

TRAVESÍAS
SECUNDARIA

Matemáticas 2

Anne Alberro Semerena



castillo
A Macmillan Education
Company

Travesías es una serie diseñada por el Departamento de Proyectos Educativos de Ediciones Castillo.

Autores: D. R. © 2016 Anne Marie Pierre Alberro Semerena

Dirección editorial: Tania Carreño
Gerente de secundaria: Fabián Cabral
Gerente de Arte y diseño: Cynthia Valdespino

Coordinación editorial: Verónica Velázquez
Edición: Blanca Torres
Colaboración: María Isabel Sacristán Ruiz-Funes, Bertha Francisco Nicanor
Asistencia editorial: Mónica Luna
Revisión pedagógica: José Antonio de la Peña Navarro
Elaboración de reactivos: Elia María Covarrubias Castañeda
Corrección de estilo: Coral Velázquez

Coordinación diseño: Rafael Tapia
Coordinación iconográfica: María Teresa Leyva
Coordinación operaciones: Gabriela Rodríguez
Arte y diseño: Gustavo Hernández y Federico Gianni
Supervisión diseño: Mario Vázquez
Diseño de portada: Joaquín García
Diagramación: Avant Grapgh
Iconografía: David Silva (IN Sinister)

Producción: Carlos Olvera

Matemáticas 2. Travesías
Primera edición: septiembre 2018

D. R. © 2018 Ediciones Castillo, S. A. de C. V.
Castillo © es una marca registrada
Ediciones Castillo forma parte de Macmillan Education

Insurgentes Sur 1886, Florida,
Álvaro Obregón, C. P. 01030,
Ciudad de México, México.
Teléfono: (55) 5128-1350
Lada sin costo: 01 800 536-1777
www.edicionescastillo.com

ISBN: 978-607-540-491-2

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana. Registro núm. 3304

Prohibida la reproducción o transmisión parcial o total de esta obra por cualquier medio o método o en cualquier forma electrónica o mecánica, incluso fotocopia o sistema para recuperar información, sin permiso escrito del editor.

Impreso en México / Printed in Mexico

Matemáticas 2. Travesías
Esta obra se terminó de imprimir en fecha
en los talleres de Nombre, calle número,
C. P., Ciudad de México, México.

Presentación

La palabra *travesía* hace referencia a un viaje... nos hace pensar en una aventura que supone "riesgos" y sorpresas, y que sin embargo, se antoja emprender. Así también es todo aprendizaje, no sólo el que adquirimos en la escuela. Todos los días nos desenvolvemos en una sociedad en cambio constante que demanda el desarrollo de distintas habilidades y capacidades, como la de aprender a cuestionarse sobre distintos acontecimientos, a relacionarse con diversidad de formas de pensar y actuar, a resolver problemas, entre otras.

Lo anterior se traduce en que el reto de aprender en la escuela es muy diferente hoy a como se hacía años atrás. No es suficiente que adquieras conocimientos; ahora es igualmente importante que aprendas a hacer y a ser: conocerte y valorarte a ti mismo, y conocer la sociedad en la que vives para convertirte en un factor de cambio.

El libro que tienes en tus manos, **Matemáticas 2** de la serie **Travesías**, tiene como propósito guiarte en este proceso de aprendizaje. Por ello, al elaborarlo consideramos que, además de dar información, tenía que promover la reflexión mediante actividades retadoras y garantizar que lo que aprendas te sea útil en la vida cotidiana.

Tu libro está dividido en tres bloques, cada uno tiene un número variable de secuencias didácticas, evaluaciones y páginas especiales con las que podrás conocer diversos aspectos de las matemáticas.

Matemáticas 2 de la serie **Travesías** pretende que desarrolles habilidades que te permitan reconocer, plantear y resolver problemas usando de manera flexible conceptos, técnicas y métodos aprendidos previamente; al mismo tiempo que desarrollas tu capacidad de aplicar tus propias estrategias. También promueve que fomentes tu disposición para el trabajo colaborativo y autónomo para que formules y argumentes tus conjeturas, plantees preguntas, a la vez que comunicas, analizas e interpretas ideas y procedimientos de resolución, de modo que disfrutes hacer matemáticas en el aula.

Te invitamos a emprender una *travesía* a través de las matemáticas.

Los editores

¿Cómo es mi libro? 7

Bloque 1 12

Evaluación diagnóstica 14

Eje	Tema	Aprendizaje esperado	Secuencia	Página
Número, álgebra y variación	Multiplicación y división	1. Resuelve problemas de multiplicación y división con fracciones y decimales positivos.	1. Multiplicación con fracciones y decimales positivos	16
			2. División con fracciones	22
		2. Resuelve problemas de multiplicación y división con números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos.	3. Multiplicación de números positivos y negativos	30
			4. División de números positivos y negativos	38
		3. Resuelve problemas de potencias con exponente entero y aproxima raíces cuadradas. (Este aprendizaje se concreta en el bloque 2)	5. Potencias con exponentes enteros	44
Forma, espacio y medida	Figuras y cuerpos geométricos	9. Deduce y usa las relaciones entre los ángulos de polígonos en la construcción de polígonos regulares. (Este aprendizaje se concreta en el bloque 2)	6. Diagonales y ángulos interiores de un polígono	52
			7. Relaciones entre los ángulos de un polígono	60
	Magnitudes y medidas	10. Resuelve problemas que implican conversiones en múltiplos y submúltiplos del metro, litro, kilogramo y de unidades del sistema inglés (yarda, pulgada, galón, onza y libra).	8. Múltiplos y submúltiplos del metro, litro y kilogramo	68
			9. El sistema inglés	76
Análisis de datos	Estadística	13. Recolecta, registra y lee datos en histogramas, polígonos de frecuencia y gráficas de línea. (Este aprendizaje se concreta en el bloque 2)	10. Histogramas y polígonos de frecuencia	82

Evaluación final 90

Travesías 92

Bloque 2 94
 Evaluación diagnóstica 96

Eje	Tema	Aprendizaje esperado	Secuencia	Página
Número, álgebra y variación	Multiplicación y división	3. Resuelve problemas de potencias con exponente entero y aproxima raíces cuadradas.	11. Notación científica	98
			12. Raíz cuadrada	106
	Proporcionalidad	4. Resuelve problemas de proporcionalidad directa e inversa y de reparto proporcional.	13. Problemas de proporcionalidad inversa y directa	114
			14. Problemas de reparto proporcional	122
			15. Representaciones tabular, gráfica y algebraica de la proporcionalidad inversa	130
			16. Otros problemas de proporcionalidad inversa	138
Forma, espacio y medida	Figuras y cuerpos geométricos	9. Deduce y usa las relaciones entre los ángulos de polígonos en la construcción de polígonos regulares.	17. Construcción de polígonos regulares y teselados	146
	Magnitudes y medidas	11. Calcula el perímetro y área de polígonos regulares y del círculo a partir de diferentes datos.	18. Área de polígonos regulares e irregulares	154
			19. Área del círculo	162
Análisis de datos	Estadística	13. Recolecta, registra y lee datos en histogramas, polígonos de frecuencia y gráficas de línea. 14. Usa e interpreta las medidas de tendencia central (moda, media aritmética y mediana), el rango y la desviación media de un conjunto de datos y decide cuál de ellas conviene más en el análisis de los datos en cuestión.	20. Gráficas de línea	170
			21. Desviación media	178

Evaluación final 186
 Travesías 188

Bloque 3	190
Evaluación diagnóstica	192

Eje	Tema	Aprendizaje esperado	Secuencia	Página
Número, álgebra y variación	Patrones, figuras geométricas y expresiones equivalentes	8. Formula expresiones de primer grado para representar propiedades (perímetros y áreas) de figuras geométricas y verifica equivalencia de expresiones, tanto algebraica como geométricamente (análisis de las figuras).	22. Modelos geométricos y expresiones algebraicas	194
		7. Verifica algebraicamente la equivalencia de expresiones de primer grado, formuladas a partir de sucesiones.	23. Sucesiones y expresiones algebraicas equivalentes	202
	Ecuaciones	5. Resuelve problemas mediante la formulación y solución algebraica de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.	24. Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas	210
			25. Método gráfico para resolver un sistema de ecuaciones	218
			26. Métodos algebraicos para resolver un sistema de ecuaciones	226
	Forma, espacio y medida	Magnitudes y medidas	12. Calcula el volumen de prismas y cilindros rectos.	27. Desarrollos planos de prismas y cilindros
28. Volumen de prismas rectos				242
29. Volumen de cilindros				250
Análisis de datos	Probabilidad	15. Determina la probabilidad teórica de un evento en un experimento aleatorio.	30. Probabilidad teórica	258

Evaluación final	266
------------------------	-----

Travesía	268
----------------	-----

Bibliografía	270
--------------------	-----

Créditos iconográficos	272
------------------------------	-----



Tu libro está formado por tres bloques; cada uno incluye secuencias didácticas en las que se trabajan los contenidos indispensables para cubrir los aprendizajes esperados.

Páginas iniciales



Entrada de bloque

En dos páginas encontrarás:

- una imagen alusiva a un contenido del bloque.
- títulos de las secuencias con la referencia al eje correspondiente.
- una cita para reflexionar acerca de la importancia de lo que estudiarás.

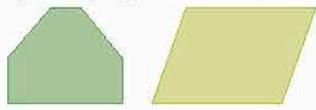
Evaluación diagnóstica

1. Subraya la respuesta correcta.
Roberto compró 5 paquetes de galletas de \$1260 cada uno y $\frac{1}{2}$ kg de queso manchego que cuesta \$168.75 el kilogramo. ¿Cuánto gastó en total?
A) \$1870 B) \$18960 C) \$13040 D) \$25260

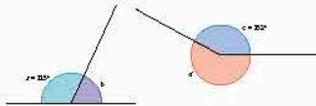
2. Realiza las operaciones correspondientes y contesta: un muro se adorna colocando tiras de madera alrededor de éste. Cada tira mide 0.35 m y la longitud del muro es de 8.44 m. Si las tiras de madera colocadas finalmente cubren 3.8 m, ¿cuántas tiras se deben colocar para terminar?

3. Subraya la opción que representa con números negativos la deuda total en un año si la deuda mensual que aparece en un recibo es de -\$370.
A) -\$582 B) -\$5712 C) -\$6387 D) -\$6940

4. Traza las diagonales del hexágono irregular y marca con colores distintos los ángulos interiores del paralelogramo.



5. Calcula la medida de los ángulos β y δ .



- A) $\alpha = 45^\circ$ y $\delta = 180^\circ$ C) $\alpha = 65^\circ$ y $\delta = 208^\circ$
B) $\alpha = 99^\circ$ y $\delta = 35^\circ$ D) $\alpha = 245^\circ$ y $\delta = 28^\circ$

6. Completa las equivalencias en las imágenes.

1 m = _____ cm 1 kg = _____ g 1 l = _____ ml

7. Escribe la letra de la magnitud que corresponde a cada unidad de medida.
Tiempo (T) Longitud (L) Masa (M)
() metro () kilogramo () hora
() libra () segundo () pulgada
() gramo () centímetro () kilómetro

8. Considera los datos y construye una gráfica de barras. Recuerda colocar títulos en la gráfica y en los ejes.
La siguiente tabla muestra la edad de los asistentes a la presentación de una obra de teatro.

Eje de datos	Hombres de 15	Mujeres de 15	Hombres de 20	Mujeres de 20	Hombres de 25	Mujeres de 25
Asistentes	3	12	24	31	29	50



9. Revisa los resultados con tu profesor. Juntos establezcan los temas en los que debes poner más atención y la estrategia de estudio a implementar para que aprendas los contenidos del bloque.

Evaluación diagnóstica

Reactivos diversos con los que tú y tu profesor podrán identificar los conocimientos, habilidades y destrezas que posees relacionados con los contenidos del bloque.

Secuencia

Párrafo introductorio en el que se contextualiza el aprendizaje esperado. Su función es que conozcas lo que estudiarás.

Texto que indica la parte del aprendizaje esperado que se desarrolla en la secuencia.

Partimos

Actividad que involucra aspectos esenciales de la secuencia, y que pone en juego tus conocimientos previos.

S6 **Diagonales y ángulos interiores de un polígono**

Debes y vas a elaborar una lista de polígonos de acuerdo a su número de lados.

Partimos

1. Utiliza tu juego de geometría para trazar lo que se solicita y contesta. Los siguientes segmentos son diagonales del polígono que indica. Trazá cada polígono y compáralo con un compañero tus figuras.



Cuadrado



Hexágono regular



Polígono irregular



Hexágono irregular

Resolvamos

Una diagonal es un segmento de un lado que divide un polígono en dos partes.

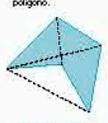
1. ¿Qué polígonos de los trazados son iguales y cuáles diferentes?
 b) ¿A qué piensas que se debe que algunos de los polígonos son iguales y otros no?
 c) ¿Existen algún polígono que no tenga diagonales? ¿Cuál?
 d) ¿Hay polígonos que solo tengan una diagonal? ¿2? ¿dos diagonales?

2. Compara con tus compañeros tus trazos y respuestas. Explica cómo construiste los polígonos a partir de las diagonales y señala qué otros datos requiriste para trazar las figuras y cómo los obtuviste.

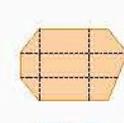
Diagonales

1. Analiza los polígonos, realiza lo que se indica y responde.

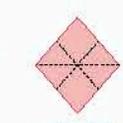
a) Considera la definición de diagonal de la sección "Recordemos" de la página 52 y marca con color verde las rectas puntuadas que son diagonales de cada polígono.



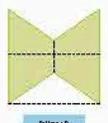
Polígono A



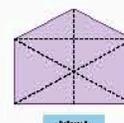
Polígono B



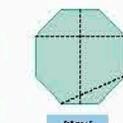
Polígono C



Polígono D



Polígono E



Polígono F

b) ¿Qué características tienen en común las rectas de cada polígono que no coloreaste para que no sean consideradas como diagonales?
 c) ¿En qué polígonos coloreaste diagonales que no son segmentos individuales?
 d) Un polígono se llama cóncavo si al menos alguna de sus diagonales es exterior al polígono. De los polígonos anteriores, ¿cuáles son cóncavos?

2. A partir de tus respuestas discute en grupo si alguna de las diagonales de un polígono tiene segmentos inclinados; ¿el lado de un polígono puede coincidir con una diagonal del mismo? ¿Toda diagonal divide al polígono en dos partes iguales? Argumenta tus respuestas.

3. Un polígono es cóncavo si todas sus diagonales son interiores. Si un polígono no es cóncavo, se llama cóncavo.

Recorremos

Conjunto de textos y actividades diversas, organizadores gráficos e imágenes, cuya presentación y organización te ayudarán a construir los conceptos y procedimientos necesarios para alcanzar los aprendizajes esperados de la secuencia.

Arribamos

1. Analiza minuciosamente la gráfica 2 de la actividad con la que inició esta secuencia. Considera la siguiente información sobre la población en México en 2016.

Edad (años)	Número de personas (en millones)
0-12	45
12-18	42
18-24	35

a) En parejas, calculen el número de personas de cada intervalo de edad que representan los porcentajes en la gráfica 2.
 b) Elaboren la tabla de frecuencias por intervalos, ubicando el punto medio de cada intervalo y construyan el polígono de frecuencia correspondiente.

2. El siguiente histograma muestra el resultado de la prueba del colesterol en miligramos por decilitro de sangre (mg/dL), realizada a 200 personas.

Registro de colesterol en las pruebas



a) ¿Cuál es la amplitud de cada intervalo?
 b) Si para tener una buena salud se considera ideal tener un colesterol de entre 180 mg/dL y 200 mg/dL, o menos, ¿qué porcentaje de las personas a las que se hizo la prueba tienen un resultado considerado ideal?
 c) ¿Qué cantidad de colesterol tiene la mayoría de las personas?
 d) Explica qué observas en el histograma con relación a la salud de las personas que se realizaron la prueba del colesterol.

e) Sobre el histograma anterior, construye el polígono de frecuencia correspondiente.

3. Con los datos de la tabla del tiempo que tarda una población infantil en resolver un problema, construye en un mismo plano los polígonos de frecuencia correspondientes.

Tiempo (minutos)	Número	Niños	Niñas
0-10	5	2	
10-20	40	33	
20-30	45	42	
30-40	10	14	
40-50	0	9	

a) ¿Hay niños tanto más de 40 minutos en resolver el problema?
 b) ¿Cuántos niños tardan más de 40 minutos?
 c) Explica al grupo cómo utilizaste los datos para construir las gráficas.

Arribamos

Actividades de cierre orientadas a la aplicación, integración y reflexión de lo aprendido.

Como parte de la secuencia dentro del desarrollo encontrarás dos secciones a modo de evaluación y cierre parcial, respectivamente.

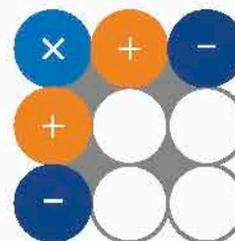
Integración

Actividad que permite establecer conclusiones sobre el conocimiento construido, ya sea que escribas tu propia definición, completes un organizador gráfico, corrijas, valides, argumentes el uso óptimo de un método, etcétera.



Integración

- De forma grupal completen el esquema con las reglas de los signos para la multiplicación de números enteros.
- Exprésenlas en forma verbal.



Formalización

Secciones donde se establecen de manera formal los conceptos, las nociones y los procedimientos trabajados en las actividades.



Multiplicar una potencia por sí misma varias veces se conoce como potencia de potencias. El resultado es igual a la base elevada al producto de los exponentes. De forma general se representa:

$$(a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m$$

Secciones de apoyo

Con el propósito de que desarrolles habilidades para la vida, aparecerán las siguientes secciones en algunas secuencias.

Tiene la finalidad de que desarrolles habilidades para aprender. Por ello, la encontrarás en las actividades de integración.



Aprendemos

Reflexiona: ¿cuáles son las habilidades mentales que utilizas al plantear o inventar un problema matemático?



Hacemos

Busquen en su entorno construcciones con forma de prismas o cilindros, ¿cómo pueden construir su desarrollo plano a escala?

Busca desarrollar tu habilidad para influir en tu entorno (casa, escuela o comunidad). La encontrarás en cualquier sitio a lo largo de la secuencia.

Fomentará tus habilidades para la convivencia social, favoreciendo el diálogo, la participación, el respeto a los derechos humanos y el manejo no violento del conflicto. La encontrarás junto a textos que aborden esas temáticas y en algunos momentos de socialización.



Convivimos

Valora y comenta: ¿por qué es importante interesarse y participar organizadamente para resolver conflictos o afectaciones en tu comunidad?



Somos

Valora: ¿cuál es la importancia de tener hábitos saludables como tomar agua y realizar alguna actividad física?

Tiene el propósito de favorecer tu autonomía y responsabilidad mediante el fomento de valores. Acompañará al texto que aborde temas que requieran de tu valoración.

Explora



En la página www.edutics.mx/36N podrás resolver otros problemas de división de fracciones y números naturales.

En esta sección se recomiendan títulos de libros, películas, páginas de internet, entre otros recursos, que te ayudarán a ampliar la información sobre los contenidos que estás estudiando.

Glosario



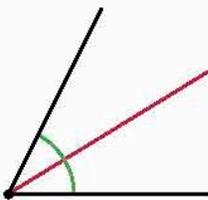
esquejes. Fragmentos de plantas (tallos, brotes o trozos de raíces) que se utilizan con fines reproductivos para obtener otras plantas idénticas.

A lo largo del libro se definen algunos términos que posiblemente desconozcas.

Recuerda



La bisectriz de un ángulo es la recta que lo divide en dos partes iguales.



Trae a la memoria algún conocimiento previo necesario para resolver la actividad.

Notación



Al escribir un intervalo, por ejemplo, de 100 a 110 se escribe un guión entre los límites, 100 - 110. En este caso, se consideran los datos iguales o mayores que 100 y estrictamente menores que 110. De este modo no se traslapan los intervalos.

Explica el significado de diversos símbolos y notaciones empleados en Matemáticas.

Páginas finales

Evaluación

Analiza cada situación y elige la opción correcta.

1. En la imagen se muestra el círculo que una computadora describe al de autor. Analiza el número que se enciende en la estación 4 y responde.

• Uno de los pilotos terminó la carrera y otro solo le faltó 85.8 puntos, ¿cuántos puntos obtuvieron en total el primer participante en que estación quedó el segundo?

