 g de pepino y sobrar  muy poco
- 112 g de pimiento verde y faltar 

- a)  Consideras que una libra es mayor que un kilogramo? _____

- b)  A qu  valor aproximado equivale una libra? _____

2. Una marca de chocolates promociona sus productos como se muestra.

En la publicidad se indica que el rect ngulo de chocolate tiene 24 rect ngulos con peso de 1 onza cada uno.



- a)  Cu ntos gramos estimas que equivalen a una onza? _____

- b)  Cu nto pesa la barra completa de chocolate? _____

- Comenta tus respuestas y argumentos con el grupo.

Unidades del Sistema Inglés: libra y onza

La **libra (lb)** y la **onza (oz)** son unidades de masa del Sistema Inglés. La equivalencia más usadas son:

Libra	Onza
1 lb = 16 oz	1 oz = 0.0625 lb

Las equivalencias de estas unidades y el Sistema Internacional de Unidades son:

Sistema Inglés	Sistema Internacional de Unidades
1 onza (oz)	28.3495 gramos
1 libra (lb)	453.592 gramos

Para determinar una equivalencia entre estas unidades, se puede establecer una relación proporcional o regla de tres. Por ejemplo, si se quiere calcular la cantidad de onzas (oz) que equivalen a 8 libras (lb), se establece la relación:

$$\begin{aligned} 1 \text{ lb} &= 16 \text{ Oz} \\ 8 \text{ lb} &= x \end{aligned}$$

Resolviendo por la regla de tres, tenemos que: $\frac{(8 \text{ lb})(16 \text{ oz})}{1 \text{ lb}} = x$. Por tanto, $x = 128 \text{ oz}$; es decir, 128 libras equivalen a 8 onzas.

Resuelvan en parejas.

1. Analicen y contesten.

a) ¿A cuántas libras equivale la medida que se muestra en la imagen del candado?

b) ¿A cuántos gramos equivale? _____ ¿Y a cuántos kilogramos? _____

c) ¿A cuántas libras equivale el contenido de la bolsa de dulces? _____

d) ¿A cuántos kilogramos equivale? _____

e) Si la bolsa contiene 50 dulces, ¿cuántos gramos pesa cada dulce? _____

¿Qué aprendimos?



2. Hagan las conversiones.

a) 15 yd = _____ ft

d) _____ oz = 5 lb

g) _____ ft = 100 in

b) _____ in = 5 yd

e) 25 ft = _____ yd

h) 50 gal = _____ fl. oz

c) _____ ft = 600 in

f) 50 yd = _____ in

i) 100 lb = _____ oz

- Comparen sus respuestas y estrategias de solución con las del resto del grupo.

Sesión 3. Resuelve problemas en donde es necesario realizar conversiones en múltiplos y submúltiplos de las unidades de masa.

Sistema Inglés versus Sistema Internacional de Unidades



Trabajen en parejas.

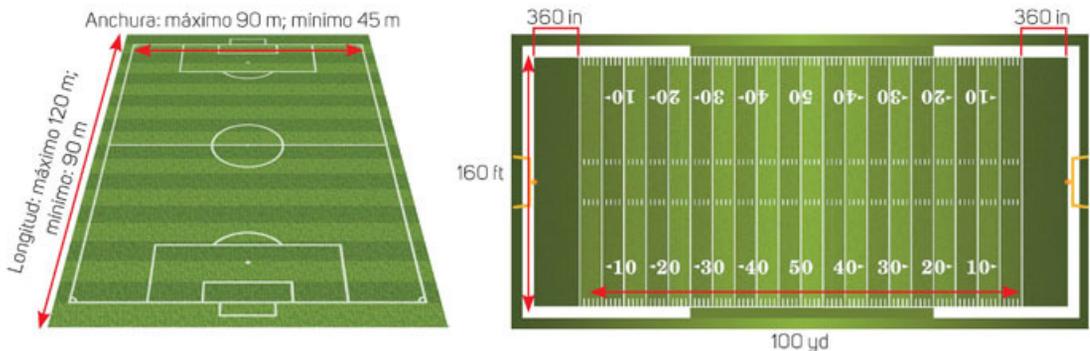
1. Hagan lo que se pide.
 - a) Pongan una marca en el piso y en línea recta coloquen otra marca a una distancia de 914 cm. La distancia entre las marcas mide una yarda (yd).
 - b) A partir de la primera marca que colocaron, en línea recta, pongan otra marca a una distancia de 30.4 cm. La distancia entre las marcas equivale a un pie (ft).
 - c) A partir de la primera marca, coloquen otra marca en línea recta a 2.54 cm de distancia. La distancia entre las marcas equivale a una pulgada (in).
- Comenten las ventajas de medir con cada uno de los sistemas.



Longitud

Resuelvan en parejas.

1. Las medidas mínimas de una cancha de futbol son de 45 m de ancho por 90 m de largo, o medidas máximas de 90 m de ancho por 120 m de largo. Un campo de futbol americano mide 160 pies (ft) de ancho por 120 yardas (yd) de largo (100 dentro del campo y 360 pulgadas en cada zona de anotación).



- a) ¿Qué campo es más grande con respecto a las medidas mínimas del campo de futbol? _____
- b) ¿Qué campo es más grande con respecto a las medidas máximas del campo de futbol? _____
- c) Con respecto al inciso b, ¿cuántos metros es más grande uno que otro? _____
- d) ¿Qué procedimiento usaron para saber la diferencia entre las medidas? _____

- Compartan sus resultados y sus estrategias de solución.

2. Una empresa ofrece servicios de mantenimiento: pintura, mecánica, limpieza y jardinería, entre otros. Algunas presentaciones de los productos vienen en unidades de medidas diferentes a las usadas en México y el supervisor requiere una tabla de equivalencias para calcular la cantidad de productos que necesita la empresa. Resuelve algunas conversiones que debe realizar.

- a) 15 yd _____ ft _____ cm _____ in
 b) 400 m _____ in _____ yd _____ ft
 c) 354 in _____ yd _____ ft _____ mm
 d) 250 ft _____ km _____ yd _____ in
 e) 0.95 yd _____ ft _____ in _____ cm
 f) 0.59 m _____ in _____ ft _____ yd
 g) 0.79 in _____ yd _____ mm _____ ft
 h) 0.86 ft _____ cm _____ in _____ yd

- Comparen sus respuestas con las del resto del grupo e intercambien estrategias de solución.

3. Conviertan a yardas, pulgadas y pies las medidas de cinco objetos. Completen la tabla.

Objeto	Medida real	Medida en yd	Medida en ft	Medida en pulgadas

- Pidan a su profesor que elija a algunos de ustedes para que compartan los objetos que midieron. Digan solo una medida de todas las que calcularon y los demás tendrán que realizar la conversión.

Equivalencia entre unidades de longitud

Las **unidades de longitud** más usuales en el Sistema Inglés de Unidades de Medida son la **pulgada** (in), el **pie** (ft), la **yarda** (yd), la **milla**; y sus equivalencias con el Sistema Internacional de Unidades son:

$$1 \text{ yd} = 0.9144 \text{ m}$$

$$1 \text{ ft} = 0.3048 \text{ m}$$

$$1 \text{ milla} = 1.6093 \text{ km}$$

$$1 \text{ in} = 0.0254 \text{ m}$$

Conversión entre el Sistema Inglés y el Sistema Internacional: capacidad (volumen)

Analiza las situaciones y contesta.

- Una empresa de pinturas tiene la siguiente promoción.



- Una persona compra 2 cubetas "Color plus" de 19 L cada una. Aproximadamente, ¿cuántos litros tendrá en total con los galones que regalan? _____

 - ¿Qué estrategia seguiste para encontrar el valor aproximado? _____

- En un recetario de cocina se menciona que para una receta se deben agregar 3 onzas líquidas (fl oz) de aceite. Señala hasta dónde se llenaría la jarra medidora y la equivalencia aproximada en mililitros.



- Compara tus respuestas con los de otro compañero.

Equivalencia entre unidades de capacidad

Las **unidades de medidas de capacidad** más comunes del Sistema Inglés y su equivalencia con el Sistema Internacional de Unidades son onza (fl oz), pinta (pt), galón (gal) y barril.

$$1 \text{ gal} = 3.78541 \text{ L} = 128 \text{ fl oz}$$

$$1 \text{ fl oz} = 0.00781 \text{ gal} = 0.02957 \text{ L}$$

$$1 \text{ pt} = 473.17 \text{ mL}$$

$$1 \text{ barril} = 158.98 \text{ L}$$

- Usen la tabla de equivalencias para comprobar si las respuestas de la página anterior se aproximaron a la respuesta correcta.
- Investiguen tres situaciones donde se usen estas unidades de medidas y realicen las conversiones entre gal, L y fl oz. Regístrenlas en la tabla.