A) El primero obtuvo 134.4 puntos y el segundo quedó en la estación 6.
 B) El primero obtuvo 100 puntos y el segundo quedó en la estación 7.
 C) El primero obtuvo 80.4 puntos y el segundo quedó en la estación 7.
 D) El primero obtuvo 57.2 puntos y el segundo quedó en la estación 5.

• Un corredor logró avanzar hasta $\frac{2}{3}$ de la pista, y con dificultad recorrió $\frac{1}{3}$ más del resto de la pista. Indicámente, ¿cuánto le faltaba por recorrer y en el último tramo, ¿cuántos puntos de la pista recorrió?

A) $\frac{1}{3}$ de la pista y $\frac{2}{3}$ de la pista C) $\frac{2}{3}$ de la pista
 B) $\frac{2}{3}$ de la pista y $\frac{1}{3}$ de la pista D) $\frac{1}{3}$ de la pista y $\frac{2}{3}$ de la pista

• Si en $\frac{1}{2}$ de hora se recorren $\frac{1}{3}$ partes del circuito, ¿cuántas vueltas se pueden dar en una hora?

A) Una vuelta C) 2 vueltas
 B) 1 $\frac{1}{2}$ vueltas D) 2 $\frac{1}{2}$ vueltas

2. La capacidad del tanque del auto de carreras es de 105 L de gasolina. Por cada litro se consume 8000 m y por cada estación recorrida se consumen $\frac{1}{3}$ partes del tanque. ¿Cuántos galones de gasolina quedan en el tanque al finalizar la tercera estación y cuántos kilómetros se habrán recorrido?

A) 15 galones, 0.8 km
 B) 4 galones, 720 km
 C) 4 galones, 450 km
 D) 0 galones, 800 km

3. Si las placas de los autos de carrera son como la de la imagen, ¿cuál es la cantidad máxima de autos que pueden participar en la carrera si solo se forman en cuarenta los números?

A) 10 autos
 B) 10⁴ autos
 C) 10³ autos
 D) 10¹ autos

4. Cobre la pista, ¿cuántos grados debe rotarse el volante en cada vuelta?

A) 260° C) 90°
 B) 128° D) 45°

5. En el histograma se muestran los resultados de una encuesta realizada a los comedores de autor acerca de la edad en la que eligieron esa profesión. ¿Cuál fue el intervalo de edad con mayor frecuencia?

A) De 16 a 18 años C) De 10 a 12 años
 B) De 8 a 16 años D) De 18 años

6. ¿Cuántos comedores se entrevistaron?

A) 25 C) 100
 B) 55 D) Más de 100

7. Al trazar el polígono de frecuencia, ¿cuáles son los puntos medios de los intervalos?

A) 8, 10, 12, 14 y 16 C) 9, 5, 11, 5, 13, 5 y 17, 5
 B) 9, 11, 1, 15 y 17 D) 10, 5, 12, 5, 14, 5, 16, 5 y 18, 5

8. Para un objeto en caída libre la fuerza de gravedad es proporcional a la masa m, de dicho objeto, de manera que se cumple la siguiente expresión, donde g es la aceleración de la gravedad dirigida hacia abajo (-9.8 m/s^2). La fuerza se mide en newtons (N).

$$F = -mg$$

Si sobre un cuerpo en caída libre actúa una fuerza de -490 N , ¿cuál es la masa de dicho cuerpo?

A) 50 kg
 B) 8 kg
 C) 490.2 kg
 D) 4.902 kg

Resuelve un ítem con un compañero. Compara sus respuestas, argumenta el por qué responderon así. Comparte lo que sea necesario.

Responde con tu profesor los resultados: ¿en qué necesitas mejorar? ¿Cuál es tu mejor uso?

Evaluación

Esta sección te permitirá evaluar los aprendizajes que adquiriste a lo largo del bloque por medio de reactivos tipo PISA.

Travesías

Los datos de ayer y hoy

Plantear y resolver problemas usando herramientas matemáticas.

La recolección, registro e interpretación de datos provenientes de diferentes fuentes es una práctica que se ha desarrollado desde tiempos antiguos. Pese a una sociedad organizada siempre surgió la necesidad de poseer datos sobre su población, actividad y condiciones materiales que la rodean. Así, esta práctica ha evolucionado desde la simple recolección de datos hasta la diversa y rigurosa interpretación que en la actualidad requiere de ellos.

La estadística, en general, es la recolección, organización, presentación, análisis e interpretación de los datos estadísticos con el fin de tomar decisiones.

Los primeros registros estadísticos del mundo se tiene conocimiento fueron los censos, simples descripciones sobre todos los integrantes de una población.

En algunos otros países como la España, China, Grecia y Roma se contabilizaban los nacimientos, matrimonios, defunciones de aspectos económicos, impuestos, cosechas, etcétera.

Materiales para el registro de datos estadísticos

Los materiales empleados para el registro y comunicación de datos han evolucionado a la par de la escritura. Van desde la piedra, laminas metálicas, papiro y papel, entre otros, hasta los soportes electrónicos actuales.

Desde la prehistoria han sido los huesos tallados los que se han utilizado para registrar la información. Los huesos tallados con líneas o con dibujos de animales, plantas, etcétera, se utilizaban para registrar la información.

Hacia el año 7000 a. n. e. los babilonios utilizaban tablillas de arcilla para registrar los datos de la producción agrícola y los gastos vendidos o canjeados mediante maquila.

En México

Nuestro país tiene una rica tradición en materia de información estadística de la cual dan cuenta diversos códigos e innumerables publicaciones, instituciones y personal desde la época colonial hasta nuestros días.

El 25 de enero de 1985 por decreto presidencial, el Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática (Inegi) como creación del instituto modernizó la valiosa tradición que tenía nuestro país en materia de captación, procesamiento y difusión de información acerca del territorio, la población y la economía.

El 16 de abril de 2008, el Inegi cambió su personalidad jurídica, adquiriendo autonomía técnica y de gestión, a partir de entonces su nueva denominación es Instituto Nacional de Estadística y Geografía, pero sin perder la misma sigla.

En México todos contamos!

El Inegi es el organismo encargado de proporcionar información estadística y geográfica de México.

El Inegi es el organismo encargado de proporcionar información estadística y geográfica de México.

Travesías

En esta sección se vincula un tema del bloque con otro relevante que contextualiza lo que has aprendido.



Número, álgebra y variación

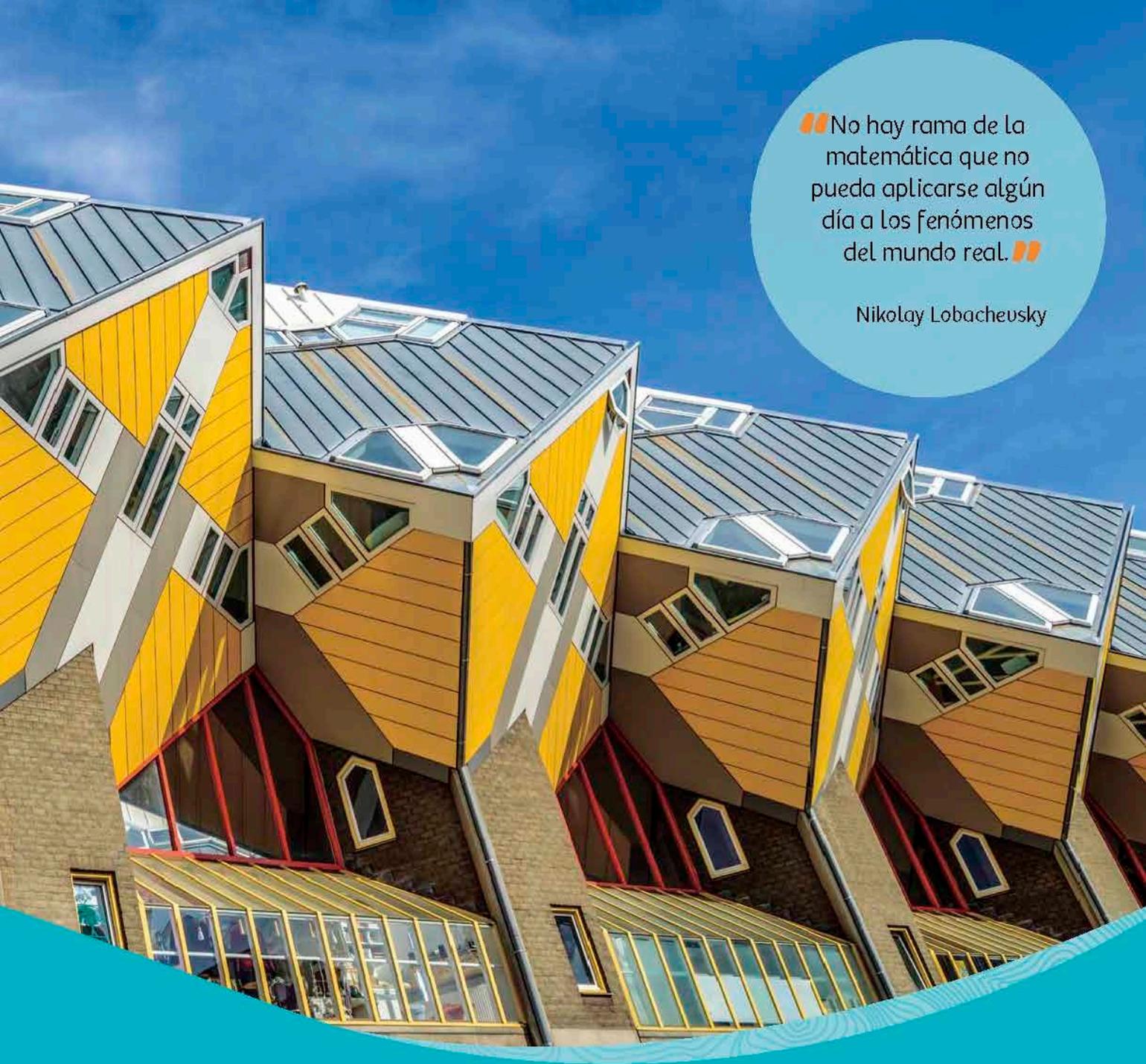
1. Multiplicación con fracciones y decimales positivos
2. División con fracciones
3. Multiplicación de números positivos y negativos
4. División de números positivos y negativos
5. Potencias con exponentes enteros

Forma, espacio y medida

6. Diagonales y ángulos interiores de un polígono
7. Relaciones entre los ángulos de un polígono
8. Múltiplos y submúltiplos del metro, litro y kilogramo
9. El sistema inglés

Análisis de datos

10. Histogramas y polígonos de frecuencia



“No hay rama de la matemática que no pueda aplicarse algún día a los fenómenos del mundo real.”

Nikolay Lobachevsky

Bloque **1**

1. Subraya la respuesta correcta.

Roberto compró 5 paquetes de galletas de \$12.60 cada uno y $\frac{3}{4}$ kg de queso manchego que cuesta \$168.75 el kilogramo. ¿Cuánto gastó en total?

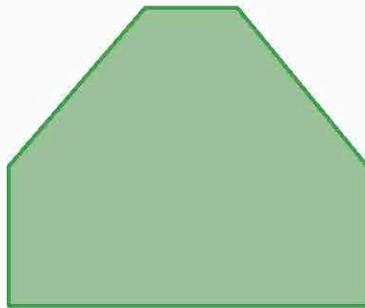
- A) \$187.10 B) \$189.60 C) \$197.40 D) \$232.60

2. Realiza las operaciones correspondientes y contesta: un muro se adorna colocando tiras de madera alrededor de éste. Cada tira mide 0.16 m y la longitud del muro es de 8.44 m. Si las tiras de madera colocadas linealmente cubren 3.8 m, ¿cuántas tiras se deberán colocar para terminar?

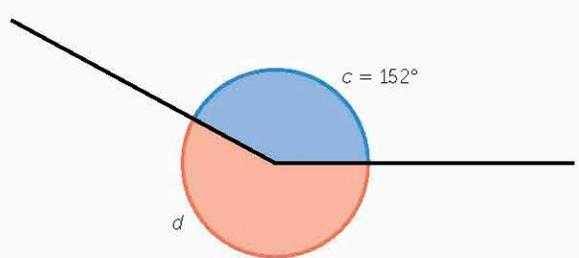
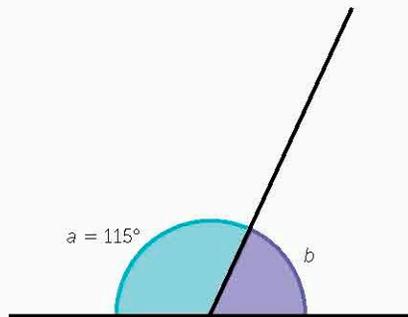
3. Subraya la opción que representa con números negativos la deuda total en un año si la deuda mensual que aparece en un recibo es de -\$570.

- A) -\$582 B) -\$5712 C) -\$6387 D) -\$6840

4. Traza las diagonales del hexágono irregular y marca con colores distintos los ángulos interiores del paralelogramo.



5. Calcula la medida de los ángulos b y d .



A) $\sphericalangle b = 45^\circ$ y $\sphericalangle d = 180^\circ$

B) $\sphericalangle b = 95^\circ$ y $\sphericalangle d = 365^\circ$

C) $\sphericalangle b = 65^\circ$ y $\sphericalangle d = 208^\circ$

D) $\sphericalangle b = 245^\circ$ y $\sphericalangle d = 28^\circ$

6. Completa las equivalencias en las imágenes.



1 m = _____ cm

1 kg = _____ g

1 L = _____ mL

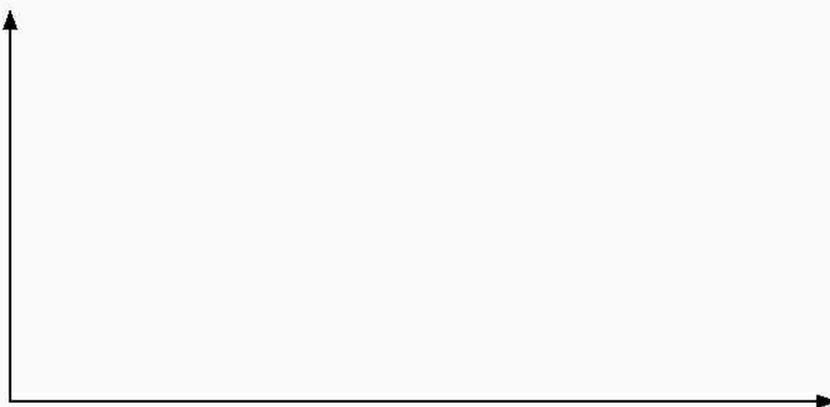
7. Escribe la letra de la magnitud que corresponde a cada unidad de medida.

	Tiempo (T)	Longitud (L)	Masa (M)
(____) metro	(____) kilogramo	(____) hora	
(____) libra	(____) segundo	(____) pulgada	
(____) gramo	(____) centímetro	(____) kilómetro	

8. Considera los datos y construye una gráfica de barras. Recuerda colocar títulos en la gráfica y en los ejes.

La siguiente tabla muestra la edad de los asistentes a la presentación de una obra de teatro.

Edad (años)	Menores de 15	De 15 a 25	De 25 a 35	De 35 a 45	De 45 a 55	Mayores de 55
Asistentes	3	12	24	31	29	10



9. Revisa los resultados con tu profesor. Juntos establezcan los temas en los que deberás poner más atención y las estrategias de estudio a implementar para que aprendas los contenidos del bloque.

Multiplicación con fracciones y decimales positivos

Resuelve problemas de multiplicación con fracciones y decimales positivos.

En primer grado aprendiste a multiplicar fracciones por fracciones y decimales por decimales. En esta secuencia aprenderás a resolver problemas que involucran multiplicaciones con fracciones y decimales, así como combinaciones que incluyen más de una operación. Las operaciones básicas, como la multiplicación, se utilizan con frecuencia en varias situaciones de la vida cotidiana por lo que es importante resolverlas satisfactoriamente con todo tipo de números.

Partimos

Glosario

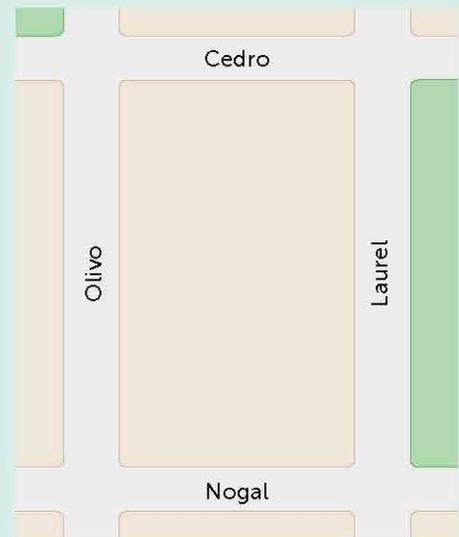
manzana. Espacio o bloque de casas delimitado por calles, generalmente cuatro.

1. Lee la situación y contesta.

Se construyó un museo que ocupa tres quintas partes de la cuadra sobre la calle Olivo y tres cuartas partes de la cuadra sobre la calle Nogal.

- Representa en el mapa la parte de la manzana que ocupa el museo.
- ¿Qué fracción de toda la manzana ocupa el museo?
- Si el área total de la manzana es de $10\ 800\text{ m}^2$, ¿cuántos metros cuadrados ocupa el museo?

- ❖ Compara tus respuestas y procedimientos con los de tus compañeros. ¿Qué operaciones utilizaron para resolver la actividad?



Recorremos

Recuerda

Una fracción irreducible es aquella que está escrita en su forma equivalente más sencilla, con el menor numerador y el menor denominador posibles. Es decir, que no se puede simplificar más.

1. Analiza y contesta.

Juan y sus amigos visitaron un parque de diversiones; para recorrerlo, subieron a un tren cuyo circuito mide $\frac{4}{5}$ km y en el cual se puede permanecer las vueltas que se deseen. Observa en la siguiente página este circuito y expresa en una fracción irreducible los kilómetros que cada una de las siguientes parejas recorrió.

- Teresa y Claudia dieron media vuelta y bajaron en la montaña rusa.

- Carlos y Mariela bajaron en las sillas voladoras.

- Luis y Pedro se bajaron en el martillo, después de $1\frac{1}{4}$ vueltas.

- Si Juan y Carolina dieron dos vueltas completas y después se bajaron en las sillas voladoras, ¿cuántas vueltas dieron? ¿Cuántos kilómetros recorrieron a bordo del tren? _____

- e) Expresa por medio de una multiplicación de fracciones los kilómetros que cada pareja recorrió en el tren.



Teresa y Claudia: _____
 Carlos y Mariela: _____
 Luis y Pedro: _____
 Juan y Carolina: _____

- ❖ Discute con el resto del grupo: ¿qué tipo de fracciones aparecen en los problemas? ¿Obtuvieron las mismas fracciones irreducibles? ¿Todos escribieron las mismas multiplicaciones? Verifiquen juntos si al realizar las multiplicaciones se obtiene el total de kilómetros que recorrió cada pareja.

2. Resuelvan en parejas los siguientes problemas.

- a) Karla tiene $2\frac{1}{2}$ paquetes de galletas, de los cuales $\frac{2}{3}$ partes son de nuez y el resto de vainilla. De las galletas de nuez, $\frac{2}{5}$ partes tienen chispas de chocolate, ¿qué fracción del total de galletas hay en esta combinación?

- Si $\frac{3}{5}$ partes de las galletas de vainilla tienen trozos de almendra, ¿qué fracción del total de galletas es de esta combinación?

- Escriban cuántas galletas hay de cada tipo considerando que en total hay 45.
 Nuez con chispas de chocolate: _____ Nuez sola: _____
 Vainilla con almendras: _____ Vainilla sola: _____

- b) La familia García rentó un autobús para ir de excursión. Las $\frac{2}{3}$ partes de las personas eran mujeres, $\frac{2}{5}$ partes de ellas eran niñas y $\frac{1}{4}$ parte de las niñas eran menores de seis años.

- ¿Qué fracción del total de personas eran niñas? _____
- ¿Qué fracción del total eran menores de seis años? _____
- Si en total había 30 personas en el autobús, ¿cuántas niñas había y cuántas de ellas eran menores de seis años? _____

- ❖ Expliquen en grupo cuántos factores tienen las multiplicaciones con las que pueden resolverse los problemas. ¿De qué forma las resolvieron? Si hay diferencia en los resultados, revísenlos para llegar a un acuerdo.



Integración

- De manera grupal escriban un procedimiento para multiplicar tres o más fracciones y den un ejemplo.

Procedimiento: _____

Ejemplo: _____

Multiplicación de fracciones por números decimales

3. En equipos analicen las imágenes y contesten.

Para cada vehículo, escriban la fracción que representa el indicador de nivel de combustible y calculen la cantidad de gasolina en cada tanque a partir de su capacidad total.



Vehículo 1
Capacidad: 60.8 L

Fracción: _____
Combustible restante:



Vehículo 2
Capacidad: 56.8 L

Fracción: _____
Combustible restante:

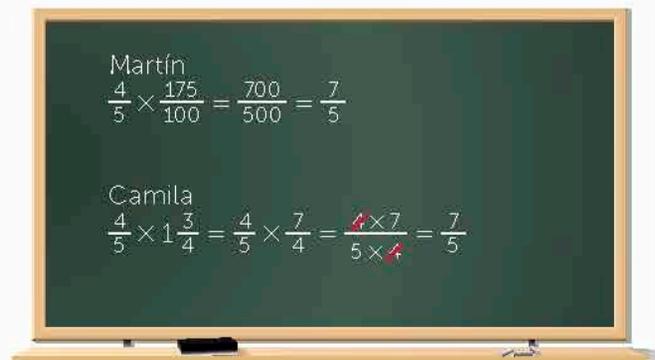


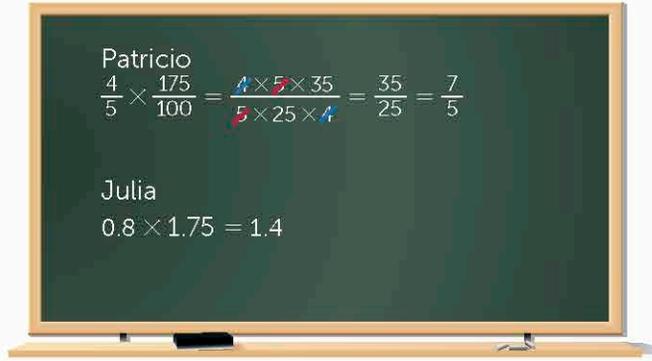
Vehículo 3
Capacidad: 70.5 L

Fracción: _____
Combustible restante:

- Expliquen qué operaciones aritméticas utilizaron. Analicen si existe más de una forma de resolver y, de ser así, describan cada una.

4. Observen en parejas el procedimiento que emplearon cuatro alumnos para resolver la multiplicación $\frac{4}{5} \times 1.75$ y contesten.





- a) ¿Cuál es la diferencia entre lo que hizo Julia y lo que hicieron los demás?
- _____
- b) Describan lo que hizo Camila y lo que hicieron Martín y Patricio.
- _____
- _____
- c) Expliquen cómo simplificaron Camila y Patricio las fracciones.
- _____
- _____
- d) Multipliquen $\frac{1}{3} \times 1.25$ utilizando los cuatro procedimientos anteriores.
- Expliquen si lograron simplificar como Camila y Patricio. _____
 - ¿Encontraron alguna dificultad al utilizar el procedimiento de Martín o el de Julia? ¿Cuál? _____
- _____

❖ Comparen sus respuestas con las de otra pareja. ¿Utilizaron alguno de estos procedimientos para resolver la actividad 3? ¿Cuál les parece que se puede aplicar a cualquier multiplicación de una fracción y un número decimal? ¿Por qué?

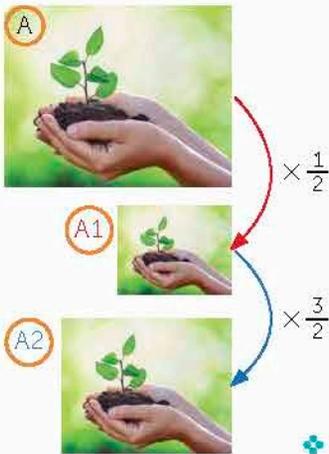


Cuando en una multiplicación los factores son números decimales y fracciones es posible realizar conversiones para utilizar un solo tipo de números. Sin embargo, dependiendo del problema y de las cantidades que intervienen es necesario decidir si es conveniente convertir a números decimales o trabajar con fracciones.

5. Resuelvan en equipos.

- a) En la tabla de la derecha se muestran los kilómetros que Mariana debe correr cada día que entrena durante la semana y la fracción que corrió en realidad. Complétenla.

Día	Distancia por recorrer (km)	Fracción de distancia recorrida	Kilómetros corridos
Lunes	0.84	$\frac{3}{4}$	
Miércoles	1.75	$1\frac{1}{2}$	
Viernes	3.6	$\frac{2}{3}$	



b) Para determinar el tamaño correcto de una imagen en un cartel, primero se redujo a la mitad y luego se amplió con un factor de $\frac{3}{2}$.

• Si las dimensiones de la imagen A son $60 \text{ cm} \times 48 \text{ cm}$, ¿cuáles son las medidas de las imágenes A1 y A2? _____

• ¿Es verdad que al multiplicar las medidas de A por los factores $\frac{1}{2} \times \frac{3}{2}$ se obtienen las de A2? Expliquen. _____

• ¿Con qué factor se puede obtener la imagen A2 a partir de A? _____

❖ Expongan sus respuestas al grupo argumentando sus procedimientos.

Operaciones combinadas de suma, resta y multiplicación

6. Lean en parejas los problemas y escriban el inciso en el círculo de la expresión numérica que los resuelve.

a) Paula leyó la tercera parte de una novela de 63 páginas. ¿Cuántas páginas le quedan por leer?

b) Marco y Antonio se reparten 63 libros que su abuela sacó del librero. Si Marco toma la tercera parte, ¿cuántos libros tiene?

c) De los libros que se repartieron Marco y Antonio, ¿qué fracción tiene Antonio?

d) De 63 alumnos que están en la biblioteca la tercera parte usa lentes, de estas personas dos terceras partes son mujeres. ¿Cuántas de ellas usan lentes?

$(1 - \frac{1}{3})$ $\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times 63$ $(1 - \frac{1}{3}) \times 63$ $\frac{1}{3} \times 63$

Recuerda



La jerarquía de operaciones establece el orden en que se realizan la suma, resta, multiplicación y división cuando aparecen al mismo tiempo en una operación. Revisa tu libro de primer grado para tomar nota del orden.

7. Continúen en parejas y contesten.

Esta mañana, Xóchitl gastó tres octavas partes de sus ahorros para comprar un libro de arte. En la noche, utilizó dos quintas partes de lo que le quedaba para el regalo de cumpleaños de su hermano.

a) ¿Qué fracción de sus ahorros le quedaron en la tarde? _____

b) ¿Qué fracción de sus ahorros totales utilizó en la noche? _____

c) ¿Qué fracción de sus ahorros totales utilizó en total? _____

d) Si tenía ahorrados \$782.40, ¿cuánto dinero utilizó en el regalo de su hermano? _____

e) ¿Cuánto costó el libro? ¿Cuánto dinero le quedó de sus ahorros? _____

❖ Comparen sus respuestas y procedimientos con el resto del grupo. ¿Las diferencias que encontraron son porque entendieron de manera distinta los problemas o son errores numéricos? ¿En qué problemas usaron la jerarquía de operaciones?



Integración

- En parejas planteen un problema que involucre varias operaciones y números decimales y fracciones para resolverlo.

- Intercambien problemas con otras parejas y traten de resolverlos de otras formas.



Aprendemos

Reflexiona: ¿cuáles son las habilidades mentales que utilizas al plantear o inventar un problema matemático?



1. Analiza nuevamente el problema al inicio de la secuencia y contesta.

- En la esquina de Cedro y Laurel, sobre una superficie de $1\,253.16\text{ m}^2$, se va a construir una librería de manera que ocupe las $\frac{3}{4}$ partes del área. ¿Cuál será su superficie?
- En la esquina de Laurel y Nogal se va a construir un estacionamiento para el museo. El ancho, sobre la calle Nogal, será de 22.5 m y las $\frac{3}{4}$ partes de él se utilizarán para la entrada. ¿Cuánto mide el ancho de la entrada del estacionamiento?

2. Resuelve los siguientes problemas.

- Javier toma las $\frac{4}{5}$ partes del jugo de piña, Mario las $\frac{2}{3}$ partes del jugo de durazno y Balam las $\frac{3}{4}$ partes del jugo de manzana. ¿Cuántos litros tomó cada uno?



0.75 L



$\frac{3}{4}$ L



1.25 L

- Al inicio de diciembre una tienda de juguetes ha vendido las tres cuartas partes del lote de juegos de mesa y a mediados del mes las dos terceras partes de los que quedaban. ¿Qué fracción del lote de juegos de mesa se vendió a mediados de diciembre?

3. Resuelve las siguientes operaciones. Cuando sea necesario, simplifica hasta que resulte una fracción irreducible y aplica la jerarquía de las operaciones.

$$3.6 \times \frac{2}{5} \times 0.8 =$$

$$\frac{7}{8} \times \frac{8}{7} \times 0.12 =$$

$$1.2 \times \frac{5}{6} - \frac{3}{4} =$$

$$\left(1.3 + \frac{3}{4} \times \frac{2}{3}\right) \left(3.5 - \frac{4}{5}\right) =$$

$$\frac{1}{7} \left(3.3 + 1\frac{3}{5}\right) =$$

$$\left(12.5 - \frac{21}{5}\right) \times \frac{4}{5} - 6.2 =$$

- Compara tus procedimientos y resultados con el resto del grupo.



Explora

En la siguiente página www.edutics.mx/38b podrás realizar multiplicaciones para calcular áreas de rectángulos, usando fracciones, decimales y sus combinaciones. Toma en cuenta que la coma en los números representa el punto decimal.

División con fracciones

Resuelve problemas de división con fracciones y decimales positivos.

Otra de las operaciones que has estudiado desde primaria es la división, la cual resolviste con números naturales y, en primer grado de secundaria, con números decimales. En esta secuencia estudiarás cómo dividir números fraccionarios. De este modo, al resolver problemas podrás combinar las cuatro operaciones básicas que conoces con las distintas expresiones numéricas positivas.

Partimos

1. Observa las imágenes y responde.

En una tienda de lácteos quedan las siguientes fracciones de dos tipos de queso:



El queso canasto se repartió equitativamente en cuatro recipientes, mientras que la fracción de doble crema, solamente en dos.

- a) ¿Qué fracción hay en cada recipiente para cada tipo de queso?

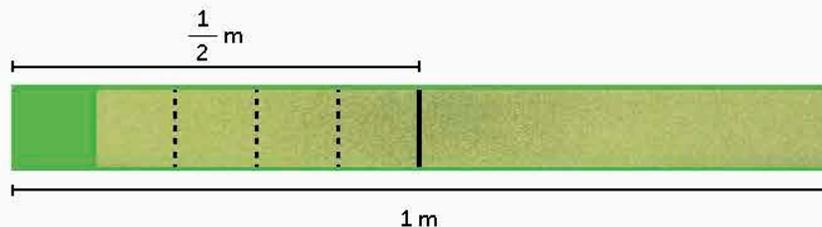
✚ Discute con tus compañeros el procedimiento para hallar la respuesta. Si se divide a la mitad cada octavo del queso canasto, ¿el número de partes se puede dividir en cuatro? En el caso del queso doble crema, ¿se puede hacer lo mismo?

Recorremos

División de fracciones entre números naturales y viceversa

1. Resuelvan en parejas.

Laura cortó en cinco partes iguales una tira de medio metro de listón verde, como se muestra en la figura.



- a) ¿Qué fracción de un metro representa cada parte? _____
- b) Escriban una operación que represente el corte que hizo Laura.

- c) Si Laura hubiera cortado el medio metro de listón en siete partes iguales, ¿cuánto mediría cada parte?

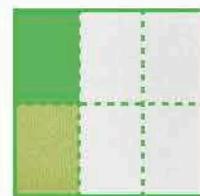
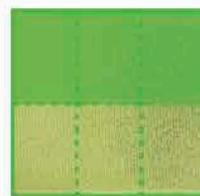
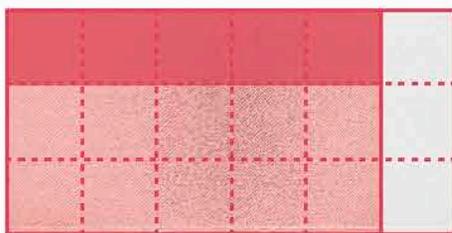
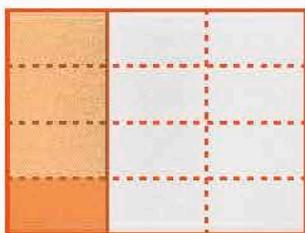
d) La tabla muestra los cortes hechos a otros listones. Determinen las longitudes de las partes que se obtienen en cada caso y complétenla.

Color	Longitud de la tira del listón (m)	Número de partes	Longitud de cada parte (m)
Rojo	$\frac{3}{4}$	3	
Azul	$\frac{4}{3}$	4	
Rosa	$\frac{2}{5}$	3	
Amarillo	$\frac{5}{6}$	2	
Naranja	$\frac{1}{3}$	5	

❖ Expliquen a sus compañeros cómo dividieron la longitud de la tira entre el número de partes, por ejemplo, $\frac{3}{4} \div 3$. Si usaron fracciones equivalentes, asegúrense de escribir los resultados con fracciones irreducibles. Discutan qué procedimiento utilizarían para comprobar sus resultados.

2. Continúen en parejas y contesten a partir de las imágenes.

En los siguientes esquemas se representan fracciones de distintos tipos de tela divididas en partes. Escriban en la primera fila de recuadros la división que representa la zona de color más oscuro. Completen el ejemplo.



$$\frac{1}{3} \div 4 =$$

$$\square$$

$$\square$$

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} =$$

$$\square$$

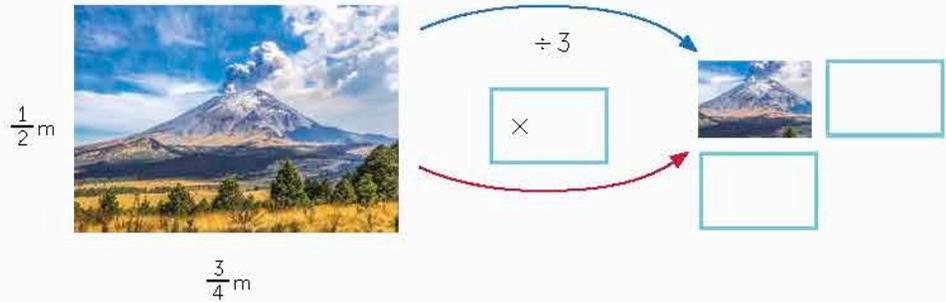
$$\square$$

a) La zona de color más oscuro también puede verse como una multiplicación que representa el área de esa parte. Escriban en el segundo renglón de recuadros las multiplicaciones correspondientes.

b) ¿Qué relación hay entre los números fraccionarios utilizados en las multiplicaciones y divisiones? _____

❖ Comparen con su grupo y analicen si con ambas operaciones obtienen el mismo resultado. Representen las divisiones de la actividad 1 como áreas de rectángulos y verifiquen si también pueden resolverlas con una multiplicación.

3. Completen en equipos el esquema con el factor fraccionario que reduce a la tercera parte las dimensiones de la imagen y las medidas resultantes.



- a) Para reducir en 3, 5 o 7 veces las dimensiones de una figura, ¿cuál es el factor por el que deben multiplicarse sus medidas, respectivamente?

◆ Comparen sus respuestas. A partir de los problemas anteriores discutan cómo se puede dividir una fracción entre un número natural utilizando una multiplicación.

Recuerda



Las letras o literales pueden utilizarse para representar números generales con los que es posible hacer operaciones.



Integración

- En grupo establezcan un procedimiento para dividir una fracción $\frac{a}{b}$ entre un número natural n . Representenlo en el siguiente esquema.

División de una fracción entre un número natural

$$\frac{a}{b} \div n = \text{---} \times \text{---} = \text{---} = \text{---}$$

4. Analiza y resuelve.

Los alumnos de una secundaria prepararon agua de distintos sabores para repartirla entre los integrantes de una brigada de reforestación. Para ello, llenaron varias botellas de $\frac{3}{4}$ L. Observa a continuación los sabores y la cantidad de algunos de ellos.



Limón 12 L

Naranja _____

Sandía 15 L

Tamarindo _____

- a) ¿Cuántos cuartos de litro equivalen a 12 L y cuántas botellas de $\frac{3}{4}$ L de agua de limón se llenaron? _____
- Escribe la división que representa este reparto y su resultado.

Convivimos



Valora y comenta: ¿por qué es importante interesarse y participar organizadamente para resolver conflictos o afectaciones en tu comunidad?

b) Si se llenaron 8 botellas de agua de naranja, ¿cuántos litros se prepararon?

c) Lucía dice que sirvieron 20 botellas de agua de sandía, ¿es cierto? Escribe una división y una multiplicación que modele esta situación.

d) Pedro dice que había 9 L de agua de tamarindo porque llenaron 10 botellas y no sobró agua. ¿Tiene razón? Escribe las operaciones para comprobarlo.

e) ¿Cuántas botellas se llenan con 16 L de agua de jamaica? _____

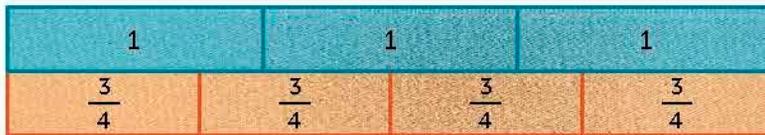
- ¿Cuánto sobra y qué fracción de la botella representa?
- _____
- ¿Cuántas botellas y fracciones de botella se obtienen al dividir 16 L en botellas de $\frac{3}{4}$ L? _____

❖ Reúnete con algunos compañeros y expliquen cómo resolvieron cada inciso. ¿Todos dividieron la cantidad de agua en cuartos? Comenten de qué otra manera pueden calcular cuántas porciones de $\frac{3}{4}$ L hay en cierta cantidad de litros.

5. Trabaja con un compañero.

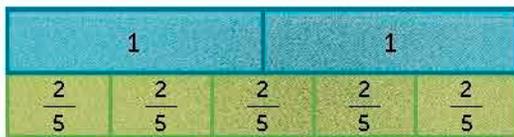
Laura necesita saber cuántas partes iguales es posible sacar de cada tira de listón si la divide en fracciones. ¿Cuál es el resultado de cada división?

a) Una tira de 3 m en partes iguales de $\frac{3}{4}$ m.



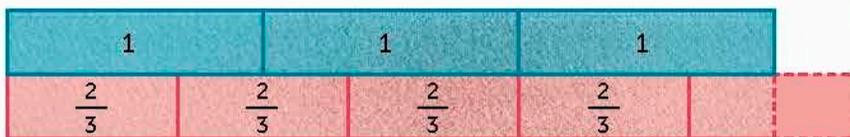
$3 \div \frac{3}{4} =$
Partes obtenidas: _____

b) Una tira de 2 m en partes iguales de $\frac{2}{5}$ m.



$2 \div \frac{2}{5} =$
Partes obtenidas: _____

c) Una tira de 3 m en partes iguales de $\frac{2}{3}$ m.



$3 \div \frac{2}{3} =$
Partes obtenidas: _____

❖ Comparen sus respuestas y sus razonamientos con los de otra pareja. ¿Cuál fue el procedimiento que siguió Laura? Discutan cómo interpretaron el último esquema y cómo resolvieron la división. Luego, escriban una regla para dividir un número natural entre una fracción.



La división de un número natural n entre una fracción se puede resolver al multiplicar el número natural por el denominador de la fracción y luego dividir el resultado entre el numerador, es decir:

$$n \div \frac{a}{b} = (n \times b) \div a = \frac{n \times b}{a}$$

Explora



En la página www.edutics.mx/36N podrás resolver otros problemas de división de fracciones y números naturales.



Integración

- Analiza la información anterior y, a partir de las igualdades, representa la siguiente división de un número natural entre una fracción como una multiplicación.