Situación	Medida en L	Medida en gal	Medida en fl oz

¿Cómo vamos?

- Resuelve las siguientes conversiones.

- a) 1 500 fl oz _____ L _____ gal
- b) 95.2 L _____ fl oz _____ gal
- c) 12.4 gal _____ L _____ fl oz
- d) 0.68 fl oz _____ gal _____ L
- e) 0.54 L _____ gal _____ fl oz
- f) 0.65 gal _____ fl oz _____ L
- g) 12 fl oz _____ mL _____ gal
- h) 12 mL _____ fl oz _____ gal

- Compara tus resultados con el resto del grupo y lleguen a una conclusión general sobre el procedimiento para realizar una conversión entre estas unidades.

Sesión 2. Resuelve problemas que implican conversiones de unidades de capacidad entre el Sistema Inglés y el Sistema Internacional de Unidades.

Conversión entre el Sistema Inglés y el Sistema Internacional (masa)

Analiza las situaciones y responde.

- Un gimnasio tiene diferentes pesas para mancuernas. Algunas de ellas se observan en la imagen.



- ¿A cuántos kilogramos equivalen 22 lb? _____
- ¿A cuántas libras equivalen 15 kg? _____
- Si la equivalencia de la pesa más pequeña está redondeada y su equivalencia real es de $5 \text{ kg} = 11.0231 \text{ lb}$, ¿cuál es la equivalencia exacta de 22 lb a kg? _____ ¿Y de 15 kg a lb? _____
- Usando los datos anteriores determina la equivalencia entre 1 kilogramo (kg) y una libra (lb). _____

- Ana compró una lata de frijoles y en la etiqueta encontró la siguiente información:

Masa drenada: $580 \text{ g} = 20.5 \text{ oz}$



- ¿A cuántas onzas (oz) equivale un kilogramo? _____
- Corroborar tus respuestas y procedimientos de solución. Busca al menos tres ejemplos en que se presenten las medidas en lb o en oz y compártelas con el grupo.

Otras fuentes

Con las actividades de la siguiente página: www.esant.mx/ecsema2-034, podrás evaluar lo aprendido en la secuencia.

Equivalencia de unidades

Las **unidades de masa** más comunes del Sistema Inglés y sus equivalencias con el Sistema Internacional de Unidades son:

$$\begin{aligned} 1 \text{ onza (oz)} &= 0.0283495 \text{ kg} = 0.0625 \text{ lb} \\ 1 \text{ libra (lb)} &= 0.453592 \text{ kg} = 16 \text{ oz} \\ 1 \text{ kg} &= 2.20462 \text{ lb} = 35.274 \text{ oz} \end{aligned}$$

Aprendo mejor

Elabora un diccionario matemático con los conceptos trabajados en clase y su significado. Si el concepto lo permite, ilústralo. Así podrás consultarlo cuando lo requieras.

Trabajen en parejas.

- Usen la tabla de equivalencias para comprobar si las respuestas de la página anterior se aproximaron a la respuesta correcta.
- De las tres situaciones que investigaron al final de la página anterior, realicen las conversiones entre lb, kg y oz. Regístrenlas en la tabla.

Situación	Medida en oz	Medida en lb	Medida en kg

Haz lo que se pide.



- Resuelve las conversiones.

- | | | |
|-------------|----------|----------|
| a) 789 oz | _____ lb | _____ kg |
| b) 789 lb | _____ kg | _____ oz |
| c) 789 kg | _____ oz | _____ lb |
| d) 0.959 oz | _____ lb | _____ kg |
| e) 0.959 lb | _____ kg | _____ oz |
| f) 0.959 kg | _____ oz | _____ lb |
| g) 650 g | _____ lb | _____ oz |

- Compara tus resultados con los del resto del grupo y realicen una conclusión general sobre el procedimiento para realizar una conversión entre estas unidades.

Sesión 3. Resuelves problemas que implican conversiones de unidades de masa entre el Sistema Inglés y el Sistema Internacional de Unidades.

Conversión entre unidades del Sistema Internacional de Unidades y el Sistema Inglés

En esta sección aprenderás a convertir unidades del Sistema Internacional de Unidades al Sistema Inglés y viceversa, con una hoja de cálculo electrónica.

1. Realiza de manera individual lo que se pide.

	A	B	C	D	E	F
1						
2		Conversión entre unidades de longitud				
3		1 pulgada(s)	=		=B3*2.54	centímetro(s)
4		1 pie(s)	=			centímetro(s)
5		1 yarda(s)	=			centímetro(s)
6		1 milla(s)	=			metro(s)
7						

Equivalencias entre unidades de longitud

- 1 pulgada = 2.54 centímetros
- 1 pie = 30.48 centímetros
- 1 yarda = 91.44 centímetros
- 1 milla = 1 609.34 metros

iii. Usa la hoja de cálculo electrónica para calcular lo que se pide.

- | | |
|-----------------------------------|------------------------------------|
| a) 5 pulgadas = _____ centímetros | e) 12 pulgadas = _____ centímetros |
| b) 13 pies = _____ centímetros | f) 20 pies = _____ centímetros |
| c) 22 yardas = _____ centímetros | g) 51 yardas = _____ centímetros |
| d) 8 millas = _____ metros | h) 45 millas = _____ metros |

iv. Borra los datos de las columnas B y E, y escribe 1 en las celdas E3 a E6.

	B	C	D	E	F
	Conversión entre unidades de longitud				
	0.39370079	pulgada(s)	=		1 centímetro(s)
		pie(s)	=		1 centímetro(s)
		yarda(s)	=		1 centímetro(s)
		milla(s)	=		1 metro(s)

i. Abre una hoja de cálculo electrónica y copia la información que se muestra. En la celda E3, escribe "=B3*2.54". Observa que al modificar el valor de la celda B3, también varía la cantidad de la celda E3.

ii. En las celdas E4 a E6, anota las operaciones que corresponden a las otras conversiones entre unidades de longitud del Sistema Inglés al Sistema Internacional de Unidades. Para ello, considera la información de equivalencias.

v. En la celda B3, escribe la fórmula que te permite expresar centímetros en pulgadas (si la escribes correctamente, aparecerá la cantidad que se muestra en la imagen). En las celdas B4 a B6, anota las fórmulas correspondientes para las demás conversiones.

vi. Usa el programa para hacer las siguientes conversiones. Redondea a décimos.

- | | |
|------------------------------------|--------------------------------|
| a) 12 centímetros = _____ pulgadas | c) 25 centímetros = _____ pies |
| b) 180 centímetros = _____ yardas | d) 2 200 metros = _____ millas |

2. Trabaja de manera individual.

- En una nueva hoja electrónica de cálculo, copia la información de la imagen.
- En las celdas E3, E4, E10 y E11, escriban las fórmulas correspondientes para hacer conversiones entre las unidades que se muestran. Usa la siguiente información como apoyo.

Equivalencia entre unidades de capacidad

$$1 \text{ onza líquida}^* = 29.57 \text{ mililitros}$$

$$1 \text{ galón} = 3.79 \text{ litros}$$

*onza líquida estadounidense

Equivalencia entre unidades de peso

$$1 \text{ onza} = 28.35 \text{ gramos}$$

$$1 \text{ libra} = 453.59 \text{ gramos}$$

	A	B	C	D	E	F
1						
2		Conversión entre unidades de capacidad				
3		1 onza(s) líquida(s)	=		1 mililitro(s)	
4		1 galón (o galones)	=		1 litro(s)	
5						
6						
7						
8						
9		Conversión entre unidades de peso				
10		1 onza(s)	=		1 gramo(s)	
11		1 libra(s)	=		1 gramo(s)	
12						

- Resuelve las situaciones. Haz los cálculos con la hoja de cálculo electrónica.

- ¿Cuántos mililitros contiene un envase de 12 onzas líquidas? _____
- Para un evento se compraron cinco envases de jugo, cada uno de 2.5 galones.
¿Cuántos litros se compraron en total? _____
- ¿Cuántos gramos pesa una polaina de cinco libras? _____
- Un producto pesa 35 onzas. ¿Cuánto pesa en gramos? _____

- Elimina la información de las columnas B y E.
En las celdas E3, E4, E10 y E11, escribe 1.

	B	C	D	E	F	
		Conversión entre unidades de capacidad				
	0.03381806	onza(s) líquida(s)	=		1 mililitro(s)	
		galón (o galones)	=		1 litro(s)	

- En las celdas B3, B4, B10 y B11, escribe las fórmulas que permiten hacer conversiones entre las unidades correspondientes (en la imagen se muestra la cantidad que se obtiene para el primer caso).

- Obtén las siguientes conversiones con la hoja de cálculo electrónica. Redondea a décimos.

- 240 mililitros = _____ onzas líquidas
- 80 litros = _____ galones
- 350 gramos = _____ onzas
- 700 gramos = _____ libras
- 1 000 mililitros = _____ onzas líquidas
- 120 litros = _____ galones
- 1 000 gramos = _____ onzas
- 2 500 gramos = _____ libras

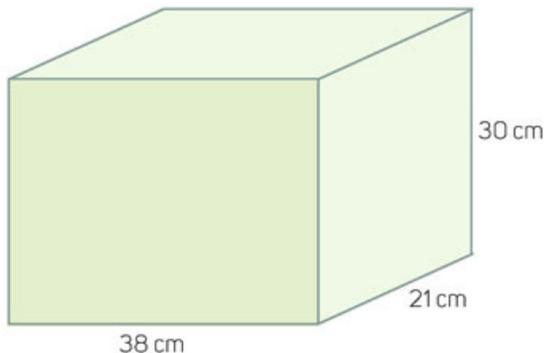
- Compara tus resultados con los de tus compañeros. Corrige si lo consideras necesario.

Volumen de prismas rectos



Analiza las imágenes y responde.

1. La imagen que se muestra representa un prisma recto.



- ¿Qué forma tiene la base? _____
- ¿Qué forma tienen los lados? _____
- ¿Qué datos necesitas para calcular su volumen? _____
- ¿Cuál es la fórmula para calcular su volumen? _____
- ¿Cuál es el volumen del prisma? _____

- Reúnete con un compañero, comparen sus respuestas y recuerden qué tipo de prismas trabajaron en primero de secundaria y qué necesitaban para calcular el volumen de cada uno de ellos.



Trabaja con la persona de la actividad anterior.

1. Supongan tú y tu compañero que tienen un negocio en el cual elaboran diferentes artículos que les solicitan los clientes. Uno de ellos les pidió que hicieran una caja para regalo como la que se muestra.



a) ¿Qué deben tomar en cuenta para elaborar una caja como la anterior?

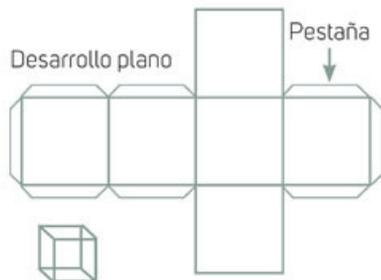
b) ¿Qué forma tiene la base? _____

c) ¿Qué forma tienen los lados de la caja? _____

d) ¿En qué es diferente la caja con respecto al prisma de la actividad inicial? _____

e) ¿Qué diferencia hay en la fórmula para calcular el volumen de la caja y la fórmula para calcular el volumen del prisma inicial? _____

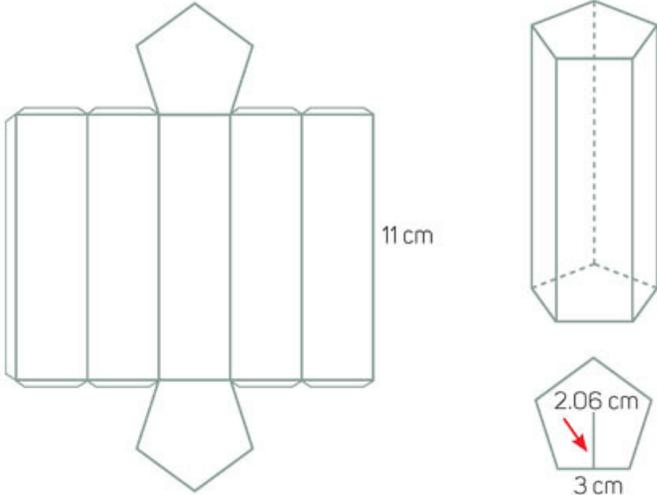
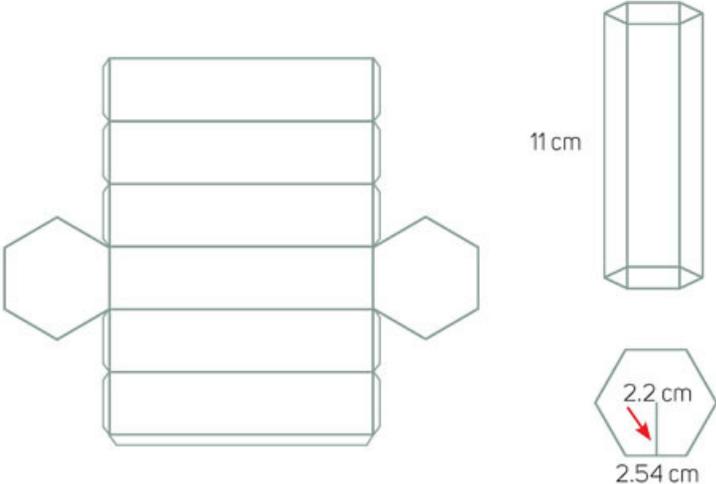
f) ¿Qué similitudes hay entre las fórmulas? _____



- En cartulina elaborarán el desarrollo plano que se muestra para armar la caja que pidió uno de los clientes. Deben tomar en cuenta que la caja tiene una tapa y visualizar dónde colocarán las "pestañas" para poder pegar los lados. Una vez armada, soliciten la opinión del profesor y, si se da el caso, mejoren su caja.

Trabajen en equipos.

2. En la primera columna hay tres imágenes: el desarrollo plano, una de las caras y el prisma que se forma con el desarrollo plano. Tomen como referencia el prisma para completar la tabla.

Desarrollo plano y medidas	Fórmulas	Volumen
	<p>Área de la base:</p> <p>Volumen prisma:</p>	
	<p>Área de la base:</p> <p>Volumen prisma:</p>	

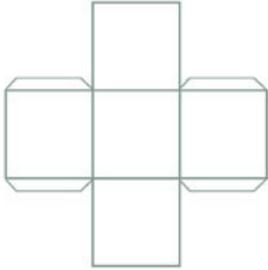
- a) Para calcular el volumen de ambas figuras, ¿qué datos fue necesario tomar en cuenta? _____
- b) ¿Cómo generalizan la fórmula para calcular el volumen de cualquier prisma? _____

- Usando cartulina, elaboren el prisma pentagonal y diseñen el desarrollo plano de un prisma octagonal y ármelo. Tomen en cuenta los lugares para colocar las pestañas.

El decímetro cúbico y el litro

Reunidos en parejas, realicen lo que se pide.

1. Armen un desarrollo plano como el que se muestra a la izquierda, que tenga de volumen $1\,000\text{ cm}^3$.



Necesitarán:

- La portada de alguna revista que ya no usen o un material resistente, ya que posteriormente lo llenarán con agua.
- Recipientes vacíos con capacidad de 1 litro, pueden ser cartones de leche o envases de refresco.
- Bolsa de plástico o cinta adhesiva para forrar o cubrirlo y evitar que se reblandezca con el agua.
- Agua

- a) ¿Cuánto debe medir cada lado? _____
- b) Construyan la figura que se forma con el desarrollo plano y llénela con agua. ¿Cuánta agua consideran que cabe en ella? _____

Aprendo mejor

Define tus horarios de estudio y las metas a las que quieras llegar en cada intervalo. Un buen descanso y una dieta saludable te ayudarán a mantener la energía y la atención en lo que aprenderás.

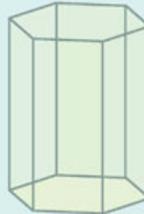
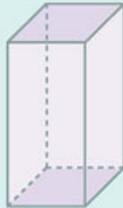
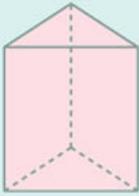
- Compruébenlo llenando alguno de los recipientes vacíos.

Trabajen en equipos.

2. Construyan un prisma hexagonal y un prisma heptagonal con capacidad de un litro cada uno.
 - a) Si la capacidad del prisma será de un litro, ¿cuánto debe medir el volumen de cada uno? _____
 - b) Escriban la medida que ustedes deseen para la longitud de un lado de la base del prisma hexagonal. _____
 - c) Escriban la medida que ustedes deseen para la longitud de un lado de la base del prisma heptagonal. _____
 - d) Tracen cada una de las caras y midan la apotema. Anoten la medida de cada una. _____
 Apotema cara hexagonal: _____ Apotema cara heptagonal: _____
 - e) ¿Cuánto deberá medir la altura de cada uno de ellos para que el volumen tenga la capacidad de un litro? _____
 Altura prisma hexagonal: _____ Altura prisma heptagonal: _____
- Antes de cerrar sus prismas, llénelos con agua y comparen si realmente cabe un litro. Puede haber un ligero margen de error, sobrar o faltar muy poca agua. Observen si los prismas de sus compañeros tienen capacidad de 1 litro y cuántos prismas diferentes de los suyos hay.