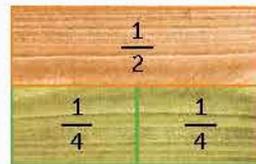
$$5 \div \frac{2}{3} = \square \times \text{---} = \text{---} \times \text{---} = \text{---}$$

División de fracciones

6. Analicen y contesten en parejas.

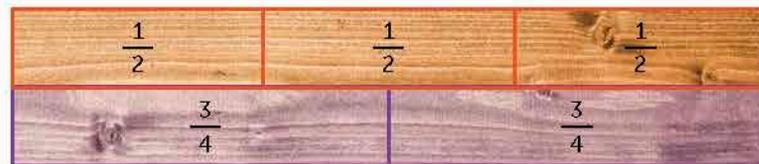
- a) Para dividir tiras de madera en fracciones Mirna y sus compañeros utilizaron los siguientes esquemas aplicando la idea de cuántas veces cabe el divisor en el dividendo. Escriban la división correspondiente y su resultado.

Mirna



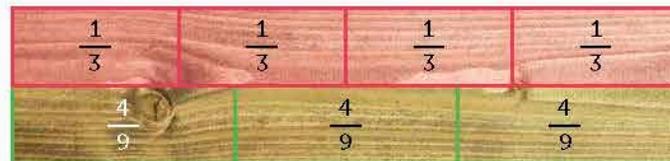
$$\frac{1}{2} \div \frac{1}{4} = \text{---}$$

Joaquín



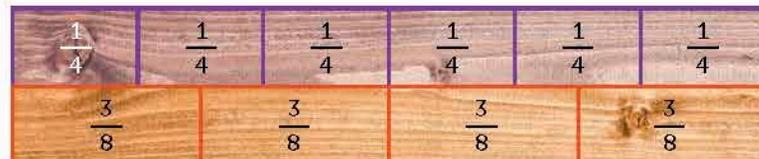
$$\text{---} \div \frac{3}{4} = \text{---}$$

David



$$\frac{4}{3} \div \text{---} = \text{---}$$

Elisa



$$\text{---} \div \text{---} = \text{---}$$

b) En $\frac{3}{4}$ de hora Jacinta recorrió $\frac{2}{5}$ partes de la distancia total de su casa a la de sus abuelos.

- ¿Qué fracción del trayecto recorrió en $\frac{1}{4}$ de hora?

- ¿Cómo pueden calcular la fracción del trayecto que recorrió en una hora?

- Jacinta calculó la fracción del trayecto que recorrió en una hora con la siguiente cadena de operaciones. Expliquen cuál fue el razonamiento de Jacinta y resuelvan la división.

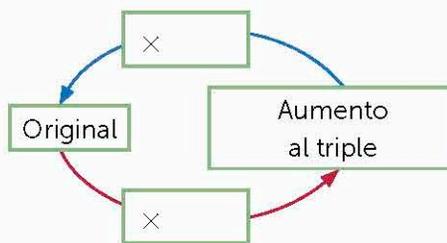
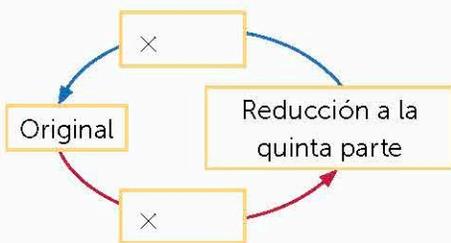
$$\frac{2}{5} \div \frac{3}{4} = \left(\frac{2}{5} \div 3\right) \times 4 = \left(\frac{2}{5} \times \frac{1}{3}\right) \times 4 =$$

❖ Analicen sus respuestas y compárenlas con el grupo. Calculen las divisiones del inciso a) con el razonamiento de Jacinta y verifiquen que obtienen los mismos resultados. Discutan de qué otra forma pueden resolver una división de dos fracciones.

7. Analicen en equipos la información y resuelvan.

Para revertir o deshacer la transformación que se realiza al aplicar a una cantidad un factor de proporcionalidad directa se aplica otro llamado **factor inverso**.

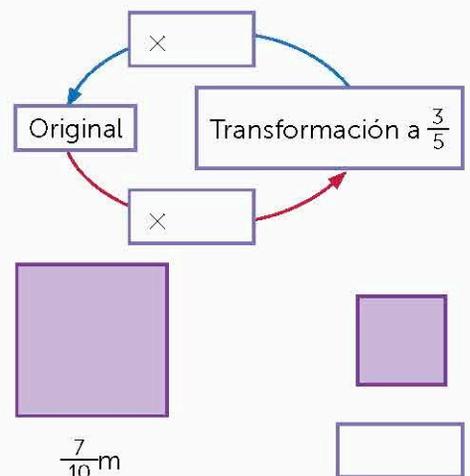
a) Completen los esquemas con los factores para realizar las transformaciones que indican las flechas.



b) Si el factor $\frac{3}{5}$ puede verse como la aplicación sucesiva de los dos factores en los esquemas $\left(\frac{3}{5} = \frac{1}{5} \times 3\right)$, ¿cuál sería el factor fraccionario que revierte dicha transformación? _____

c) Completen el esquema con las medidas del cuadrado y los factores de cada transformación.

d) Mariana afirma que como la multiplicación y la división son operaciones inversas, entonces multiplicar por $\frac{5}{3}$ para obtener las medidas originales es equivalente a dividir entre $\frac{3}{5}$ las medidas transformadas. ¿Están de acuerdo? ¿Por qué?



❖ Comparen los procedimientos de las actividades 6 y 7 y establezcan un procedimiento para calcular la división de una fracción entre otra.



Para dividir una fracción entre otra, por ejemplo $\frac{2}{5}$ entre $\frac{3}{4}$, se puede primero dividir entre 3 y luego multiplicar por 4; o primero multiplicar por 4 y luego dividir entre 3. Dividir una fracción entre un número natural n es lo mismo que multiplicar dicha fracción por $\frac{1}{n}$; por ello, las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\left(\frac{2}{5} \div 3\right) \times 4 = \left(\frac{2}{5} \times \frac{1}{3}\right) \times 4 = \frac{2}{5} \times \frac{4}{3} = \left(\frac{2}{5} \times 4\right) \times \frac{1}{3} = \left(\frac{2}{5} \times 4\right) \div 3$$

Es decir, $\frac{2}{5} \div \frac{3}{4} = \frac{2}{5} \times \frac{4}{3}$, donde $\frac{4}{3}$ es el **inverso multiplicativo** de $\frac{3}{4}$.

Recuerda

Dos números son **inversos multiplicativos** si su producto es 1. Por ejemplo:

7 y $\frac{1}{7}$ son números inversos porque $7 \times \frac{1}{7} = 1$
y $\frac{5}{6}$ y $\frac{6}{5}$ son inversos porque $\frac{5}{6} \times \frac{6}{5} = 1$

**Integración**

- Con base en la información anterior, escribe el procedimiento general para dividir dos fracciones cualesquiera al reescribir la división como una multiplicación.

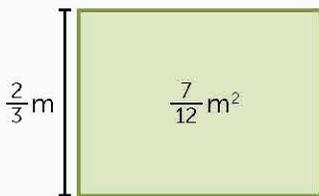
$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \text{---} \times \text{---}$$

8. Resuelvan en equipos los siguientes problemas.

- a) Se repartieron entre varios recipientes $\frac{3}{5}$ L de acetona. Si en cada recipiente se pusieron $\frac{3}{20}$ L, ¿cuántos recipientes había? _____
- ¿Cómo verificarían su resultado? _____
- b) Para confeccionar diversas prendas Estela utiliza lienzos de distintos tamaños. Completen la tabla.

Prenda	Tela disponible (m)	Largo de los lienzos (m)	Prendas que puede hacer (piezas)
Falda	$1 \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	
Camisa	$7 \frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	
Pantalón	$5 \frac{1}{3}$	$1 \frac{1}{3}$	

- c) ¿Cuánto mide de largo el rectángulo de la izquierda? _____
- d) El engrane de una máquina da $\frac{5}{8}$ de vuelta en una hora y cuarto. ¿Qué fracción de vuelta da en una hora? ¿Cuánto tiempo tardará en dar una vuelta completa? _____
- e) Las $\frac{6}{8}$ partes de un terreno se dividirán en parcelas del mismo tamaño para plantar árboles frutales. Si cada parcela corresponde a $\frac{3}{16}$ partes del terreno, ¿en cuántas parcelas se cultivará? _____



❖ En grupo, expliquen cómo interpretaron y resolvieron cada problema.

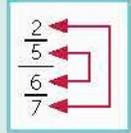


Arribamos

1. Considera la cantidad de queso planteada al inicio de la secuencia. Si cada pieza completa de queso pesa $4\frac{1}{2}$ kg, ¿cuántas raciones de $\frac{5}{8}$ kg se pueden obtener de cada tipo de queso?
2. Resuelve las siguientes adivinanzas numéricas.
 - a) ¿Qué número dividido por $\frac{2}{11}$ da 22?
 - b) ¿Qué número multiplicado por $\frac{5}{6}$ da $\frac{3}{4}$?
 - c) $2\frac{3}{4}$ entre qué número da $\frac{9}{8}$?
 - d) ¿Qué número dividido por 5 da $\frac{13}{2}$?
3. Resuelve los siguientes problemas.
 - a) ¿Cuántas personas hay en una fiesta si 36 mujeres son las $\frac{3}{5}$ partes del total?
 - b) Elías preparó $6\frac{3}{4}$ L de jugo de naranja y lo vendió todo, ¿cuántos vasos de $\frac{3}{8}$ L vendió? ¿Cuánto dinero obtuvo?

- c) Alondra y Guadalupe visitaron a sus abuelos recorriendo la misma distancia pero a distinta velocidad. Alondra avanzó 90 km del camino en $\frac{2}{3}$ de hora, mientras que Guadalupe, en el mismo tiempo, recorrió $\frac{2}{5}$ partes de ese mismo camino. Si Alondra llegó a casa de sus abuelos en una hora, ¿cuál es la distancia total del camino?
 - Como la velocidad de un móvil es la distancia recorrida entre el tiempo empleado, ¿cuál es la velocidad de Guadalupe en kilómetros por hora?

4. Explica por qué si una división de fracciones está escrita de forma vertical, como la que se encuentra al lado derecho, el resultado es una fracción cuyo numerador es el producto de los extremos y cuyo denominador es el producto de medios.



5. Resuelve las divisiones. Escribe el procedimiento.

$\frac{4}{7} \div \frac{2}{3} =$	$1\frac{4}{5} \div \frac{5}{6} =$
$\frac{7}{8} \div 1\frac{1}{4} =$	$2\frac{3}{8} \div 3\frac{1}{2} =$
$\frac{3}{7} \div \frac{9}{4} =$	$\frac{1}{8} \div \frac{2}{11} =$

❖ Verifica tus respuestas con el resto del grupo. Recuerda que es importante entender a qué se refiere cada problema antes de realizar cualquier operación o cálculo.

Explora

Entra en la página www.edutics.mx/36x y resuelve los problemas de división de fracciones.

Multiplicación de números positivos y negativos

Resuelve problemas de multiplicación con números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos.

Partimos

1. Lee la situación y contesta.

Romina y Camila, como se muestra en la siguiente figura, parten de un mismo punto. Camila viaja hacia la derecha a 25 km/h y Romina hacia la izquierda a 20 km/h.



- a) Considera que todas las magnitudes que están a la derecha del punto de referencia son positivas y todas las que estén a la izquierda son negativas. ¿En qué posición respecto del punto de partida se encuentran Camila y Romina después de 6 horas?

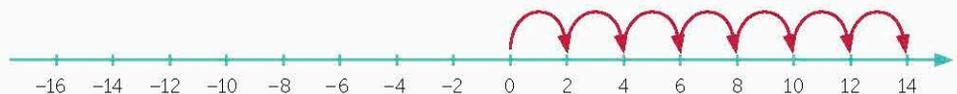
- ❖ Compara con tus compañeros cómo resolvieron el problema y si llegaron a las mismas respuestas. ¿Qué números emplearon para representar la ubicación de cada ciclista?

Recorremos

Multiplicación de un número positivo y un número negativo

1. Analiza las siguientes operaciones.

- a) Escribe la suma iterada y la multiplicación equivalente que se representa en la recta numérica. _____



- De manera semejante a la anterior escribe la suma de la recta numérica de la siguiente página.

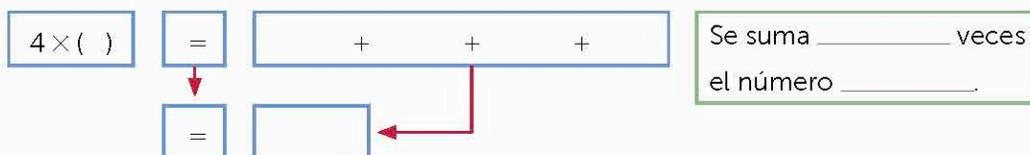
Recuerda



Una suma iterada o repetida es aquella en la que un mismo sumando se repite varias veces.

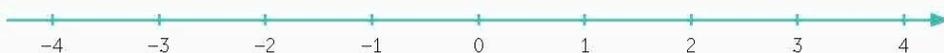


- Reescribe la suma con una multiplicación. _____
- A partir de lo anterior completa el diagrama.



b) Considera la suma $(-\frac{3}{4}) + (-\frac{3}{4}) + (-\frac{3}{4})$.

- Representala en la siguiente recta numérica.



- ¿Cuál es el número al que llegaste? _____
- ¿Cuál es el resultado de la suma? _____
- Escribe la suma anterior como una multiplicación y su resultado.

c) Representa la multiplicación $3 \times (-1.5)$ en la recta numérica que está a continuación.



- ¿Cuál es el resultado? _____

❖ Compara tus respuestas con las de tus compañeros. En equipo discutan y obtengan conclusiones. ¿Cómo pueden multiplicar un número positivo por uno negativo? ¿Ocurre lo mismo si multiplican un número negativo por un decimal o fracción positiva? Utilicen la recta del inciso c) y multipliquen $(2.5) \times (-1.5)$, ¿cómo lo hicieron?

2. Resuelvan en parejas.

a) Juan organizó la rifa de un videojuego, cada boleto cuesta \$20. Vendió 50 boletos, pero siete personas no le han pagado.

- Escriban con una suma y una multiplicación la cantidad de dinero que le deben. Utiliza números positivos y negativos.

- Indiquen la cantidad de dinero que le deben con un **número entero** negativo.



Notación

Al realizar las operaciones el número y su signo se deben escribir entre paréntesis para no confundir con los operadores de suma y resta.



Recuerda

El 0 no es un número positivo ni negativo, es un número neutro. Además, al multiplicar cualquier número por 0 se obtiene 0.



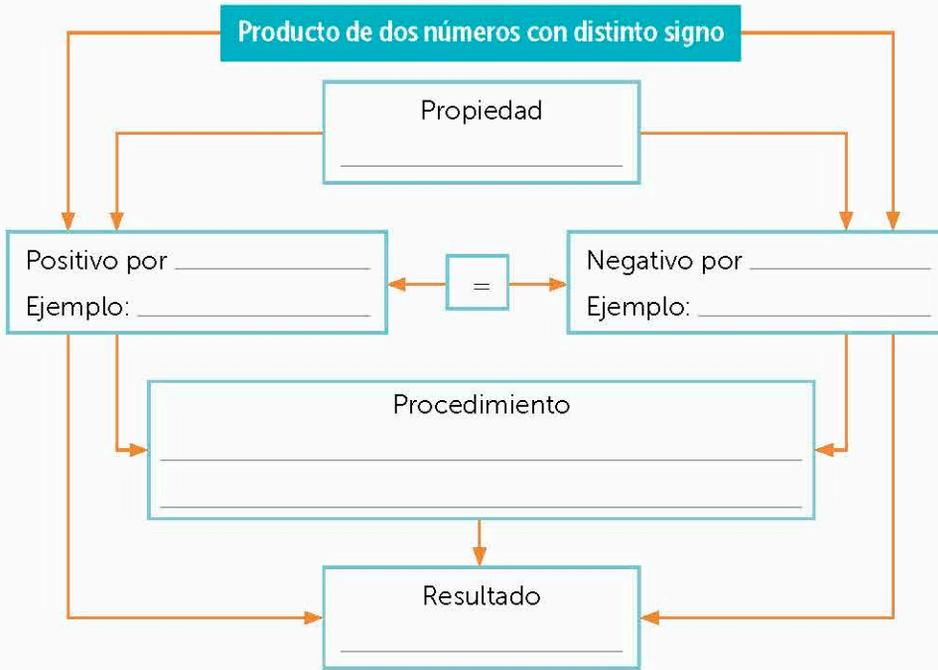
Glosario

números enteros. Son aquellos que comprenden el cero, los naturales 1, 2, 3, 4, ... y sus negativos -1, -2, -3, -4, ...



Integración

- Completen en parejas el siguiente esquema.



- Analicen en grupo el texto y compárenlo con el procedimiento que escribieron en el esquema.



Para resolver un producto que involucra un número positivo por un número negativo se multiplican los valores absolutos y se antepone al resultado el signo menos.



Aprendemos

Comenta después de completar el esquema: ¿cómo te ayudan los esquemas en tu aprendizaje?

4. Analicen y contesten en equipos.

- a) Juan debe pagar el precio de un viaje en 16 mensualidades de \$358 cada una. Indiquen, con un número negativo, la cantidad de dinero que debe.

- b) Escriban como producto de dos **factores** los siguientes números.

$-11 = \underline{\hspace{2cm}}$ $-36 = \underline{\hspace{2cm}}$

$-120 = \underline{\hspace{2cm}}$ $-2.4 = \underline{\hspace{2cm}}$

$-92 = \underline{\hspace{2cm}}$ $-\frac{12}{30} = \underline{\hspace{2cm}}$

- c) ¿Cuál de los números anteriores tiene sólo dos maneras de ser expresado como producto de dos factores? Expliquen su respuesta.

- Comparen sus respuestas con las de otro equipo. Discutan por qué en cada una de las multiplicaciones anteriores es necesario que uno de los factores sea negativo.



Glosario

factor. Número o expresión que puede multiplicarse para formar un producto.

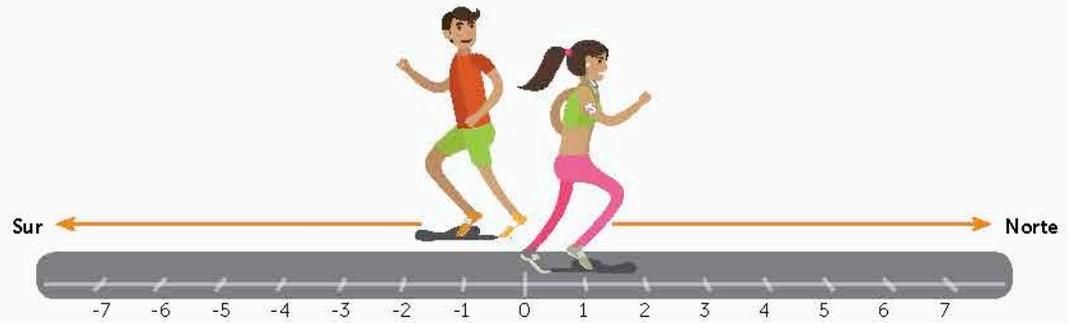
$$12 = 3 \times 2 \times 2$$

↑ ↑ ↑ ↑
producto factores

Multiplicación de dos números negativos

5. Lean en parejas la situación y contesten. Si es posible, trabajen la actividad en el patio de su escuela.

Luis y Carolina pintaron con gis una recta numérica para jugar, como se muestra en la siguiente figura.



Las reglas del juego son las siguientes:

- Si están mirando **hacia el norte**, consideren una **dirección positiva** y una **dirección negativa** si están mirando **hacia el sur**.
- Caminar **hacia adelante** representa un **signo positivo**, pero caminar **hacia atrás** tiene un **signo negativo**.
- Cada uno en su turno se coloca en el **cerero**, siguiendo las reglas, recibe las instrucciones de su **compañero**.

- a) Luis mira hacia el norte y camina hacia atrás 5 pasos, ¿a qué punto llegó?
- _____
- b) Carolina mira hacia el sur y camina hacia adelante 3 pasos, ¿a qué punto llegó?
- _____
- c) Escriban de dos formas distintas la manera en que Luis puede llegar al 7, a partir del cero, dando únicamente 7 pasos.
- _____
- _____
- d) Representen los movimientos de Luis y Carolina dados en los incisos anteriores utilizando una multiplicación de enteros. Expresen con 1 un paso hacia adelante y con -1 un paso hacia atrás.
- Inciso a): _____
- Inciso b): _____
- Inciso c): _____

❖ Comparen sus resultados y sus procedimientos con los de otra pareja. ¿Cómo son los signos de los factores que representan caminar hacia atrás y mirar al sur? A partir de varios ejemplos observen cuál es el signo del resultado.



Notación

Hay expresiones equivalentes de una multiplicación. Por ejemplo:
 $11 \times (-2) = (11)(-2)$
 $2 \times (x) = (2)(x) = 2x$

6. Reúnanse en equipos para completar las tablas y contesten.

$(-5)(3)$	
	-10
$(-5)(1)$	
	0
$(-5)(-1)$	
$(-5)(-2)$	
	15
	20
	25

$(-7)(3)$	
	-14
$(-7)(1)$	
	0
$(-7)(-1)$	
$(-7)(-2)$	
	21
	28
	35

- a) ¿Qué número hay que sumar o restar para pasar del resultado de $(-5)(3)$ al resultado de $(-5)(2)$? _____ ¿Y del resultado de $(-5)(-2)$ al resultado de $(-5)(-3)$? _____
- b) ¿Qué número hay que sumar o restar para pasar del resultado de $(-7)(1)$ al resultado de $(-7)(0)$? _____ ¿Y del resultado de $(-7)(-4)$ al resultado de $(-7)(-5)$? _____
- c) ¿De cuánto en cuánto aumentan o disminuyen los números de la segunda fila de cada una de las tablas? _____
- d) A partir de los números de las tablas, ¿cuál es el signo del resultado al multiplicar dos números negativos? _____

❖ Expliquen sus razonamientos a otros equipos y analicen otras sucesiones de multiplicaciones; observen las regularidades en los signos.

7. Continúen en equipos y realicen las siguientes multiplicaciones en la calculadora. Asegúrense de que la calculadora tenga las teclas $+/-$ o $(-)$ para escribir los signos negativos.

-2.2	×	3	=
1.6	×	4.5	=
-17	×	-11	=

5	×	$-\frac{1}{2}$	=
-3.5	×	-2.5	=
$-\frac{3}{4}$	×	$-\frac{1}{2}$	=

- a) ¿Qué signos tienen los números que al multiplicarse su resultado es positivo? _____
- b) ¿Qué signos tienen los números que al multiplicarse su resultado es negativo? _____

❖ Establezcan con otros compañeros cómo multiplicar dos números negativos.



En un producto que involucra dos números con el mismo signo (ambos positivos o ambos negativos) el resultado es de signo positivo.

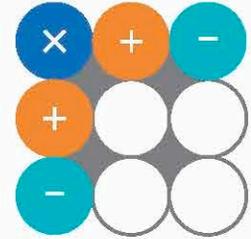
Explora



En la página www.edutics.mx/JKu podrás observar un video con una explicación de por qué menos por menos da más.

Integración

- De forma grupal completen el esquema con las reglas de los signos para la multiplicación de números enteros.
- Expresenlas en forma verbal.



8. Efectúa las siguientes multiplicaciones.

$$(-17)(-11) =$$

$$(-4.2)(-1.1) =$$

$$(-3.5)(-10)(-10) =$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)(-4) =$$

$$\left(-\frac{5}{7}\right)\left(-\frac{2}{5}\right) =$$

$$(-1)(-2)\left(-\frac{1}{2}\right)(-3.5) =$$

9. Analicen y contesten en equipos.

- Si en una multiplicación la cantidad de factores negativos es un número par, ¿qué signo tendrá el resultado? _____
- Si en una multiplicación la cantidad de factores negativos es un número impar, ¿qué signo tendrá el resultado? _____
- Si en una multiplicación uno de los factores es 0, ¿cuál será el resultado?

- Sin efectuar las multiplicaciones, anticipen el signo del resultado. Después corroboren sus respuestas.

$$(-2)(5)(-11)(-4) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(-7)(-7)(-7)(-7)(-7)(-7) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(-3.5)(1.1)(-8.1)(-0.75) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(-2)(3.75)(-4)(0)(-2105)\left(\frac{1}{2}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$$

- Se dice que dos números son simétricos si en la recta numérica se encuentran a la misma distancia a partir del origen pero en sentidos opuestos.

- ¿Por qué número debe multiplicarse 5 para obtener su simétrico?

- ¿Por qué número debe multiplicarse 16 para obtener el simétrico de 140?

- ¿Por qué número debe multiplicarse -9 para obtener el simétrico de -36 ?

- ❖ Comparen sus respuestas con el grupo. Discutan y establezcan conclusiones acerca de las propiedades del producto de números con signo.



1. Considera nuevamente el problema planteado al inicio de la secuencia.
 - a) Expresa por medio de una multiplicación la distancia, desde el punto de referencia, a la que estará Romina dentro de nueve horas.
 - b) Expresa por medio de una multiplicación la distancia, desde el punto de referencia, a la que estaba Romina hace 10 horas.

2. Resuelve los siguientes acertijos.

Encuentra dos números que multiplicados den -77 .

Encuentra dos números que multiplicados den -132 y sumados den 16 .

Encuentra el número por el que hay que multiplicar al 1276 para obtener -1276 .

Encuentra dos números que multiplicados den -49 y sumados den -48 .

3. Efectúa las siguientes multiplicaciones.

$$(-5)(2)(-34) =$$

$$\left(-1 - \frac{4}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)(-5) =$$

$$(-10)(-7)(-4)(-2)(-1) =$$

$$(1.5)(-0.1)(2.3) =$$

4. Para fomentar la puntualidad del personal de una fábrica se implementaron los incentivos que se muestran en el siguiente cartel.

Puntualidad: + \$50.00
Retraso menor o igual a 15 minutos: -\$35.00
Retraso mayor a 15 minutos: -\$60.00

a) Calcula, utilizando números positivos y negativos, el beneficio o pérdida de cada trabajador registrado en la tabla.

	Alberto	Beatriz	Carlos	Diana
Días que llegó puntual	14	16	10	12
Días con retraso menor o igual a 15 minutos	3	0	3	1
Días con retraso mayor a 15 minutos	3	4	7	7

❖ Compara tus respuestas con algún compañero. En caso de que sean distintas discutan si es posible tener más de una respuesta correcta.



Resuelve en www.edutics.mx/36u algunos ejercicios de multiplicación de enteros.

División de números positivos y negativos

Resuelve problemas de división con números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos.

Partimos

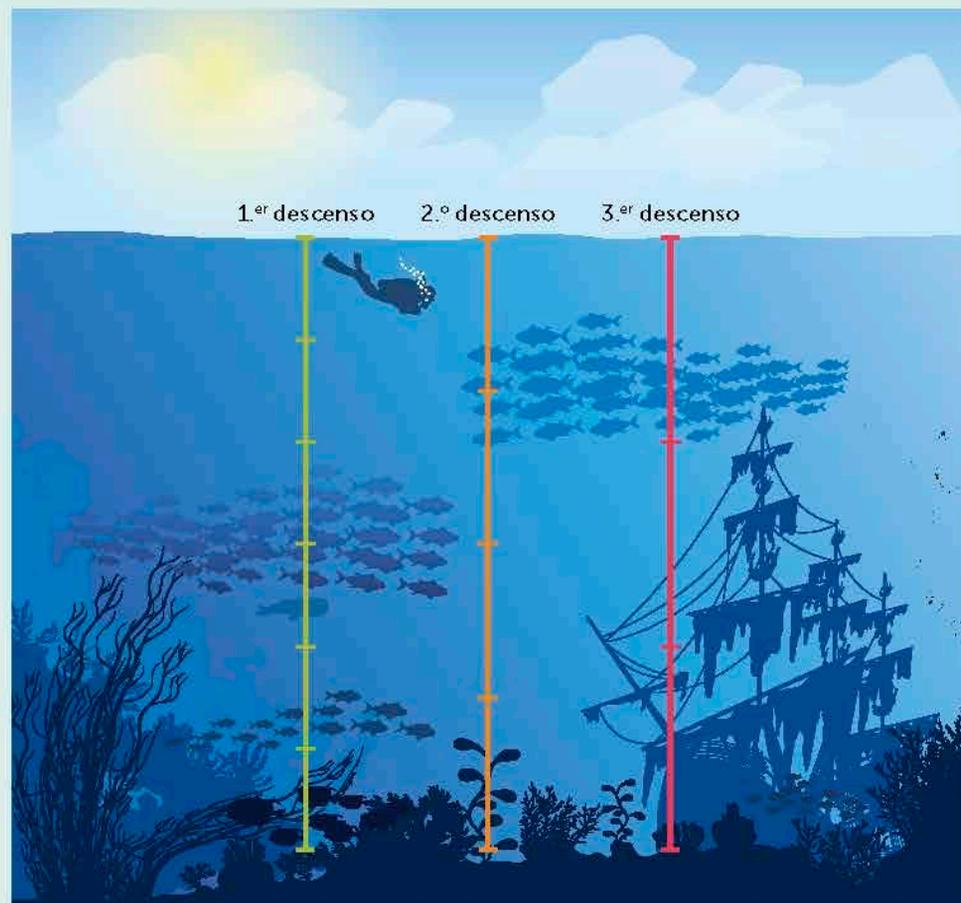
Glosario

pecio. Restos o fragmentos de un artefacto o nave que ha naufragado.

La multiplicación y la división son operaciones que tienen una relación directa, dado que se puede obtener una a partir de la otra. En esta secuencia estudiarás la división de números positivos y negativos utilizando las propiedades de la multiplicación que trabajaste en la secuencia anterior; con ello completarás tu repertorio de operaciones básicas con todos los números que conoces hasta ahora.

1. Analiza la situación y responde.

Un barco hundido se encuentra en el fondo del mar a 31.5 m de profundidad. Para conocer el **pecio**, uno de los buzos del equipo de investigación realizó tres descensos; por razones de seguridad, cada uno en distintas etapas como se muestra en la figura, donde cada división del segmento representa una etapa.



- ¿En cuántas etapas hizo cada descenso?
- Utiliza números negativos para denotar los metros bajo el nivel del mar a los que se encuentra el barco.
- Calcula cuántos metros bajó el buzo por etapa en cada descenso.

◆ Compara tus resultados con los de algún compañero y expliquen la interpretación que le dieron al problema.

El cociente de números enteros

1. Lee cada situación y contesta lo que se te pide.

a) Luis encontró un número que multiplicado por 12 da -96 .

- ¿Qué número es? _____
- ¿Cómo determinaste el número que encontró Luis? _____
- ¿Cuál es el resultado de dividir -96 entre el número desconocido? _____

b) ¿Qué número dividido entre -7 da como resultado -14 ? _____

- Explica cómo obtuviste dicho número. _____

c) ¿Qué número multiplicado por -23 da -805 ? _____

- ¿Cuál es el resultado de dividir -805 entre -23 ? _____
- ¿Cuál es el signo del número que encontraste? _____
- ¿Cómo lo determinaste? _____

❖ Reúnete con un compañero y expliquen con qué operaciones es posible obtener cualquiera de los elementos de la división a partir de dos conocidos; por ejemplo, calcular el dividendo a partir del cociente y el divisor. También discutan cuántas divisiones se pueden escribir a partir de una multiplicación.

2. A partir de las relaciones entre los elementos de la división, completen en parejas la siguiente tabla en la que los números de la primera fila son los dividendos y los de la primera columna los divisores.

		Dividendo			
		\div	-12	30	-42
Divisor	2		15		
	-3				
	4		$\frac{15}{2}$		
	-5				-24

a) Analicen los resultados de la tabla y completen.

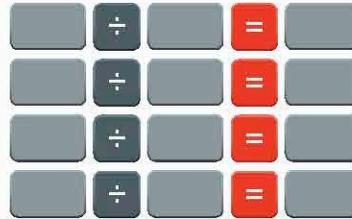
- Si el producto de dos números negativos es positivo, entonces el cociente de uno positivo entre otro negativo deber ser _____.
- Si el producto de un número positivo y otro negativo es negativo, entonces el cociente de uno negativo entre otro negativo deber ser _____.

- ❖ Comparen sus respuestas con otra pareja. Comprueben sus divisiones multiplicando el cociente por el divisor para obtener el dividendo. Repitan las divisiones de la tabla anterior usando su calculadora y verifiquen que han obtenido los mismos resultados. Asegúrense que la calculadora que utilicen tenga las teclas $+/-$ o $(-)$ para escribir números negativos.



Integración

- A partir de las actividades anteriores coloca los signos $+$ y $-$ según corresponda, para resumir las leyes de los signos en la división.



- Compara tu esquema con el de algún compañero. Si son distintos corrijan considerando que la regla de los signos para la multiplicación también sea válida.

Recuerda



En matemáticas los paréntesis se utilizan para separar operaciones o agrupar términos. Por ejemplo:

$$-3 + (-2) = -3 - 2 = -5$$

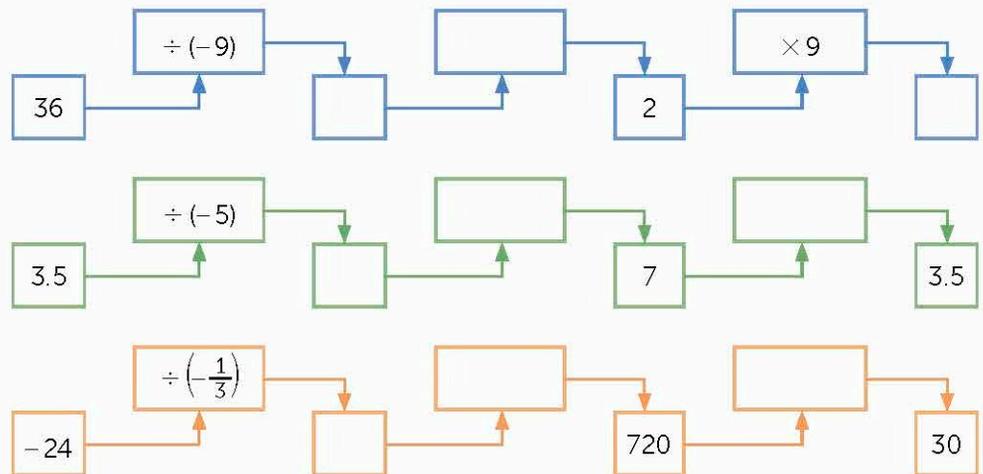
$$5 \div (-3) = \frac{5}{-3}$$

$$4 \times (3 - 8) = 4 \times (-5) = -20$$



Para resolver una división de números positivos y negativos, se dividen los valores absolutos y al resultado se le aplica la regla de los signos como en el caso de la multiplicación. Así, al dividir dos números del mismo signo el resultado tiene signo positivo y el resultado es de signo negativo si se dividen dos números de signo distinto.

3. Escriban en equipos los números y los signos de multiplicación y división que faltan.



- ❖ Verifiquen sus respuestas. Recuerden que una cantidad se puede expresar en fracción o decimal.

4. Resuelve los siguientes problemas.

a) Los termómetros siguientes muestran cuántos grados bajó la temperatura del refrigerador de un laboratorio entre las 15:00 h y las 16:00 h.



- Indica, utilizando números negativos, cuánto descendió la temperatura en una hora y qué fracción de grado descendió cada minuto. Explica tu respuesta.

- Si la temperatura continúa descendiendo de forma constante, ¿a qué hora el refrigerador alcanzará -30°C ? _____

b) En Física la fórmula que relaciona la fuerza que actúa sobre un cuerpo con la masa de éste y con la aceleración que se produce en él es $F = ma$.

- Con base en la fórmula anterior, completa la tabla.

Masa (kg)	Aceleración (m/s ²)	Fuerza (N)
8		-0.8
	$-1\frac{1}{2}$	-18
	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{9}{16}$
1.25		-125
$\frac{5}{8}$		-2.5

c) Encuentra dos números cuyo cociente sea -1 y que la resta del primero menos el segundo sea $-\frac{3}{2}$.

Primero: _____ Segundo: _____

d) Encuentra dos números cuyo cociente sea 0 y que la resta del primero menos el segundo sea 1025 .

Primero: _____ Segundo: _____

- ❖ Compara tus respuestas y tus procedimientos con algún compañero. Si hay diferencias utilicen la calculadora para verificar sus resultados.

5. Resuelve las siguientes divisiones. Escribe tu procedimiento y simplifica al máximo en los casos que consideres necesario.

$$136 \div (-4) =$$

$$-\frac{2}{3} \div \frac{8}{5} =$$

$$3\left(-\frac{1}{2}\right) \div 0.1 =$$

$$2.5 \div \left(-\frac{15}{2}\right) =$$

$$-185 \div (-10) =$$

$$-\frac{3}{4} \div \left(-\frac{5}{2}\right) \div (-1) =$$

Propiedades de la división

6. Lee el siguiente diálogo y contesta.

Camila: Marco, mira lo que descubrí con respecto a la división.

Marco: ¿Qué?, cuéntame.

Camila: Que la división no es conmutativa, pero que si los números de la división que vas a efectuar tienen signo, entonces los signos sí son conmutativos.

Marco: ¿Qué?, no entendí.

Camila: Mm, espera. Volvamos a leerlo con detenimiento y escribamos ejemplos.

Marco: De acuerdo. A ver, mm...

a) Ayuda a Marco y a Camila escribiendo un ejemplo para cada caso.

- La división no es conmutativa: _____
- Al dividir, se puede conmutar los signos: _____

7. Resuelvan en equipos los siguientes problemas.

a) Encuentren dos números tales que al dividir uno entre otro obtengan 1 y otros dos números tales que al dividir uno entre otro obtengan -1 .

- ¿Qué propiedades en común tiene cada pareja de números que encontraron?

b) Encuentren dos números tales que al dividir uno entre otro el resultado sea 0.

- ¿Qué propiedad cumple el dividendo? _____

c) Encuentren dos números enteros que al dividir uno entre otro obtengan -124 .

d) Encuentra dos divisiones cuyo cociente sea -17 .

✦ Comparen sus respuestas con otro equipo. ¿Encontraron los mismos números? Si fueron distintos, ¿cumplen las mismas propiedades?



Integración

- En grupo escriban un resumen de las propiedades de la división que analizaron en las actividades anteriores. Usen una tabla que incluya ejemplos.

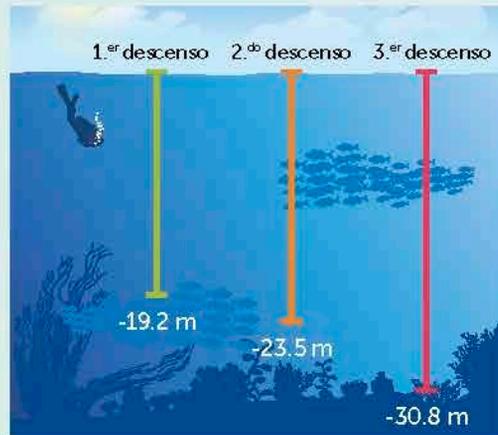
Propiedad	Ejemplo
La división no es conmutativa. Sí importa el orden en que se realiza la división.	

Arribamos

1. Lee nuevamente la situación inicial.

- a) Expresa el problema planteado usando divisiones de números con signo.
- b) Considera el siguiente texto y responde.

Nuestra Señora del Juncal era una embarcación que se hundió en las costas de Campeche en 1631. Desde 1995, el Instituto Nacional de Antropología e Historia implementó un proyecto de investigación que incluía su búsqueda y ubicación. Uno de los buzos profesionales, realizó tres descensos a las profundidades que se indican en la siguiente imagen.



- El primer descenso lo hizo en etapas de -3.2 m, ¿en cuántas etapas terminó?
- ¿En cuántas etapas de -4.7 m hizo el segundo descenso?
- Si el último descenso lo hizo en etapas de -7.7 m, ¿en cuántas terminó?

2. Resuelve los siguientes problemas.

- a) Juan presentó un examen de Historia en el que otorgaban 1.4 puntos por cada respuesta correcta y -0.5 por cada respuesta incorrecta.
 - Si Juan obtuvo 17.5 y contestó 15 preguntas de manera correcta, ¿en cuántas preguntas se equivocó?
 - Escribe una expresión matemática que modele la situación.
- b) Encuentra dos números cuyo cociente sea -8 y cuyo producto sea -32 .
- c) Encuentra dos números cuyo cociente sea 0.75 y cuya suma sea -7 .