Volumen de prismas

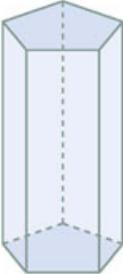
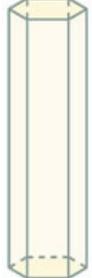
Un **prisma** es un cuerpo geométrico. Está limitado por dos polígonos planos, paralelos e iguales que se llaman *bases*, y por tantos paralelogramos como lados tengan dichas bases. Según su forma, pueden ser triangulares, rectangulares, poligonales, etcétera. Un **prisma recto** es aquel cuyas caras laterales son rectangulares.



Otras fuentes

Con el recurso interactivo de la siguiente página, podrás modificar un prisma, analizar su desarrollo plano y calcular su volumen: www.esant.mx/ecsema2-035.

3. Obtengan las medidas que faltan y completen la tabla.

Prisma	Base	Altura	Volumen
	Lado de la base: 4 cm Apotema: 2.75 cm Área de la base: _____	12 cm	
	Área de la base: _____	16 cm	400 cm ³
	Lado de la base: _____ Apotema: 1.98 cm Área de la base: 13.6026 cm ²		190.4364 cm ³

- Comparen sus resultados con otro equipo. Construyan los prismas de la tabla con las medidas que calcularon.

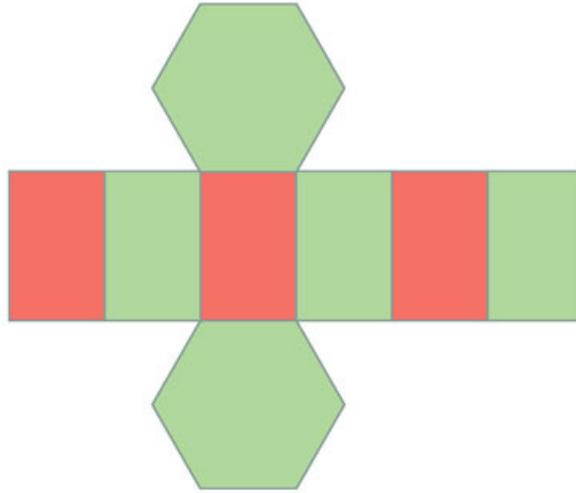
Sesión 2. Calcula el volumen o cualquiera de las dimensiones de prismas rectos cuyas bases sean un polígono regular. Usas el decímetro cúbico y el litro como unidades de volumen.

Prismas rectos

Haz lo que se pide.

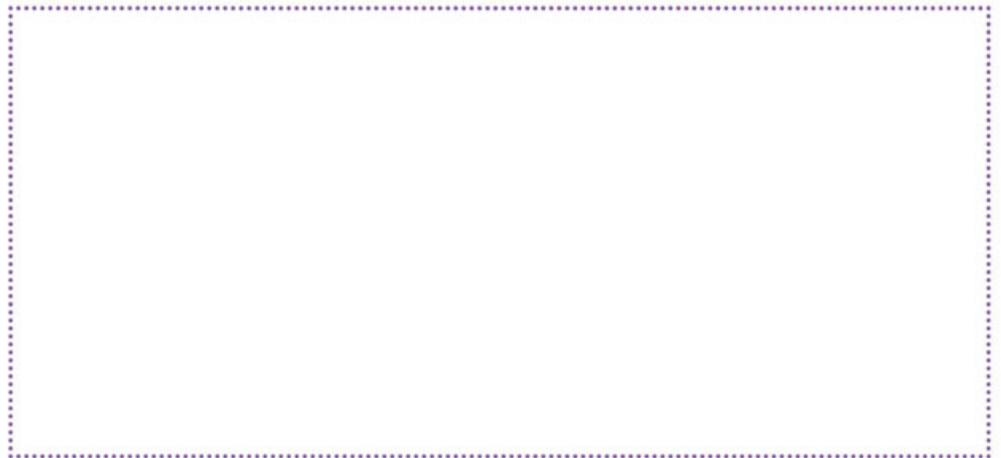
1. Calca el desarrollo plano que se muestra. Anota en él las medidas necesarias para poder calcular su volumen.

Arma el modelo tomando en cuenta la posición en que deben estar las pestañas para formarse.



- a) ¿Qué datos necesitas para calcular el volumen del prisma? _____

 - b) ¿Cuánto mide el área de la base? _____
 - c) ¿Cuál es el volumen del prisma? _____
2. Dibuja un modelo a diferente escala, de manera que al ensamblarse tengan la mitad de volumen que el prisma anterior.

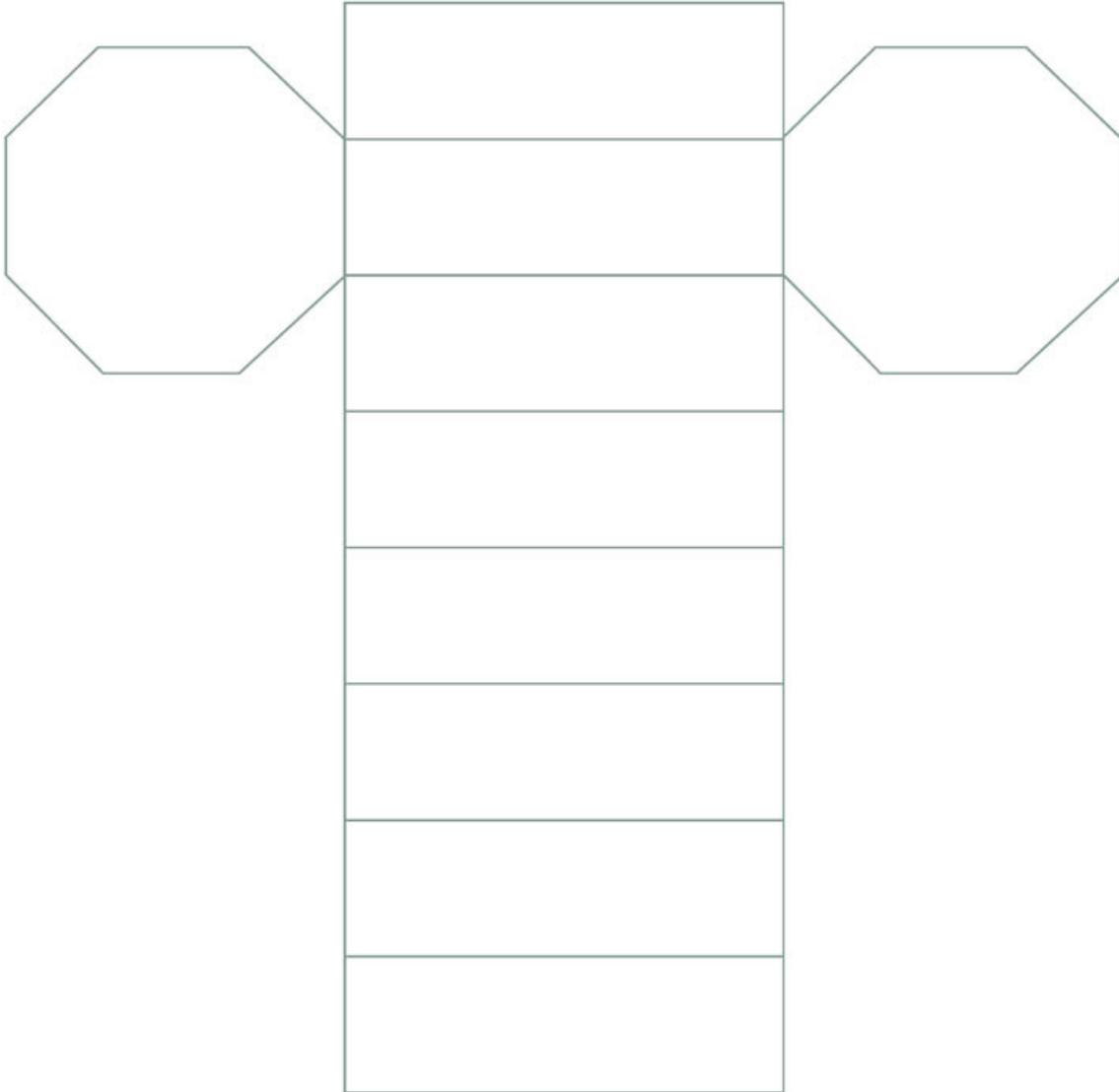


- Compara tu modelo con el grupo y comprueben que cumplen con la condición dada.