3. Utiliza la jerarquía de operaciones cuando sea necesario y resuelve.

$$\begin{array}{ll}
 -361 \div (-19) = & \frac{2}{3} \div \left(-\frac{5}{6}\right) = \\
 \frac{(-3+8-25)}{-5} = & \frac{12 \times (-8)}{(-6) \times 4} = \\
 2 \times (-24) \div (-64 + 80) - 8 = & (65 \div (-5)) \times 2 + (28 \div 7) =
 \end{array}$$

- ◆ En grupo valida tus respuestas. Traten juntos de plantear problemas y acertijos que involucren divisiones de números con signo y también otras operaciones. Compartan sus planteamientos de forma ordenada y presten atención a las propuestas de sus compañeros.

Explora

En el siguiente enlace www.edutics.mx/3uN encontrarás ejercicios y problemas de división de enteros. Los dos puntos (:) representan el operador de división.

Convivimos

Al trabajar en equipo, es importante comunicar tus ideas con respeto. Reflexiona y comparte: ¿cómo mejorarías este aspecto con tus compañeros?

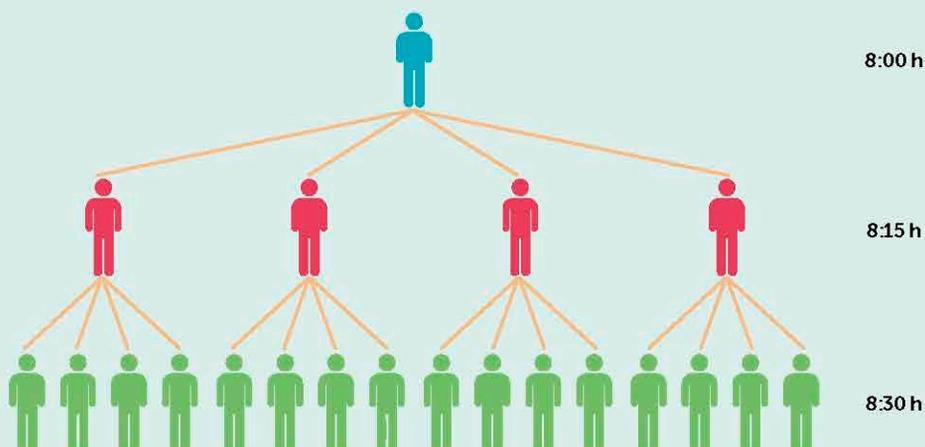
Potencias con exponentes enteros

Resuelve problemas de potencias con exponente entero.

Partimos

1. Lee la situación y contesta.

Un viajero llega a las ocho de la mañana a un pequeño pueblo con una noticia que interesa a todos. Así, a las 8:15, el viajero ha contado la noticia a cuatro personas y continúa su viaje. En los siguientes quince minutos, cada una de ellas comparte la noticia con otras cuatro que no la conocen. Quince minutos después, cada una de estas personas la repite y continúan así, propagando la noticia, en un periodo de 15 minutos cada vez.



- ¿Cuántas personas del pueblo, sin incluir al viajero, conocen la noticia a las 8:45 h? ¿Y a las 9:15 h?
- En alguno de los periodos de quince minutos, ¿es posible que exactamente 1 000 personas conozcan la noticia? Explica tu respuesta.

❖ Compara con tus compañeros tus respuestas y procedimientos. ¿Conocen alguna manera de expresar una multiplicación cuando los factores son todos iguales?

Recorremos

Potencias

1. Resuelve los siguientes problemas.

- Como has estudiado en Biología, las bacterias se reproducen asexualmente por fisión binaria (figura 5.1) y ocurre de manera muy rápida. De una célula se obtienen dos, de esas dos se obtienen cuatro células hijas, y así sucesivamente.
 - Escribe una operación aritmética que te permita calcular cuántas bacterias habrá después de media hora en el caso de que una bacteria se reproduzca cada cinco minutos.

- ¿Cuántas bacterias habrá en ese momento?

- ¿Cuántas habrá al cabo de 45 minutos? ¿Y en una hora? _____
- Escribe las expresiones aritméticas que te permiten hacer los cálculos.

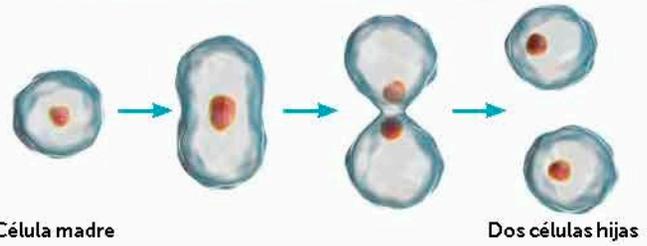


Figura 5.1 En la fisión binaria la célula aumenta su tamaño y duplica su material genético y citoplasmático en dos partes idénticas para dar lugar a dos células hijas idénticas.

- ¿Hay el doble de bacterias en una hora que en media hora? Explica tu respuesta.

b) En un invernadero, una planta de frambuesa tiene seis ramas de las que se pueden obtener seis **esquejes**. Después de mes y medio, cada esqueje da a su vez una planta con seis ramas de las que nuevamente se separan seis esquejes. Si se continuara con este método de reproducción y suponiendo que ningún esqueje ni planta mueran, ¿cuántos esquejes se habrían plantado después de seis meses? _____

- Escribe las operaciones aritméticas para calcular el resultado.

Glosario

esquejes. Fragmentos de plantas (tallos, brotes o trozos de raíces) que se utilizan con fines reproductivos para obtener otras plantas idénticas.

✦ Compara tus respuestas con las de tus compañeros. ¿Cómo obtuvieron los resultados? ¿Todos utilizaron la misma operación para realizar los cálculos?



Multiplicaciones con factores iguales como $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ o $10 \times 10 \times 10 \times 10$ se pueden expresar en forma abreviada como 2^6 o 10^4 . A esta operación se le conoce como **potenciación** y a su resultado, **potencia**. El factor repetido se llama **base** y el número que indica las veces que se repite se llama **exponente**. Por ejemplo:

$$\text{base} \rightarrow 2^6 \leftarrow \text{Exponente}$$

Se lee "dos elevado a la sexta potencia"; por lo que 64 es la sexta potencia de 2. De forma general:

$$\text{base} \rightarrow b^n \leftarrow \text{Exponente}$$

El resultado, es decir, $b \times \dots \times b$ (n -veces) es la n -ésima potencia de b .

Explora

En la página www.edutics.mx/Uee podrás resolver varias actividades para familiarizarte con la operación potenciación.

2. Con base en la información anterior, escribe las multiplicaciones o potencias que corresponden.

_____ = 5^5	_____ = $(-2)^7$	_____ = 15^1
_____ = $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$	_____ = $1.5 \times 1.5 \times 1.5 \times 1.5$	_____ = $0 \times 0 \times 0$
_____ = $m \times m \times m \times m \times m \times m \times m \times m$	_____ = $a \times a$	



Integración

- Como grupo escriban los resultados de las siguientes potencias. Consideren que n es un entero positivo.

$$1^n = \underline{\hspace{2cm}} \quad n^1 = \underline{\hspace{2cm}} \quad 0^n = \underline{\hspace{2cm}}$$

- Expresen lo anterior como reglas generales para cualquier entero positivo n .

$$1^n = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$n^1 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$0^n = \underline{\hspace{2cm}}$$

Producto de potencias con la misma base

3. Analicen en parejas la información y contesten.

La capacidad de las computadoras se mide en bits y en bytes. Un bit es la unidad más pequeña y sólo puede tomar dos valores: 0 o 1. Un byte son 8 bits, que puede ser expresado como 2^3 bits. Debido a que la capacidad de las computadoras se ha incrementado a causa del desarrollo de sus componentes, se ha recurrido a otras unidades como kibibyte comúnmente llamado kilobyte, mebibyte (megabyte), gibibyte (gigabyte), tebibyte (terabyte), etcétera.¹

¹ Nombres y símbolos de los prefijos utilizados en el campo de telecomunicaciones y electrónica. Sistema internacional de Unidades (SI), 8.ª ed. 2006, p. 32, www.cern.es/sites/default/files/siu8edes.pdf (consulta: 13 de mayo de 2018).

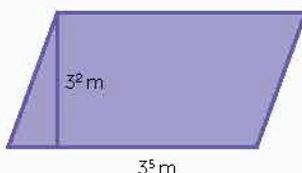
- a) Si un kibibyte equivale a 2^{10} bytes, ¿cuántos bits hay en un kibibyte?

- _____
- ¿Cómo calcularon la cantidad de bits? _____
 - En la operación que utilizaron para resolver, ¿cuántas veces en total aparece el número 2 como factor? _____
 - Expresen en forma de potencia la cantidad de bits hay en 1 kibibyte.

- b) Un mebibyte son 2^{10} kibibytes, ¿cuál es la cantidad de bytes, escrita como potencia de 2, que hay en 1 mebibyte? _____

- c) Si a 64 personas se les envía un archivo de 1 mebibyte, ¿cuántos bytes en total se recibieron considerando a todos los destinatarios? Expresen la respuesta como potencia de 2. _____

4. Continúen en parejas y respondan con base en la información de la figura.



- a) ¿Cuál es el área del paralelogramo expresada como potencia de 3?

- b) ¿Cómo se relacionan los exponentes de los factores 3^2 y 3^5 con el exponente de su producto? _____

- ❖ Comparen sus respuestas y sus procedimientos con los de otra pareja. En cada caso ¿cómo se relacionan los exponentes de las potencias en los factores y su resultado? Discutan cuál podría ser una regla para multiplicar potencias que tengan la misma base y corrobórenla con la siguiente información.



El producto de dos potencias con la misma base es otra potencia con la misma base y cuyo exponente es la suma de los exponentes en los factores.



Integración

- Con base en la información anterior, completen de forma grupal la expresión con las letras a , m y n donde corresponde.

$$a^m \times a^n = \text{---}^{m+n}$$

5. Coloca los exponentes necesarios para que las siguientes igualdades sean verdaderas.

$$10^{\text{---}} \times 10^6 = 10^7$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{\text{---}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\text{---}}$$

$$4^9 \times 4^{\text{---}} = 4^{12}$$

$$(-9) \times (-9)^{\text{---}} \times (-9)^4 = (9)^7$$

$$0.5^2 \times 0.5^3 \times 0.5^6 = 0.5^{\text{---}}$$

$$a^1 \times a^{\text{---}} \times a^3 = a^6$$

Potencia de potencias

6. Resuelvan en equipos.

En cada cuadrado se indica la longitud de sus lados. Las figuras no están trazadas en la misma escala.

- a) Expresen el área de cada figura como la potencia de una potencia.

$$\text{Área}_{\text{Cuadrado A}}: \text{---} \text{ cm}^2$$

$$\text{Área}_{\text{Cuadrado B}}: \text{---} \text{ cm}^2$$

$$\text{Área}_{\text{Cuadrado C}}: \text{---} \text{ cm}^2$$

- b) Utilicen su calculadora para encontrar el área. Si tienen una calculadora científica, pulsen la tecla \wedge para los exponentes.

$$\text{Área}_{\text{Cuadrado A}}: \text{---} \text{ cm}^2$$

$$\text{Área}_{\text{Cuadrado B}}: \text{---} \text{ cm}^2$$

$$\text{Área}_{\text{Cuadrado C}}: \text{---} \text{ cm}^2$$

- c) Traten de escribir los resultados anteriores como potencias de 5, 2 y 10, respectivamente. Pueden utilizar la calculadora.

$$\text{Área}_{\text{Cuadrado A}}: \text{---} \text{ cm}^2$$

$$\text{Área}_{\text{Cuadrado B}}: \text{---} \text{ cm}^2$$

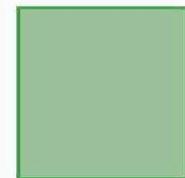
$$\text{Área}_{\text{Cuadrado C}}: \text{---} \text{ cm}^2$$

- d) ¿Cómo se relacionan los exponentes de las expresiones en los incisos a) y c)? _____



$$5^3 \text{ cm} = 125 \text{ cm}$$

Cuadrado A



$$2^8 \text{ cm} = 256 \text{ cm}$$

Cuadrado B



$$10^3 \text{ cm} = 1000 \text{ cm}$$

Cuadrado C

- ❖ Comparen respuestas con otros equipos. Cómo escribieron la potencia de una potencia. Con su calculadora verifiquen si sus observaciones son válidas para otros números.

		Alejandra			
		$(3^2)^4 = 3^2 \times 3^2 \times 3^2 \times 3^2 = 3^8$			

7. Nuevamente en equipos analicen lo siguiente.

A tres alumnos se les pidió que escribieran un ejemplo de una potencia cuya base fuera una potencia, que la desarrollaran y escribieran el resultado como otra potencia.

		Julián			
		$(4^3)^3 = 4^3 \times 4^3 \times 4^3 = 4^6$			

		Andrea			
		$\left(\left(\frac{1}{2}\right)^3\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{12}$			

- Revisen los resultados de cada estudiante. ¿Alguno de ellos se equivocó? Expliquen su respuesta. _____
- ¿Qué se hace con los exponentes en una potencia de potencias?

- Carlos afirma que el resultado de las potencias $(b^8)^2$ y $(b^2)^8$ es el mismo. Expliquen si Carlos tiene razón. _____

- ❖ Comparen respuestas con otros equipos. ¿Cómo hicieron para calcular las potencias de cada estudiante y verificar las que son correctas?



Multiplicar una potencia por sí misma varias veces se conoce como potencia de potencias. El resultado es igual a la base elevada al producto de los exponentes. De forma general se representa:

$$(a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m$$

División de potencias con la misma base

8. Resuelvan en grupo el siguiente problema.

- ¿Cuántos archivos de 64 kibibytes pueden almacenarse en el espacio por usar en el disco de la izquierda? _____
- Escriban la capacidad del disco y el tamaño del archivo como potencias de 2.
Espacio en el disco: _____ bytes
Tamaño de archivo: _____ bytes
- Desarrollen las potencias en el numerador y en el denominador de la fracción que representa la división que resuelve el problema.

$$\frac{512 \times 2^{10}}{64 \times 2^{10}} = \frac{2^{19}}{2^{16}} = \underline{\hspace{2cm}}$$



- d) Simplifiquen la expresión anterior considerando que el cociente de un número entre sí mismo es 1 y escriban el resultado en forma de potencia.

$$\frac{2^{19}}{2^{16}} = \underline{\hspace{2cm}} =$$

- ¿Fue posible simplificar? ¿Por qué?

- e) ¿Qué relación hay entre el exponente del resultado y los exponentes de las potencias del numerador y del denominador?

- f) Utilicen las siguientes fracciones para validar sus conclusiones. Desarrollen las potencias del numerador y del denominador, simplifiquen y escriban el resultado en forma de potencia.

$$\frac{4^7}{4^4} = \underline{\hspace{2cm}} =$$

$$\frac{0.2^6}{0.2^2} = \underline{\hspace{2cm}} =$$

$$\frac{(-3)^5}{(-3)^4} = \underline{\hspace{2cm}} =$$

- ❖ Escriban un procedimiento para obtener el exponente del resultado a partir de los exponentes de las potencias del numerador y del denominador.

9. Desarrollen en equipos las potencias del numerador y del denominador de las fracciones siguientes, simplifiquen la fracción y escriban el resultado del denominador en forma de potencia.

$$\frac{10^5}{10^8} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{5^3}{5^7} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{(-6)^2}{(-6)^7} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{d^4}{d^8} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

- a) ¿Cuál es la diferencia entre los resultados de las divisiones anteriores y las del inciso f) de la actividad 8? _____
- _____

- b) Apliquen a los cocientes de potencias de esta actividad el procedimiento que encontraron en la actividad 8. ¿El exponente del resultado es positivo o negativo? Expliquen su respuesta.
- _____
- _____

- ❖ Comparen sus respuestas y procedimientos con los de otro equipo. Juntos determinen cómo pueden escribir una potencia cuyo exponente es negativo.





Al dividir dos potencias con la misma base se obtiene otra potencia con la misma base cuyo exponente es la resta del exponente del numerador menos el exponente del denominador.

Aprendemos



Al escribir las expresiones algebraicas que resumen las propiedades de la potenciación, éstas te ayudan a entender cómo hacer los cálculos. Reflexiona: ¿por qué sucede esto?



Integración

- Con base en la información anterior, completa las expresiones.
- Coloca los exponentes que faltan para que las igualdades sean verdaderas.

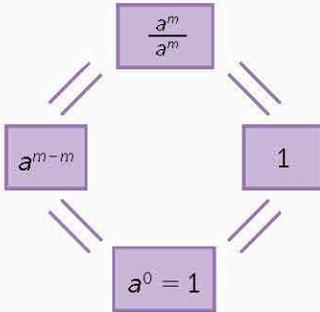
$$\frac{a^m}{a^n} = a^{-\quad} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^{-\quad}}$$

$$\frac{2^{12}}{2^9} = 2^{-\quad} \quad \frac{m^{-\quad}}{m^9} = m^{-\quad} \quad \frac{3^3}{3^{-5}} = 3^{-\quad} \quad \frac{7^{-\quad}}{7^4} = 7^{-7}$$

10. Analicen en parejas lo siguiente.

A Cuauhtémoc y a Marisol les dejaron de tarea investigar por qué cuando se eleva cualquier número a la potencia 0 se obtiene 1.

a) Cuauhtémoc buscó en internet y encontró el diagrama de la izquierda en el que se indica que las cuatro expresiones son iguales.



- ¿Por qué $\frac{a^m}{a^m}$ es igual a 1?

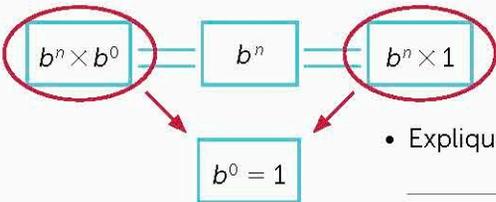
- Expliquen por qué $\frac{a^m}{a^m}$ es igual a a^0 .

- ¿Cómo se llega a la conclusión de que $a^0 = 1$?

b) Marisol encontró en un libro el siguiente diagrama.

- Expliquen por qué b^n es igual a $b^n \times 1$.

- ¿Por qué $b^n \times b^0$ es igual a b^n ?



- Expliquen por qué a partir de $b^n \times b^0$ y $b^n \times 1$ se deduce que $b^0 = 1$.

❖ Comparen sus respuestas y razonamientos con sus compañeros. Si tienen dudas, soliciten el apoyo de su maestro.



- Lee nuevamente la situación que se plantea al inicio de la secuencia.
 - Si el pueblo tiene 65 000 habitantes, ¿a qué hora todo el pueblo conocerá la noticia?
 - Al empezar el último periodo de 15 minutos ¿cuántas personas conocen la noticia y a cuántas se les compartirá?
 - ¿Cuántas de esas personas que ya la conocen podrán contársela a otras cuatro y cuántas no podrán hacerlo?

- Subraya con verde las igualdades que son verdaderas y de rojo las que son falsas.

$$4^3 \times 4^0 = 4^4$$

$$a^2 \times a \times a^3 = a^6$$

$$1.9^9 \times 1.9^6 = 1.9^{15}$$

$$(m^5)^6 = m^{30}$$

$$(80^2)^4 = 80^6$$

$$\left(\left(\frac{1}{2}\right)^4\right)^0 = \frac{1}{2}$$

$$\frac{11^{15}}{11^4} = 11^{11}$$

$$\frac{2^4}{2^7} = 2^3$$

$$\frac{b^6}{b^8} = b^{-2}$$

- Resuelve los siguientes problemas.

- Lee la información y contesta.

A partir de 2015, los números de teléfono fijo de nuestro país tienen 10 dígitos. Para hacer una llamada de larga distancia se utiliza el Número de Identificador de Región (NIR) conocido como código de larga distancia. Por ejemplo, alguien que marca de la Ciudad de México a Guadalajara debe teclear "33" y el número de ocho dígitos, pero para marcar a una misma región bastará con que se tecleen los ocho dígitos.

- ¿Cuántos números de teléfono fijo se pueden generar en una región del país?
- Si existe la restricción de que los números de teléfono fijo no empiecen con 0, ¿cuántos números de teléfono fijo podría haber en una región del país?
- Si consideras que los NIR y los números de teléfono fijo no deben empezar con 0, ¿cuántos números de teléfono fijo podría haber en todo país?

- Ana compró un disco duro como el de la imagen (1 gibibyte = 2^{30} bytes) y un software que reduce 2^8 veces el tamaño de un archivo.
 - ¿Cuántos archivos de 2 mebibytes caben en el disco duro?
 - Si una carpeta ocupa 8 mebibytes y se reduce con el software, ¿cuántos bytes ocupará la carpeta?
 - ¿Cómo podrías expresar el resultado anterior como potencias de 2?

- Resuelve las operaciones, escribe los resultados usando potencias.

$$3^2 \times 3^8 \times 3^3 = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^3 = (4^3 \times 4^4)^2 = \frac{2^5 \times 2^4 \times 2^6}{2^9 \times 2^8} = \frac{\left(\left(\frac{7}{5}\right)^3\right)^2}{\left(\left(\frac{7}{5}\right)^2\right)^3}$$

- Explica a tus compañeros cómo obtuviste tus resultados. Recuerden que puede haber más de una forma de resolver y llegar a la respuesta correcta.



Explora

En el siguiente enlace www.edutics.mx/ Uen encontrarás ejercicios y problemas que se resuelven con las propiedades de la potenciación. Los dos puntos (:) representan el operador de división.



Diagonales y ángulos interiores de un polígono

Deduce y usa las relaciones entre los ángulos interiores y las diagonales de polígonos regulares.

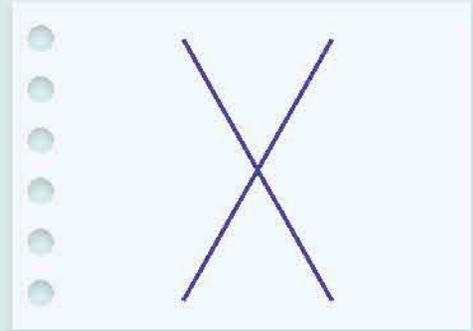
Partimos



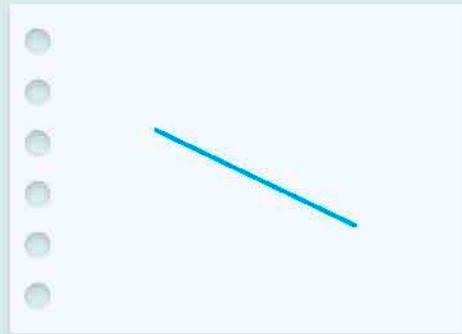
1. Utiliza tu juego de geometría para trazar lo que se solicita y contesta. Los siguientes segmentos son diagonales del polígono que se indica. Traza cada polígono y compara con un compañero tus figuras.



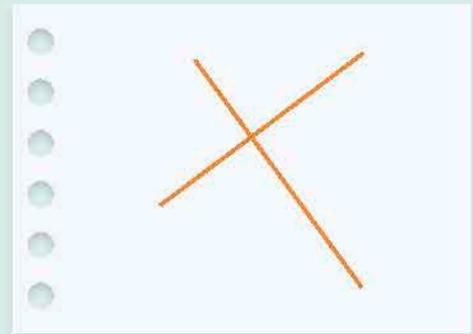
Cuadrado



Hexágono regular



Pentágono irregular



Hexágono irregular

Recuerda



Una diagonal es un segmento de recta que une dos vértices no consecutivos de un polígono.

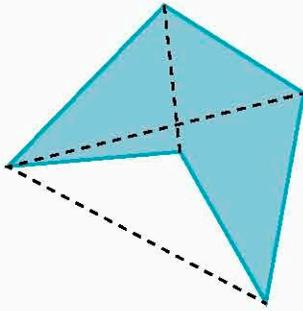
- a) ¿Qué polígonos de los trazados son iguales a los de tu compañero y cuáles diferentes?
- b) ¿A qué piensas que se deba que algunos de los polígonos son iguales y otros no?
- c) ¿Existe algún polígono que no tenga diagonales? ¿Cuál?
- d) ¿Hay polígonos que sólo tengan una diagonal? ¿Y dos diagonales?

- Compara con tus compañeros tus trazos y respuestas. Explica cómo construiste los polígonos a partir de las diagonales y señala qué otros datos requeriste para trazar las figuras y cómo los obtuviste.

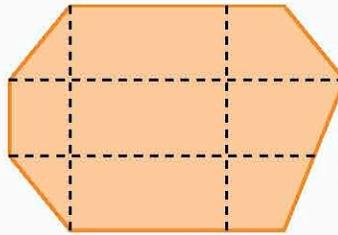
Diagonales

1. Analiza los polígonos, realiza lo que se indica y responde.

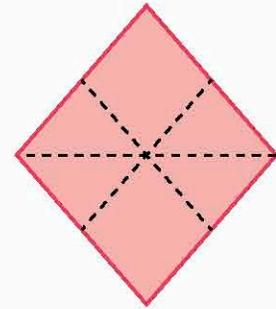
- a) Considera la definición de diagonal de la sección "Recuerda" de la página 52 y marca con color verde las rectas punteadas que sean diagonales de cada polígono.



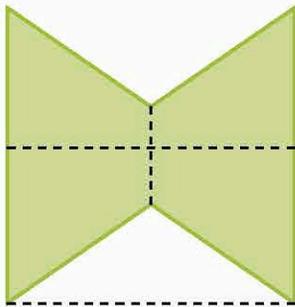
Polígono A



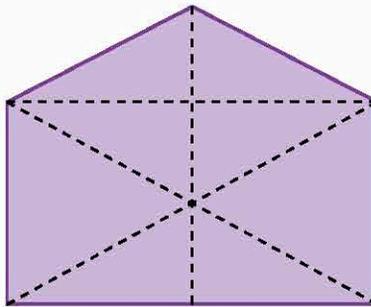
Polígono B



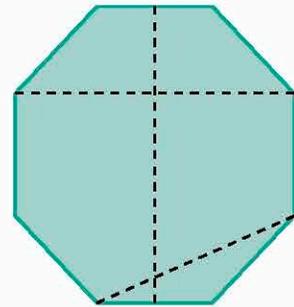
Polígono C



Polígono D



Polígono E



Polígono F

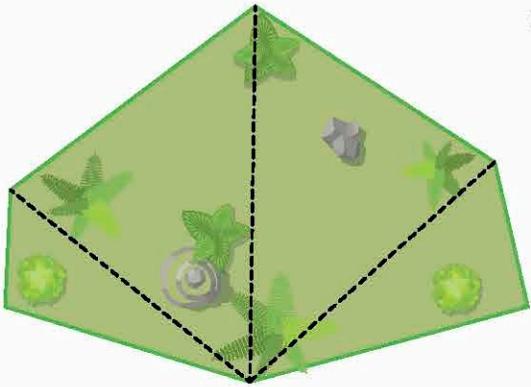
- b) ¿Qué característica tienen en común las rectas de cada polígono que no coloreaste para que no sean consideradas como diagonales?
- c) ¿En qué polígonos coloreaste diagonales que no son segmentos inclinados?
-
- d) Un polígono se llama cóncavo si al menos alguna de sus diagonales es exterior al polígono. De los polígonos anteriores, ¿cuáles son cóncavos?
-

❖ A partir de tus respuestas discute en grupo lo siguiente: ¿las diagonales de un polígono siempre son segmentos inclinados? ¿El lado de un polígono puede coincidir con una diagonal del mismo? ¿Toda diagonal divide al polígono en dos partes iguales? Argumenten sus respuestas.



Un polígono es **convexo** si todas sus diagonales son interiores. Si un polígono no es convexo, se le llama **cóncavo**.

Número de diagonales de un polígono



2. Lee la situación y resuelve.

La imagen de la izquierda representa un terreno, el cual debe dividirse en secciones triangulares para sembrar cuatro tipos de flores distintas.

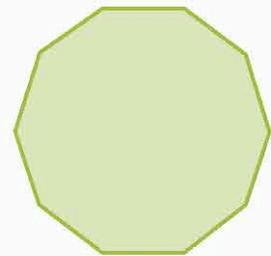
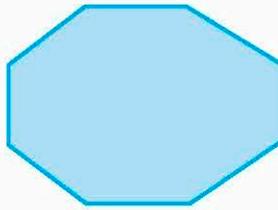
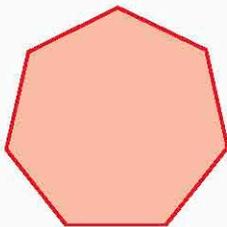
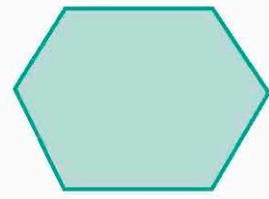
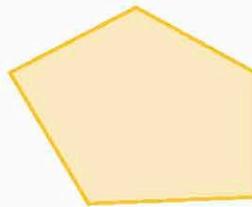
a) ¿Qué forma geométrica tiene el terreno?

b) Elige otra esquina del terreno y traza todas las diagonales que partan de ese vértice. ¿Cuántas diagonales pudiste trazar? _____

c) ¿En cuántos triángulos queda dividido el terreno al trazar esas diagonales? _____

3. Reúnete con un compañero y contesten.

En cada uno de los siguientes polígonos elijan un vértice y, a partir de él, tracen todas las diagonales.



a) Completen la tabla y respondan.

Nombre	Número de lados	Número de diagonales desde un vértice
Cuadrilátero		
Pentágono		
	6	
	7	
Octágono		
Decágono		

b) ¿Cuántos y cuáles vértices no se contabilizaron para el trazo de diagonales?

c) ¿Qué relación observan entre el número de lados de un polígono y la cantidad de diagonales que se pueden trazar desde un vértice?

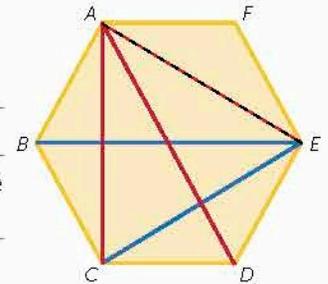
d) Cada uno de ustedes trace un polígono diferente de más de 10 lados y marque las diagonales desde un mismo vértice. ¿Existe la misma relación que escribieron en el inciso anterior? Expliquen.

e) Si en un polígono de 20 lados trazan todas las diagonales desde un vértice, ¿cuántas son? _____

❖ Reflexionen en grupo, a partir de lo anterior, cómo pueden argumentar que sus conclusiones son válidas para cualquier polígono: en un polígono con n lados, ¿cuántas diagonales se pueden trazar desde uno de sus vértices? ¿Cuántos lados tiene un polígono en el que el total de diagonales desde el vértice A es d ?

4. Resuelvan en equipos la siguiente actividad.

En el polígono $ABCDEF$ se trazaron las diagonales desde A y desde E .



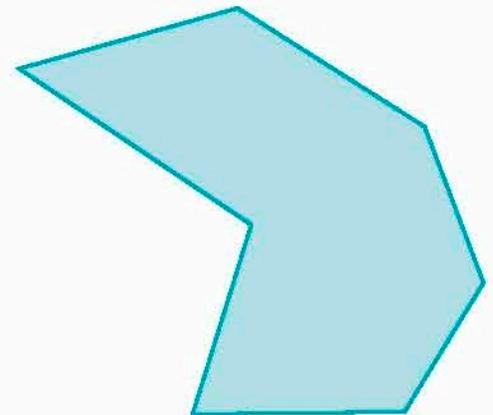
a) ¿Por qué la diagonal AE se coloreó dos veces? _____

b) Si se trazan en color verde las diagonales desde el vértice B , expliquen por qué la diagonal BE tendría dos colores. _____

c) Si trazaran en color amarillo las diagonales desde el vértice C , ¿qué diagonales tendrían dos colores? Expliquen su respuesta.

d) Si trazaran con distintos colores todas las diagonales del hexágono, ¿qué diagonales tendrían dos colores. Expliquen su respuesta. _____

e) ¿Cuántas diagonales tiene en total el hexágono? _____



5. Reunidos en equipos, analicen y contesten.

Luis, Marco y Rosa calcularon las diagonales que tiene el heptágono de la derecha. Cada uno argumentó su respuesta.

Luis: tracé una a una las diagonales y son 14.

Marco Antonio: si de cada vértice se trazan 4 diagonales y la figura tiene 7 lados, entonces posee 28 diagonales.

Rosa: desde cada vértice se pueden trazar 4 diagonales. Como tiene 7 lados es posible dibujar 28 diagonales; pero, como cada una se cuenta dos veces, entonces sólo tenemos 14 diagonales.

- a) Tracen todas las diagonales del heptágono. ¿Cuántas son? _____
- b) ¿Qué razonamiento consideran que es correcto y por qué? _____
- c) ¿Cuál de los razonamientos utilizarían para calcular el número de diagonales de un polígono de 15 lados? Expliquen su respuesta. _____
- Calculen las diagonales, ¿cuántas tiene? _____
- d) Considerando el razonamiento de Rosa, escriban una operación que permita calcular el número total de diagonales de un polígono de 25 lados.

✦ En grupo comparen sus respuestas. Traten de establecer una fórmula para calcular el número de diagonales en otros polígonos y en general para cualquiera.



En un polígono de n lados:

- El número de diagonales que se pueden trazar desde un vértice es $n-3$.
- El número total de diagonales es $\frac{n(n-3)}{2}$.



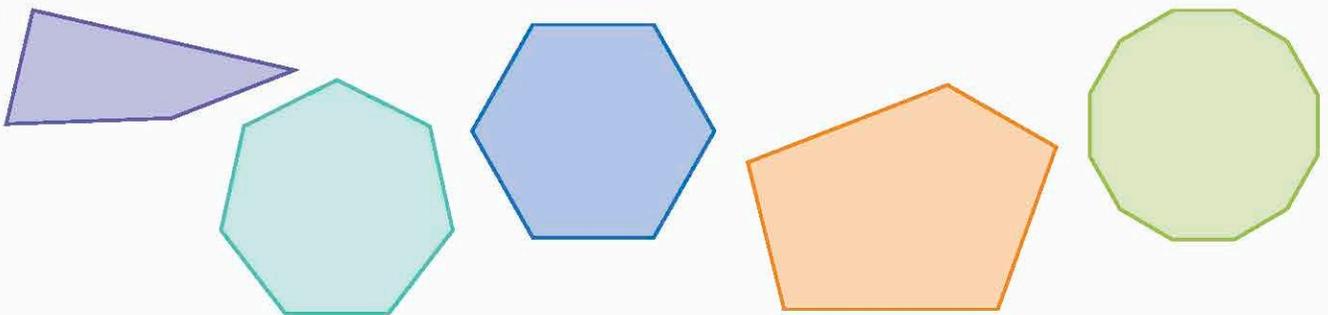
Integración

- Utiliza la información anterior y completa los valores en la tabla.

Número de lados	Diagonales desde un vértice	Diagonales totales
4		
	6	
11		
	14	

Suma de ángulos interiores de un polígono

6. Realiza lo que se te pide.
- a) En cada uno de los siguientes polígonos, elige un vértice y traza las diagonales a partir de él.

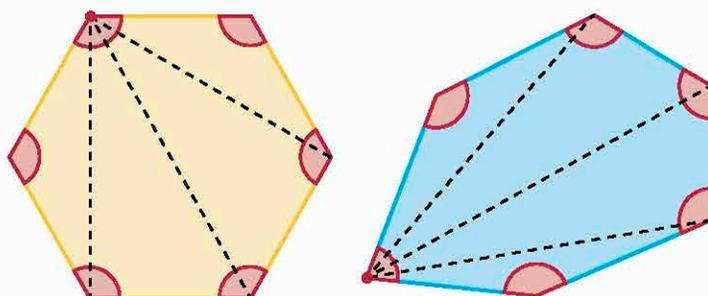


b) A partir de la actividad con los polígonos anteriores completa las primeras tres columnas de la tabla.

Polígono	Número de lados	Diagonales desde un vértice	Número de triángulos en que se dividió	Suma de los ángulos interiores del polígono
Cuadrilátero				
Pentágono				
Hexágono				
Octágono				
Decágono				

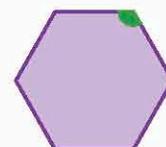
c) Observa los datos en la tabla anterior y escribe una expresión algebraica que permita encontrar el número de triángulos en los que queda dividido un polígono de n lados si se trazan las diagonales desde un vértice.

d) En los polígonos siguientes se trazaron las diagonales desde un vértice y se señalaron los ángulos interiores.



Glosario

ángulo interior de un polígono. Ángulo formado por dos lados consecutivos.



- ¿En cuántos triángulos quedó dividido cada hexágono?

- ¿Cuál es la suma de los ángulos interiores de cada triángulo?

- ¿Cuál es la suma de los ángulos de los triángulos en los que quedó dividido cada hexágono?

- ¿Cuánto da la suma de los ángulos interiores de cada hexágono?

e) A partir del análisis en las figuras del inciso anterior calcula el resultado de la suma total de los ángulos interiores de los polígonos en la tabla del inciso b) y completa la última columna.

❖ Compara tus respuestas con las de tus compañeros. ¿Todos encontraron la misma expresión en el inciso c)? Observen los triángulos en los que se divide cada polígono, ¿sumar todos los ángulos interiores del polígono es equivalente a sumar los ángulos interiores del abanico de triángulos que lo forman? Expliquen su respuesta.

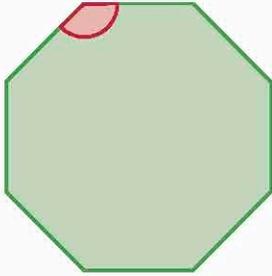


Integración

- Reflexiona con el resto del grupo.
 - a) ¿Qué relación hay entre la suma de los ángulos interiores de un polígono cualquiera y el número de lados de ese polígono? _____
 - b) ¿La relación anterior se cumple para polígonos cóncavos y convexos? Expliquen. _____



La suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados es $180^\circ(n-2)$.



7. Resuelvan los siguientes problemas en equipo.

- a) ¿Cuánto suman los ángulos interiores del octágono regular de la izquierda? _____
 - ¿Cuánto mide el ángulo marcado? Expliquen. _____
- b) Luis quiere dibujar un polígono irregular cuya suma de ángulos interiores sea 1440° .
 - Escriban una ecuación que modele la situación anterior y resuélvanla. _____
 - ¿Cuántos lados tiene el polígono? _____
- c) Consideren un polígono cuya suma de ángulos interiores sea 2520° .
 - Escriban una expresión matemática que les permita encontrar el número de lados del polígono. _____
 - ¿Cuántos lados tiene el polígono? _____
 - Si el polígono fuera regular, ¿cuánto mediría cada ángulo interior? _____
 - Si fuera irregular, ¿cuánto mediría cada ángulo interior? _____
- d) La suma de los ángulos interiores de un polígono es 2700° . ¿Cuántas diagonales tiene? _____

❖ Comparen sus resultados y procedimientos con los de sus compañeros. ¿Plantearon las mismas ecuaciones? Si hay diferencias, busquen el apoyo de su maestro.



- A partir de la suma de los ángulos de un polígono se puede obtener mayor información del mismo:
- el número de lados que tiene;
 - la medida de un ángulo interior del polígono si éste es regular.

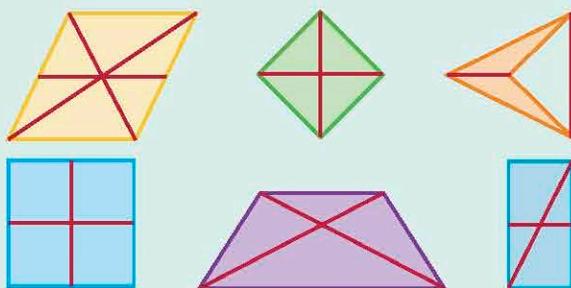
Explora



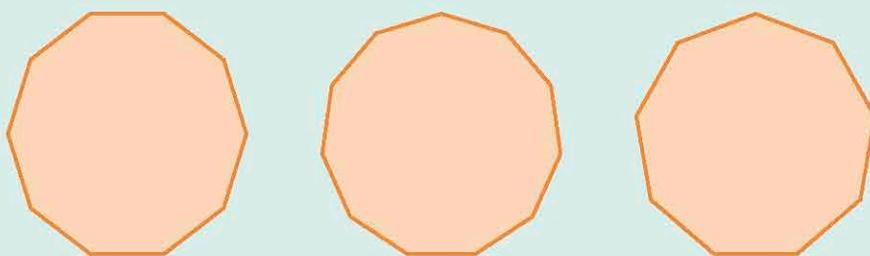
En el siguiente enlace www.edutics.mx/UnD encontrarás actividades interactivas para calcular la suma de los ángulos interiores de diversos polígonos.