Resuelve.

1. Calca el desarrollo plano que se muestra y calcula su volumen. Luego contesta.

Arma el modelo tomando en cuenta la posición en que deben estar las pestañas para formarse.



- a) ¿Qué prisma se formó con el desarrollo plano? _____
- b) ¿Qué datos necesitas para calcular su volumen? _____

- c) ¿Cuánto mide el área de la base? _____
- d) ¿Cuál es el volumen del prisma? _____

- Compara tus respuestas con el resto del grupo.

Desarrollos planos

Haz lo que se pide.



1. Construye un tubo para rollo de papel idéntico a alguno que ya no uses. No rompas ni calques el tubo original.



a) ¿Qué medidas tiene la copia que realizaste? _____

2. Usa las imágenes de la actividad 1 y coloca las medidas del tubo donde corresponde.

a) ¿Qué procedimiento seguiste para construir el nuevo tubo? _____

b) ¿Cómo comprobas que el tubo que construiste tiene las mismas medidas que el original? _____

- Compara tu procedimiento y tu respuesta con el resto del grupo.



Cilindro recto

Resuelvan en parejas.

1. En algunos lugares se usan rollos más grandes. Diseñen un modelo que al armarse sea más amplio que el que construyeron antes, pero que tenga la misma longitud.



a) ¿Qué medidas modificaron para construir el nuevo tubo? _____

b) Usen la imagen de la izquierda y escriban las medidas que usaron donde corresponde.

c) Comparen el tubo que elaboraron con el de otra pareja. ¿Qué medidas usaron?

d) ¿Qué hicieron para construir el tubo? _____

2. Ahora diseñen un modelo que permita construir un tubo para toallas de papel. Dado que sus hojas son grandes, algunas personas usan toallas de papel para limpiar alguna superficie, envolver algún alimento, como mantel o para otros fines.

a) ¿Qué medidas modificaron al construir el nuevo tubo? _____

b) En la imagen de la derecha indiquen las medidas que usaron.

c) Comparen su tubo con el de otra pareja. ¿Qué medidas usaron? _____

d) ¿Qué pasos siguieron para construir el tubo? _____



3. En equipos, elaborarán dulceros con los **tubos** que han armado. Para ello necesitarán colocar una tapa circular en la base del tubo, para formar un **cilindro hueco**. Completen la tabla para determinar la medida de la base de cada uno.



Glosario

tubo. pieza hueca, de forma por lo común cilíndrica y abierta por ambos extremos.

cilindro hueco. pieza de forma cilíndrica que tiene un vacío en su interior.

cilindro sólido. pieza cilíndrica que no tiene vacío su interior.

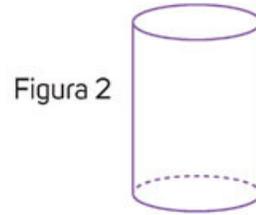
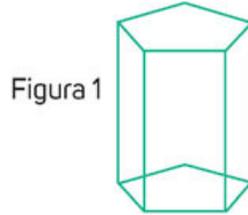
	Medida del radio: _____ Medida del diámetro: _____	Área de la base: _____
	Medida del radio: _____ Medida del diámetro: _____	Área de la base: _____
	Medida del radio: _____ Medida del diámetro: _____	Área de la base: _____

- Comparen sus estrategias de solución y sus procedimientos con los de otro equipo y muestren sus dulceros a todo el grupo.

Volumen del cilindro recto

Haz lo que se pide.

1. Observa las imágenes y contesta.



- a) ¿Qué diferencia hay entre la figura 1 y la figura 2? _____

- b) ¿Qué similitudes hay entre ambas figuras? _____
- c) ¿Qué procedimiento usas para obtener el volumen de la figura 1? _____

- d) ¿Cómo obtienes el volumen de la figura 2? _____
- e) ¿Qué tienen en común ambos procedimientos para obtener el volumen de las figuras? _____
- f) Visualiza la forma del desarrollo plano para armar la figura 2. Utiliza una hoja de reúso para trazarlo con las medidas que decidas y reproducélo en cartulina. Recuerda incluir las pestañas para ensamblar la figura.
- g) Comparte tu desarrollo plano con tus compañeros del grupo y, en los recuadros, dibuja a escala tu desarrollo y otro distinto. En ambos dibujos, anota las medidas que fueron necesarias para construir el desarrollo.

Mi desarrollo plano	Desarrollo plano de otro compañero

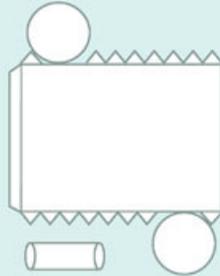
- h) ¿Qué medidas fueron necesarias para crear el desarrollo plano? _____

- i) ¿Qué fórmula te permite calcular el volumen del cilindro? _____

- Corroboras tus respuestas y procedimientos con otro compañero.

Cilindro recto

Un **cilindro recto** es un cuerpo geométrico con bases circulares paralelas entre sí y un lado curvo cerrado llamado **generatriz**, que surge por el movimiento circular de un eje. Puede armarse con el siguiente desarrollo plano.



El volumen de un cilindro de altura h y de radio r es:
 Volumen = Área de la base \times altura = $(\pi \times r^2) \times h = \pi r^2 h$

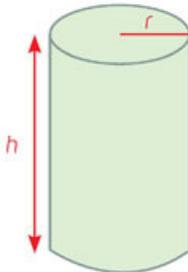
Glosario

generatriz. Línea exterior de una superficie que al girar alrededor de un eje da lugar a un cuerpo de revolución, como el cilindro.

j) ¿Qué similitudes y diferencias hay entre los desarrollos planos que dibujaste a escala y el que se muestra en el recuadro?

2. Emplea la fórmula correspondiente y calcula lo que se pide en cada figura. Considera $\pi = 3.14$.

a)



$$r = 35 \text{ cm}$$

$$h = 76 \text{ cm}$$

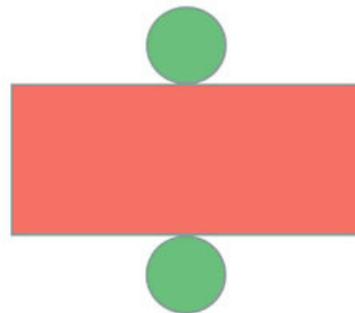
$$\text{Área de la base} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\text{Volumen} = \underline{\hspace{2cm}}$$

b) En el desarrollo plano coloca una h en la altura del cilindro. Si el radio del círculo es igual a 3 cm y la altura es igual a 12 cm...

i. ¿Cuál es el área de la base?

ii. ¿Cuál es el volumen del cilindro que resulta al armarse el desarrollo plano?

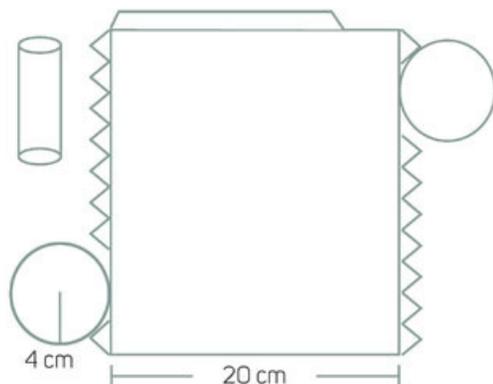


c) Escribe la fórmula que utilizaste para calcular los volúmenes anteriores.

- Comenta tus respuestas en grupo. Valida la fórmula propuesta.

Cálculo del volumen del cilindro y de cualquiera de sus dimensiones

Resuelve.



1. Construye un desarrollo plano con las medidas que se indican en la figura.

a) ¿Cuánto mide el área de una de las bases?

b) Usa la fórmula que determinaste al final de la página anterior para calcular el volumen del cilindro y escríbelo.

Volumen: _____

2. Construye el cilindro y refuerza las paredes con algún tipo de cubierta plástica, bolsa de plástico o cinta adhesiva. Con un recipiente graduado, vierte agua dentro de él.

a) ¿Cuántos litros caben en él? _____

b) ¿Cuál es su volumen? _____

- Comprueba si la fórmula que determinaste es correcta y si te dio como respuesta un valor aproximado a $1\,000\text{ cm}^3$. Posteriormente compara la siguiente información con tu fórmula.

Volumen del cilindro

La **fórmula para calcular el volumen del cilindro** es muy parecida a la de los prismas rectos, $A_b \times h$ (área de la base por la altura). Dado que la base del cilindro es circular, el volumen del cilindro es igual a $(\pi r^2)h$ (pi por radio al cuadrado por altura).



Cuando se usa un barril químico es de vital importancia la vestimenta de protección adecuada y seguir las normas de seguridad establecida.

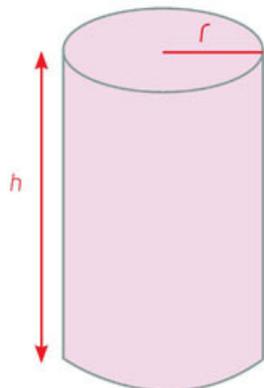
3. Una persona necesita almacenar 159 litros de un producto químico. Todos los barriles disponibles para este tipo de sustancias tienen la misma área de la base y lo que cambia es la altura. Si el radio de las bases es de 28.9 cm, ¿cuánto debe medir la altura del barril para que contenga justamente el producto sin que sobre mucho espacio? _____

- Comprueba tu respuesta con la de otro compañero. ¿Qué fórmula usaron? ¿Qué otras cosas además de la fórmula tuvieron que emplear?

Haz lo que se pide.



1. Resuelve. Considera $\pi = 3.14$ y h como la altura.



- a) El volumen de un cilindro es de $1\,093.034\text{ cm}^3$, tiene una altura de 10 cm , y el área de su base es igual a 109.3034 cm^2 .
- ¿Cuál es el radio de la base? _____
 - ¿Qué estrategia de solución usaste? _____
- b) El área de la base de un cilindro es de 58.9 cm^2 y su altura, de 2.5 cm . ¿Cuál es su volumen? _____
- ¿Qué estrategia de solución seguiste? _____
- c) El radio de un contenedor cilíndrico mide 23 cm , y su altura, 100 cm . ¿Cuál es su capacidad en litros? _____
- ¿Qué estrategia de solución seguiste? _____
- d) El diámetro de la base de un cilindro es de 42 cm y su volumen de $36\,003.24\text{ cm}^3$. Calcula su altura. _____
- ¿Qué estrategia de solución seguiste? _____
- e) La altura de un cilindro es de 93 cm y su volumen, de $7\,272.6\text{ cm}^3$. ¿Cuál es el área de su base? _____
- ¿Qué estrategia de solución seguiste? _____

- Compara tus resultados y tus estrategias de solución con las de otros dos compañeros. Si sus respuestas son diferentes, argumenten qué pudieron haber omitido o si cometieron errores en los cálculos.

Otras fuentes

Analiza la animación que se presenta en el siguiente vínculo. Dando clic en el botón "Inicia la Animación", puedes modificar los datos (radio de la base y altura) para ver cómo cambia el cilindro.

www.esant.mx/ecsema2-036.

Probabilidad teórica de un evento

Analiza la situación y responde.



1. En un examen para el cual no estudiaste, lees una pregunta cuya respuesta desconoces por completo. La pregunta tiene cinco opciones de respuesta y solo una es correcta, como se muestra:

A) -1892 B) 1810 C) 1822 D) 1910 E) Ursidae

a) ¿Qué harías para responder la pregunta? _____

b) Sin conocer la pregunta, ¿cuál respuesta elegirías? ¿Por qué? _____

Probabilidad clásica o teórica



Reúnete con un compañero y analicen la situación. Luego respondan.

1. En algunos casos, cuando nos enfrentamos a situaciones parecidas a la anterior, responder es una cuestión de azar, algo así como "atinarle" al número ganador de la lotería.
 - a) Con las opciones de respuesta dadas, completen la tabla.

	Opciones posibles	Probabilidad de "atinarle"
Si no conocemos la pregunta o desconocemos por completo la respuesta.		
Si la pregunta involucra hacer operaciones con números enteros.		
Si la pregunta refiere a un año importante en la historia contemporánea de un país.		
Si la pregunta es sobre un año importante en la historia contemporánea de México.		
Si la pregunta pide un ejemplo de mamífero.		
Si la pregunta cuestiona por el nombre del quinto planeta del sistema solar.		

b) ¿Dónde hay más probabilidad de "atinarle"? _____

c) ¿Dónde hay menos probabilidad de "atinarle"? _____

- Comparen sus respuestas con las del resto del grupo y lleguen a conclusiones generales. Den su opinión sobre la siguiente frase: "Cuanto más cosas estemos seguros de saber, mayor será la probabilidad de contestar correctamente".

Probabilidad clásica o teórica

Se define como **probabilidad clásica o teórica** a la probabilidad de que ocurra un evento en teoría. Todos los casos posibles de un evento tienen la misma probabilidad de ocurrir. La probabilidad teórica de un evento (x) es igual al cociente del número de casos favorables a ese evento entre el número total de resultados posibles.

$$P(x) = \frac{\text{Número de casos favorables al evento } x}{\text{Número de todos los posibles resultados}}$$

Es necesario aclarar que “casos favorables” no debe interpretarse literalmente, es decir, no significa “casos que solo nos favorezcan”. Por ejemplo, se calcula que en un año, de cada 10 000 000 de personas que viajan en avión, mueren 12 000. Si calculamos la probabilidad de morir en un accidente de avión, no es que de manera literal, “morir sea un caso favorable”. Solo es el caso por estudiar, por lo cual podría representarse como:

$$P(m) = \frac{12000}{10000000} = \frac{12}{10000} = \frac{6}{5000} = \frac{3}{2500}$$

Por tanto, la probabilidad de que una persona muera $P(m)$ en un accidente de avión es de 0.12%; es decir, que de cada 2 500 personas que viajan en avión, 3 mueren. Los eventos favorables son los que cumplen con la condición que se está buscando.

2. Con base en la información anterior, corroboren la probabilidad que determinaron para cada una de las situaciones anteriores.
 - a) Elijan uno de los cinco incisos de respuesta:
 - b) Si la pregunta es: ¿En qué año Brasil se independizó de Portugal? ¿Coincide con el inciso que eligieron? _____
- Si desconocen el año en que Brasil se independizó, investiguenlo y corroboren su respuesta.
3. Determinen la probabilidad teórica de las siguientes situaciones.

Situación	Número de eventos favorables	Total de resultados	Probabilidad
Ganar al lanzar una moneda si cae “águila”.			
Ganar al lanzar una moneda si cae “sol”.			
Perder en un juego de dados si sale un 3.			
Perder en un juego de dados si sale un número par.			
Perder en un juego de dados si sale un número par o el 1.			
Obtener un 7 de corazones al tomar al azar una carta de una baraja de póquer (hay cincuenta cartas en total).			

- Comparen sus respuestas con las de otra pareja y comenten sus argumentos. Con ayuda del profesor, lleguen a conclusiones generales.

Diferencia entre probabilidad teórica y frecuencial

Haz lo que se pide.

- Analiza las situaciones y contesta.
 - Antes de lanzar una moneda, ¿qué piensas que caerá: águila o sol? _____
 - ¿Cuál es la probabilidad de obtener ese resultado? _____
 - Lanza una moneda y registra el resultado. ¿Coincide con tu respuesta? _____
 - ¿Consideras que el resultado será el mismo si lanzas la moneda una segunda vez? Argumenta tu respuesta. _____
 - Si repitieras el lanzamiento 1 000 veces, ¿piensas que algún resultado saldría más veces que otro o serían iguales? Argumenta tu respuesta. _____
- Para observar el comportamiento de las preguntas anteriores, lanza 15 veces una moneda y completa la tabla. Si es posible, simplifica la fracción.

Lanzamiento #	Probabilidad teórica	Resultado	$\frac{\text{Cantidad de veces que ha caído tu respuesta del inciso a}}{\text{Cantidad de lanzamientos realizados}}$
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			

- ¿Qué diferencias identificas entre el primer lanzamiento y el segundo?
- Describe lo que observas con respecto a la relación entre el resultado al lanzar la moneda y el número de lanzamientos.
- ¿El resultado puede considerarse como la probabilidad de que "caiga águila" o "caiga sol"? Argumenta tu respuesta.

- Compara tus resultados de la tabla y tus respuestas con los de otro compañero.

Probabilidad frecuencial o experimental

Es la probabilidad que depende de los resultados de cada experimento y se calcula de la siguiente manera:

$$P(x) = \frac{\text{Número de eventos favorables en el experimento}}{\text{Número total de intentos}}$$

Por ejemplo, si le apostamos a que caiga "águila (a)" en el primer lanzamiento de una moneda y no cae, entonces la probabilidad experimental de obtener "águila" es $P(a) = \frac{0}{1}$; es decir, se lanzó una vez una moneda y no cayó águila.

Si en el segundo lanzamiento no cae "águila" de nuevo, la probabilidad experimental de obtener "águila" es $P(a) = \frac{0}{2}$; es decir, se lanzó 2 veces una moneda y 0 veces cayó águila.

Pero si en el tercer lanzamiento sí cae "águila", entonces la probabilidad experimental de obtener "águila" es $P(a) = \frac{1}{3}$; es decir, se lanzó 3 veces una moneda y 1 vez cayó águila.

De esta manera se modificará la probabilidad según el número de lanzamientos y el resultado en cada uno.

Otras fuentes

Interactúa con el siguiente recurso para simular múltiples lanzamientos de un dado.

www.esant.mx/ecsema2-037

¿Cómo vamos?

1. Escribe si las siguientes situaciones se tratan de una probabilidad teórica, experimental, de ambas o de ninguna de ellas. Argumenta tu respuesta.

a) La probabilidad de que salga un 6 al lanzar por décima vez un dado es de $\frac{4}{10}$.

b) La probabilidad de que salga "águila" en el primer lanzamiento es de $\frac{1}{3}$.

c) La probabilidad de que salga un 5 al lanzar un dado por primera vez es de $\frac{1}{6}$.

d) La probabilidad de que caiga "sol" al lanzar una moneda por segunda vez es $\frac{1}{2}$.

- Compara tus respuestas con las del resto del grupo y, en conjunto, lleguen a conclusiones generales. No realicen los lanzamientos, solo argumenten las razones de sus respuestas y escriban sus conclusiones en su cuaderno.

Experimentando

En grupo hagan lo que se pide.

- Retomen los datos que generaron al lanzar una moneda 15 veces en la actividad 2 de la sesión 2. Por número de lista dicten al grupo la cantidad de veces que obtuvieron "sol" en sus 15 lanzamientos. Pueden agregar casillas si lo requieren. Deben tener al menos 50 registros.
 - Calculen la probabilidad teórica y la probabilidad frecuencial.

Número de lista	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Número de "sol"										
Probabilidad teórica										
Probabilidad frecuencial										
Número de lista	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Número de "sol"										
Probabilidad teórica										
Probabilidad frecuencial										
Número de lista	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Número de "sol"										
Probabilidad teórica										
Probabilidad frecuencial										
Número de lista	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Número de "sol"										
Probabilidad teórica										
Probabilidad frecuencial										
Número de lista	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
Número de "sol"										
Probabilidad teórica										
Probabilidad frecuencial										

- ¿Qué ocurre con la probabilidad teórica y la frecuencial al incrementarse el número de lanzamientos? _____
- ¿Dónde hay más diferencia entre las probabilidades? _____



En grupos, resuelvan la actividad.

1. Cada alumno debe contar con un dado de seis caras. De manera grupal elijan un número del 1 al 6. Cada uno lance 20 veces el dado y completen la tabla.

Número de lista	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Cantidad de veces que salió el número elegido										
Probabilidad teórica										
Probabilidad frecuencial										
Número de lista	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Cantidad de veces que salió el número elegido										
Probabilidad teórica										
Probabilidad frecuencial										
Número de lista	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Cantidad de veces que salió el número elegido										
Probabilidad teórica										
Probabilidad frecuencial										
Número de lista	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Cantidad de veces que salió el número elegido										
Probabilidad teórica										
Probabilidad frecuencial										
Número de lista	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
Cantidad de veces que salió el número elegido										
Probabilidad teórica										
Probabilidad frecuencial										

- a) ¿Puede considerarse que la probabilidad frecuencial de los primeros 20 resultados es confiable? Argumenta tu respuesta. _____
- b) ¿En qué probabilidad confiarían más? _____
- c) De todas las probabilidades frecuenciales calculadas, ¿en cuál confiarían más?

- d) ¿Qué tendrían que hacer para tener una probabilidad frecuencial más confiable?

- En su cuaderno redacten un resumen de lo aprendido en esta secuencia. Pidan a su profesor que los apoye para validarlo.

¿Cómo lo hicimos?

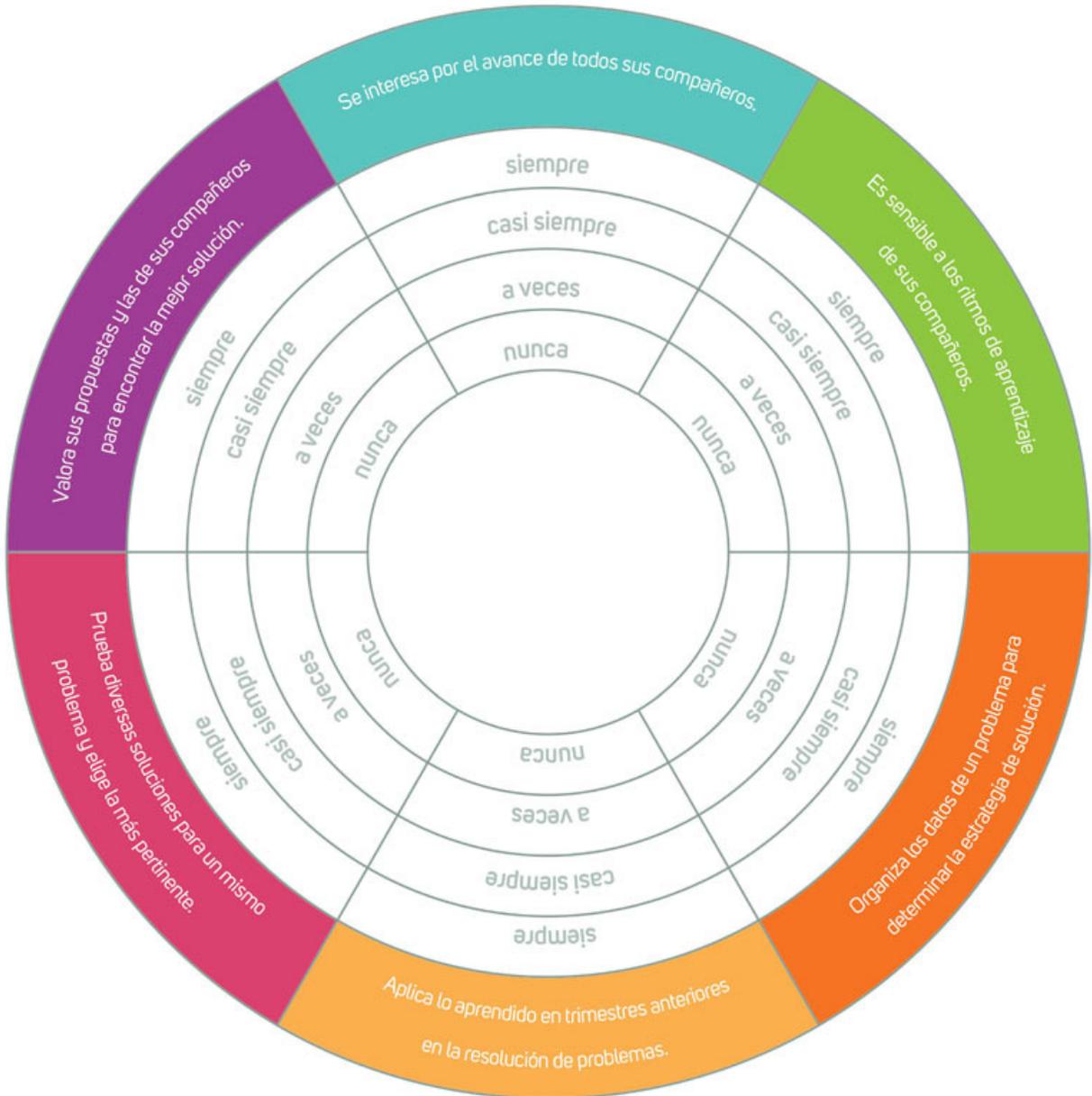
1. Marca la casilla que describe mejor tu desempeño.

Aprendizajes Esperados	Nivel de logro		
	En proceso	Satisfactorio	Excelente
Resuelvo problemas de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.	Se me dificulta resolver sistemas de dos ecuaciones lineales con algún método algebraico. <input type="checkbox"/>	Resuelvo sistemas de dos ecuaciones lineales con cualquier método algebraico, pero tengo dificultades para plantear el sistema que representa una situación. <input type="checkbox"/>	Resuelvo problemas mediante el planteamiento y resolución de sistemas de dos ecuaciones lineales; elijo el método más conveniente para la solución de ese sistema. <input type="checkbox"/>
Analizo la proporcionalidad inversa.	Tengo algunas dificultades para identificar las situaciones de proporcionalidad inversa. <input type="checkbox"/>	Distingo algunas características de situaciones de proporcionalidad inversa. <input type="checkbox"/>	Identifico cualquier representación de una situación de proporcionalidad inversa y resuelvo problemas de este tipo en diversos contextos. <input type="checkbox"/>
Resuelvo problemas que impliquen verificar algebraicamente la equivalencia de expresiones de primer grado, formuladas a partir de sucesiones.	Se me dificulta establecer algebraicamente reglas generales de sucesiones de primer grado. <input type="checkbox"/>	Puedo obtener algebraicamente reglas generales de algunas sucesiones de primer grado. <input type="checkbox"/>	Obtengo y justifico expresiones algebraicas equivalentes que representan reglas generales de sucesiones de primer grado. <input type="checkbox"/>
Resuelvo problemas que requieran convertir en múltiplos y submúltiplos y entre unidades del Sistema Internacional de Unidades y las unidades del Sistema Inglés.	Puedo resolver problemas que implican conversiones en múltiplos y submúltiplos del metro, litro, kilogramo; pero se me dificultan las unidades de medidas inglesas. <input type="checkbox"/>	Puedo resolver problemas que implican conversiones en múltiplos y submúltiplos de unidades del Sistema Internacional de Unidades y del Sistema Inglés, pero se me dificultan las conversiones entre unidades de los dos sistemas. <input type="checkbox"/>	Resuelvo problemas en que debo convertir en múltiplos y submúltiplos de unidades del Sistema Internacional de Unidades y del Sistema Inglés y entre unidades de ambos sistemas. <input type="checkbox"/>
Resuelvo problemas que requieren justificar y aplicar la fórmula del volumen de prismas cuya base sea un polígono regular y del cilindro.	Calculo el volumen de prismas rectos y del cilindro, pero tengo dificultades para determinar otra de sus dimensiones cuando se conoce el volumen. <input type="checkbox"/>	Calculo el volumen de prismas rectos y del cilindro, así como cualquiera de sus dimensiones cuando se conoce el volumen. <input type="checkbox"/>	Resuelvo problemas que requieran calcular el volumen de prismas rectos y del cilindro, así como cualquiera de sus dimensiones cuando se conoce el volumen, usando el decímetro cúbico y el litro como unidades. <input type="checkbox"/>

• Reflexiona sobre tus resultados y, con tu profesor, busca estrategias para fortalecer tus áreas de oportunidad.

¡Vamos a reflexionar sobre las actitudes y los valores que desarrollaste en este trimestre!

2. Pide a un compañero que coloree la franja que representa mejor el nivel donde te ubicas.



3. Lee y responde de manera individual.

- ¿Qué es lo que más te gustó de este trimestre? _____
- ¿Qué es lo que menos te gustó de este trimestre? _____
- ¿Qué puedes mejorar en el próximo ciclo escolar? _____

Para el alumno

Impresas

- Charles, Seife. *Cero. La biografía de una idea peligrosa*, Ellago Ediciones, Madrid, 2006.
- Doxiadis, Apostolos. *El tío Petros y la conjetura de Goldbach*, Ediciones B, Barcelona, 1992 (colección Tiempos Modernos).
- Enzensberger, Hans Magnus. *El diablo de los números. Un libro para todos aquellos que le temen a las matemáticas*, Siruela, Madrid, 2013.
- Guedj, Denis. *El teorema del loro*, Anagrama, Barcelona, 1998.
- Haddon, Mark. *El curioso incidente del perro a medianoche*, Salamandra, Barcelona, 2004.
- Haghenbeck, G. F. *Matemáticas para las hadas*, Grijalbo, Barcelona, 2018.
- Leavitt, David. *El contable hindú*, Anagrama, Barcelona, 2011.
- Neville, Katherine. *El ocho*, Ballantine Books, Barcelona, 1998.
- Martínez, Guillermo. *Los crímenes de Oxford*, Destino, Barcelona, 2003.
- Moreno, Ricardo. *Una historia de las matemáticas para jóvenes*, S. L. Nivola Libros y Ediciones, Madrid, 2008.
- Ogawa, Yoko. *La fórmula preferida del profesor*, Funambulista, Madrid, 2014.
- Sierra i Fabra, Jordi. *El asesinato del profesor de matemáticas*, Anaya, Madrid, 2000.
- Tahan, Malba. *El hombre que calculaba*, Limusa, Barcelona, 2008.

Electrónicas

- Conaliteg. Portal que ofrece en formato digital todos los libros de Matemáticas de primero de secundaria y telesecundaria. También encontrarás los títulos en lengua indígena. libros.conaliteg.gob.mx/content/common/consulta-libros-gb/ (consulta: 18 de junio de 2018, 5:48 h).
- Biblioteca digital del ILCE. Portal que ofrece obras y colecciones de libros para su libre acceso en internet. Presenta obras de cultura general: literatura, arte, geografía, historia, divulgación científica, educación ambiental y pedagogía, entre otras. Además, cuenta con una sección infantil que brinda opciones de lectura para la edad escolar y una sección de didáctica para apoyar el trabajo y la formación del docente de educación básica. bibliotecadigital.ilce.edu.mx/ (consulta: 18 de junio de 2018, 5:50 h).
- es.khanacademy.org/math (consulta: 13 de noviembre de 2017, 20:50 h)
En este sitio tendrás acceso a actividades interactivas para practicar diversos temas matemáticos, como sistemas de ecuaciones, expresiones algebraicas, sucesiones, probabilidad, entre otros.
- arquimedes.matem.unam.mx/PUEMAC/Secundaria.html (consulta: 13 de noviembre de 2017, 21:11 h).
En esta dirección electrónica hallarás actividades interactivas que permiten abordar diversos temas propuestos para la secundaria. Podrás hacer construcciones dinámicas de geometría y realizar juegos aritméticos.

Para la elaboración de este libro

Impresas

- ALRØ, H. y otros. *Critical mathematics education: past, present and future. Festschrift for Ole Skovsmose*, Sense Publishers, Róterdam, 2010.
- Balacheff, N. *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas: una empresa docente*, Universidad de los Andes, Bogotá, 2000.
- Batanero, C. y otros. *Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas escolares. Casos y perspectivas*, SEP, México, 2011.
- Bernabé, R. "El sentido numérico y sus vínculos con el rendimiento escolar en aritmética", tesis de maestría, Cinvestav / IPN, México, 2008.
- Bishop, A. *Enculturación matemática: la educación matemática desde una perspectiva cultural*, Paidós, Barcelona, 1999.
- Cobb, P. *Learning mathematics: constructivist and interactionist theories of mathematical development*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994.
- D'ambrosio, U. *Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics. For the learning of mathematics*, vol. 5, FLM Publishing Association, Montreal, 1995, pp. 44-48.
- Franke, M. L. y otros. *Mathematics teaching and classroom practice*, Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, Charlotte, 2007, pp. 225-256.
- Freudenthal, H. *Revisiting mathematics education: China lectures*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991.
- Morin, E. *Los siete saberes necesarios para la educación del futuro*, Unesco, París, 1997.

Electrónicas

- Krummheuer, G. "Narrative elements of children's argumentations in primary mathematics Classrooms".
webdoc.gwdg.de/ebook/e/gdm/1997/krummheuer.pdf (consulta: 18 de junio de 2018, 6:17 h).
- Radford, L. "Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective. Proceedings of the 28th Annual Meeting of the North American Psychology Mathematics Education".
www.luisradford.ca/pub/60_pmena06.pdf (consulta: 18 de junio de 2018, 6:25 h).
- SEP. "Aprendizajes clave para la educación integral. Plan y programas de estudio para la educación básica".
www.aprendizajesclave.sep.gob.mx/descargables/APRENDIZAJES_CLAVE_PARA_LA_EDUCACION_INTEGRAL.pdf (consulta: 18 de junio de 2018, 6:21 h).
- Schwarzkopf, R. "Argumentation processes in mathematics classrooms functional argumentation analysis: a method to describe orally developed arguments".
webdoc.gwdg.de/ebook/e/gdm/1999/ (consulta: 18 de junio de 2018, 6:23 h).

Matemáticas 2 llegó a su fin.
Esperamos que este material haya
sido un buen compañero de viaje.
¡Hasta luego y nos vemos en el
próximo libro!



Matemáticas 2

En **Matemáticas 2** de la serie **Espacios Creativos** encontrarás diversas oportunidades para trabajar en parejas o en equipo; es decir, de manera colaborativa, lo que además de enriquecer tu aprendizaje, hará del salón de clases un espacio de quehacer creativo y de convivencia armónica.

A lo largo del libro resolverás problemas, comprenderás conceptos matemáticos, usarás y dominarás las técnicas, evaluarás tus procedimientos y argumentarás y comunicarás tus resultados.

Lo anterior te llevará a reconocer a las matemáticas como una asignatura útil para enfrentar retos cada vez más complejos, analizar situaciones y tomar decisiones en situaciones diversas.



**espacios
creativos**

DISTRIBUCIÓN GRATUITA
PROHIBIDA SU VENTA

santillanacontigo.com.mx