1. Analiza la situación que se planteó al inicio de la secuencia y considera el siguiente problema.
 - a) La figura de la derecha representa el trazo de todas las diagonales de un polígono. ¿Cuántos lados tiene? ¿De qué figura se trata?
2. Encierra en un círculo rojo los polígonos en los que se trazaron rectas que no son diagonales.



3. Resuelve los siguientes problemas.
 - a) Si un polígono tiene 21 vértices, ¿cuántas diagonales tiene en total? ¿Cuántas diagonales se pueden trazar desde uno de sus vértices?
 - b) ¿Cuánto mide la suma de los ángulos interiores de un heptágono regular? ¿Y cada ángulo interior?
 - c) Desde un vértice de un polígono irregular se pueden trazar 8 diagonales. ¿Cuál es la suma de sus ángulos interiores?
 - d) Si la suma de los ángulos interiores de un polígono irregular es 720° , ¿cuánto mide uno de sus ángulos interiores?
4. Considera los polígonos de la imagen.



- a) Encierra en un círculo azul el polígono cuya suma de ángulos interiores es 1260°
- b) Encierra en un círculo verde el polígono cuyo ángulo interior mide 144°
- c) Encierra en un círculo rojo el polígono que tiene 8 diagonales desde un vértice.

❖ Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Utilicen argumentos lógicos que les permitan comprobar las soluciones. Es importante que expliquen las dificultades a las que se enfrentaron y cómo las resolvieron.



Arribamos



Explora

Para practicar lo estudiado en esta secuencia, en el siguiente enlace www.edutics.mx/Unz encontrarás actividades que podrás resolver con las propiedades de los polígonos.



Conviuimos

Al compartir ideas con tus compañeros, recuerda que todas las opiniones son valiosas, incluyendo la tuya. Reflexiona y conversa: ¿qué importancia le das a tus intervenciones en clase?, ¿por qué?

S7

Relaciones entre los ángulos de un polígono

Deduce y usa las relaciones entre los ángulos interiores, exteriores y centrales de polígonos regulares.

En un polígono cualquiera hay dos tipos de ángulos: los ángulos interiores, cuyas propiedades estudiaste en la secuencia anterior, y los ángulos exteriores. Además, cuando el polígono está dentro de una circunferencia, existe otro tipo de ángulo llamado ángulo central. En esta secuencia estudiarás los ángulos de un polígono regular, sus propiedades y las relaciones que existen entre ellos.

Partimos

1. Analiza la situación y contesta.

Al arquitecto Martínez le entregaron los viejos planos de un complejo recreativo. El papel está deteriorado y roto, por lo que ya no se aprecian todos los trazos. En el proyecto estaba contemplada la creación de un parque que tendría la forma de un polígono regular; sin embargo, lo único que se aprecia en los planos es parte de su contorno y un ángulo exterior, como se muestra en la figura.

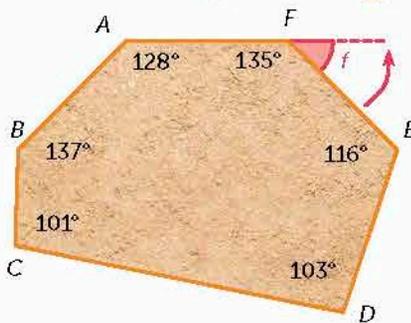
- a) ¿Cuántos ángulos exteriores tiene el polígono?
- b) Dibuja con color rojo un ángulo interior del polígono. ¿Cuántos tendrá en total?
- c) ¿Cómo se puede saber el número de lados del polígono a partir de la información que da el plano?



❖ Compara tus respuestas con las de algún compañero. ¿Existen diversos procedimientos para conocer el número de lados de un polígono regular si se conoce la medida del ángulo exterior?

Recorremos

Ángulos interiores, exteriores y centrales



1. Resuelvan en parejas el siguiente problema.

Se desea construir una puerta en un corral de forma irregular con seis lados. La abertura de la puerta, ubicada en uno de ellos, debe ser tal que ésta quede alineada al lado adyacente en el que se apoya. El hexágono irregular $ABCDEF$ muestra la representación del corral, con la medida de los ángulos interiores y la abertura de la puerta si ésta se localizara en el lado EF .

- a) Dibujen la abertura que tendría la puerta si se colocara en los otros lados.

- b) Si se requiere que la puerta tenga la mayor abertura posible, ¿en qué lado conviene colocarla? _____
- c) ¿Cuánto suman la medida del $\angle AFE$ y la medida del $\angle f$? _____
- d) Escojan cualquier ángulo interior y calculen la suma de su valor y el valor del ángulo de la abertura de la puerta correspondiente. ¿Cuánto vale dicha suma?

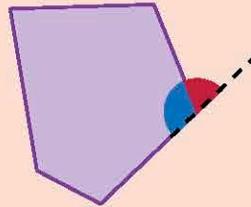
- e) ¿Cómo podrían conocer la abertura de la puerta sin utilizar transportador?

❖ Comparen sus respuestas con sus compañeros. ¿Observaron las mismas relaciones entre los ángulos? ¿Qué contenidos de los temas estudiados en primer grado de secundaria utilizaron para resolver el problema?



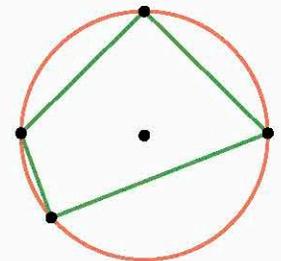
El **ángulo exterior** de un polígono es el ángulo formado por un lado del polígono y la prolongación del lado adyacente.

En cualquier polígono la suma de un ángulo interior y su exterior correspondiente es 180° .

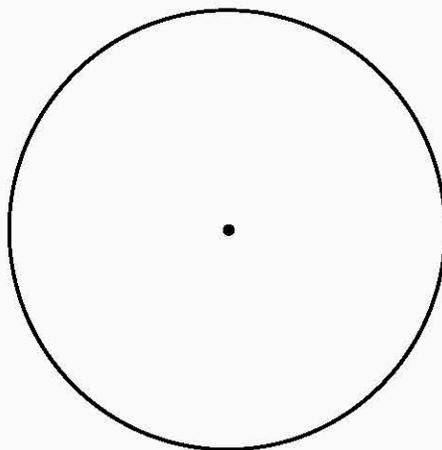


Glosario

polígono inscrito. Un polígono está inscrito en una circunferencia si cada uno de sus vértices coincide con un punto de la circunferencia.



2. Traza, utilizando tu juego de geometría, un polígono irregular de seis lados **inscrito** en la siguiente circunferencia.

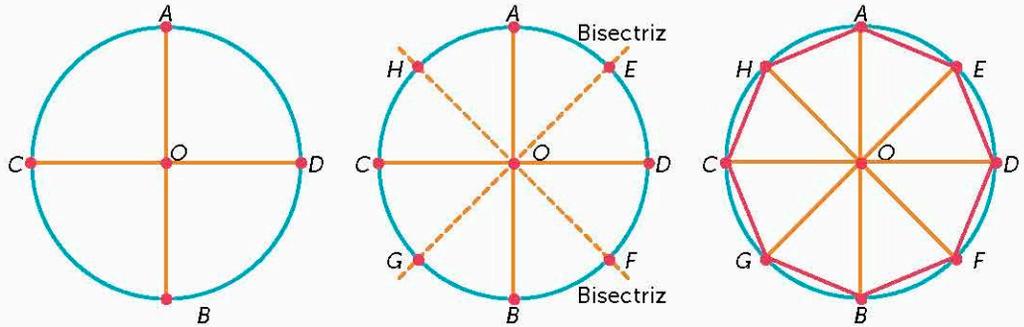


- a) Explica qué procedimiento utilizaste para trazarlo. _____

- b) Traza todos los ángulos que van del centro de la circunferencia a los vértices del polígono (ángulos centrales). ¿Cuánto mide la suma de éstos? _____
- c) ¿Los ángulos centrales son iguales? Explica tu respuesta. _____

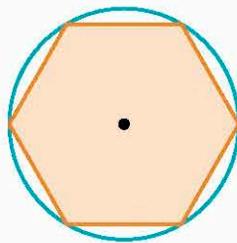
3. Analicen en parejas las imágenes y contesten.

a) Octavio trazó un polígono regular inscrito en una circunferencia, siguiendo el procedimiento que se muestra. ¿Qué polígono trazó? _____

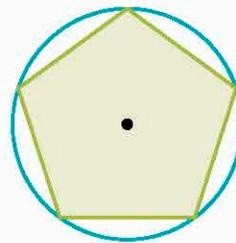


- ¿En cuántas partes quedó dividido el ángulo completo en O? _____
- ¿Cuánto mide el $\angle DOA$? _____ ¿Y el $\angle COD$? _____
- ¿Cuánto mide el $\angle DOE$? Expliquen. _____
- ¿Cuánto mide cada uno de los ángulos centrales con vértice en O? _____
- ¿Cuánto mide la suma de todos los ángulos con vértice en O? _____
- ¿Cómo pueden saber cuánto mide cada uno de los ángulos con vértice en O del octágono a partir del ángulo completo en O? _____

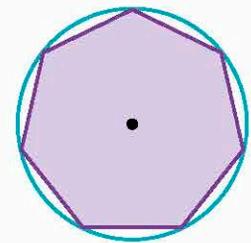
b) Señalen un ángulo central e indiquen su medida en cada uno de los siguientes polígonos regulares.



Ángulo central: _____



Ángulo central: _____



Ángulo central: _____

❖ En grupo discutan la relación entre la medida del ángulo central de un polígono regular y el número de lados de éste.



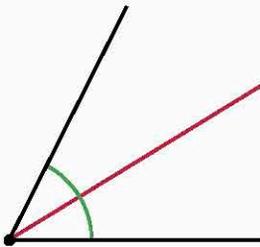
El **ángulo central** de un polígono está formado por dos radios que unen el centro del polígono (el cual coincide con el centro de la circunferencia que lo inscribe) y dos vértices consecutivos del mismo.

Si el polígono es regular, todos los ángulos centrales son iguales y miden $\frac{360^\circ}{n}$, donde n es el número de lados del polígono.

Recuerda



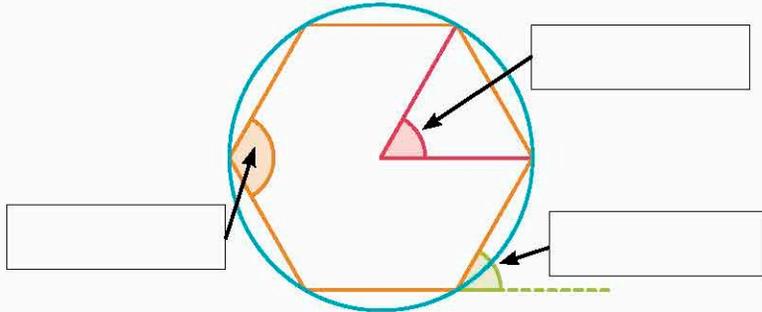
La bisectriz de un ángulo es la recta que lo divide en dos partes iguales.





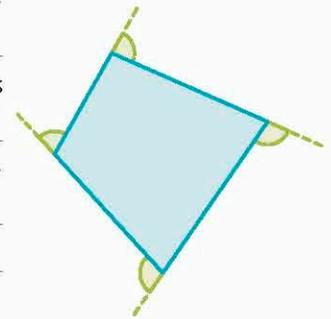
Integración

- A manera de resumen, escribe el nombre de cada ángulo que se señala en el siguiente polígono.

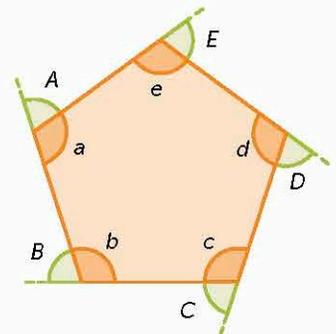


Suma de ángulos exteriores de un polígono convexo

- Traza el ángulo interior correspondiente a cada ángulo exterior que se ha marcado en el cuadrilátero de la derecha.
 - ¿Cuánto vale la suma de un ángulo interior con su ángulo exterior correspondiente? _____
 - ¿Cuánto se obtiene al sumar todos los pares de ángulos interiores y exteriores marcados? _____
 - Si a la suma de todos los ángulos marcados le restas el valor de todos los ángulos interiores, ¿qué representa la cantidad que obtienes? _____
 - ¿Cuánto suman los ángulos interiores de un cuadrilátero?
Explica tu respuesta. _____
 - ¿Cuánto vale la suma de los ángulos exteriores de un cuadrilátero?
Explica tu respuesta. _____



- Reúnete con un compañero y realicen lo que se indica.
En el siguiente pentágono regular se denotó cada ángulo interior mediante una letra minúscula y, el ángulo exterior correspondiente, con la misma letra en mayúscula.
 - Escriban una expresión algebraica que represente la suma de los ángulos exteriores. _____
 - Como los ángulos que tienen las mismas letras son suplementarios entonces:
 $A = 180^\circ - \underline{\hspace{2cm}}$ $\underline{\hspace{2cm}} = 180^\circ - \underline{\hspace{2cm}}$
 $\underline{\hspace{2cm}} = 180^\circ - \underline{\hspace{2cm}}$ $\underline{\hspace{2cm}} = 180^\circ - \underline{\hspace{2cm}}$
 $\underline{\hspace{2cm}} = 180^\circ - \underline{\hspace{2cm}}$
 - ¿Cuánto suman los ángulos interiores del pentágono?



- d) Escriban una expresión algebraica que represente la suma de los ángulos interiores del pentágono. _____
- e) Completen las igualdades.
- $$A + B + C + D + E = (180^\circ - a) + (\text{_____} - \text{_____}) + (\text{_____} - \text{_____})$$
- $$+ (\text{_____} - \text{_____}) + (\text{_____} - \text{_____})$$
- $$A + B + C + D + E = 180^\circ + \text{_____} + \text{_____} + \text{_____} + \text{_____} - a - b$$
- $$- \text{_____} - \text{_____} - \text{_____}$$
- $$A + B + C + D + E = \text{_____} (180^\circ) - (a + b + \text{_____} + \text{_____} + \text{_____})$$
- $$A + B + C + D + E = (\text{_____}) - (540^\circ)$$
- f) ¿Cuánto vale la suma de los ángulos exteriores del pentágono? _____

6. Consideren un octágono regular A y un hexágono irregular B .
- a) ¿Cuánto vale la suma de los ángulos interiores de A ? _____
- b) ¿Y la suma de los ángulos interiores de B ? _____
- c) Si se suman todos los ángulos interiores y exteriores de A , ¿cuántas veces se suma 180° ? _____ ¿A cuántos grados equivale? _____
- d) Si se suman todos los ángulos interiores y exteriores de B , ¿cuántas veces se suma 180° ? _____ ¿A cuántos grados equivale? _____
- e) Expresa por medio de una operación cuánto vale la suma de los ángulos exteriores de A y cuánto los de B .
- _____
- f) ¿Cuánto vale la suma de los ángulos exteriores de A y de B ? _____

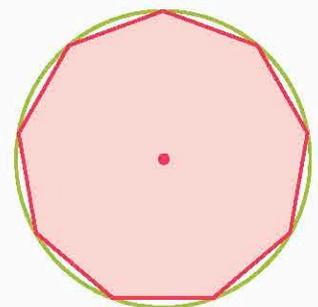
❖ Comparen sus respuestas con las de otra pareja. Discutan si el procedimiento depende del número de lados que tiene el polígono o si depende de que el polígono sea regular o irregular.



La suma de los ángulos exteriores de cualquier polígono convexo es 360° .

Relaciones entre los ángulos centrales, interiores y exteriores de un polígono regular

7. Considera el siguiente eneágono regular.
- Traza un ángulo interior y un ángulo central y denótalos como a y b , respectivamente.
- a) ¿Todos los ángulos interiores son iguales al ángulo a ? Explica tu respuesta.



- b) ¿Todos los ángulos centrales son iguales al ángulo b ? Explica tu respuesta.

- c) ¿Cuánto mide b ? Explica tu respuesta. _____
- d) ¿Cuánto mide la suma de los ángulos interiores del eneágono? Explica tu respuesta. _____
- e) ¿Cuánto mide a ? Explica tu respuesta. _____
- f) ¿Cuánto vale la suma de un ángulo interior y un ángulo central del eneágono?

8. Reúnete con un compañero. Consideren un polígono regular de n lados.
- a) Escriban una expresión algebraica que indique el valor de la suma de sus ángulos interiores. _____
 - b) Escriban una expresión algebraica que indique el valor de un ángulo interior.

 - c) Escriban una expresión algebraica que indique el valor de un ángulo central del polígono. _____
 - d) Sumen las expresiones que obtuvieron en los incisos b) y c) y simplifiquen.

$$\text{_____} + \text{_____} = \text{_____}$$

$$\text{_____} + \text{_____} = \text{_____}$$

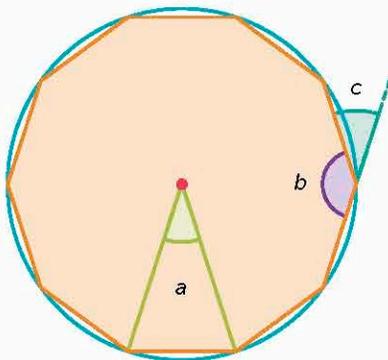
$$\text{_____} + \text{_____} = \text{_____}$$

❖ Con el resto del grupo establezcan una conclusión acerca de cuánto suman un ángulo central y un ángulo interior en un polígono regular de n lados.

© Todos los derechos reservados; Ediciones Castillo, S. A. de C.V.

i Integración

- Contesten de forma grupal.
 - a) ¿Cuántos grados miden los ángulos marcados en el polígono?



$\sphericalangle a$: _____

$\sphericalangle b$: _____

$\sphericalangle c$: _____



Aprendemos

Reflexiona: en los temas geométricos, ¿cómo te pueden ayudar los dibujos y las representaciones gráficas para resolver un problema?

b) ¿Qué relación existe entre el ángulo a y el ángulo c ? _____

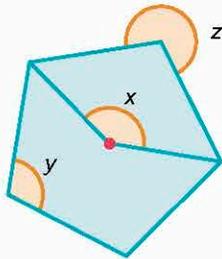
c) ¿La relación anterior se cumple en cualquier polígono regular? Argumenten.

d) Escriban con sus propias palabras la relación que existe entre el ángulo central y el ángulo exterior de un polígono regular. _____

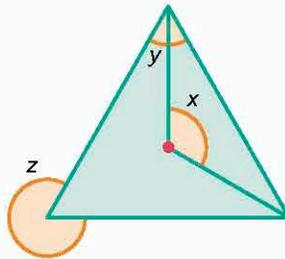


En un polígono regular los ángulos centrales y los ángulos exteriores son iguales.

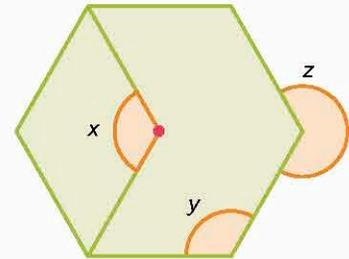
9. Encuentren en equipo, en cada uno de los polígonos regulares, las medidas de los ángulos indicados. Justifiquen sus respuestas oralmente.



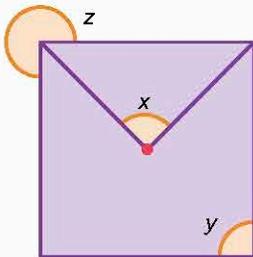
$x =$ _____
 $y =$ _____
 $z =$ _____



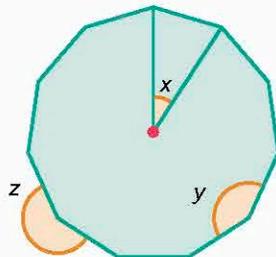
$x =$ _____
 $y =$ _____
 $z =$ _____



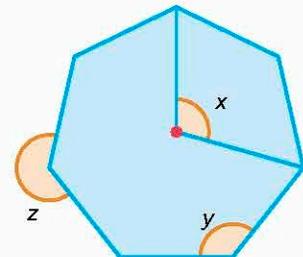
$x =$ _____
 $y =$ _____
 $z =$ _____



$x =$ _____
 $y =$ _____
 $z =$ _____



$x =$ _____
 $y =$ _____
 $z =$ _____



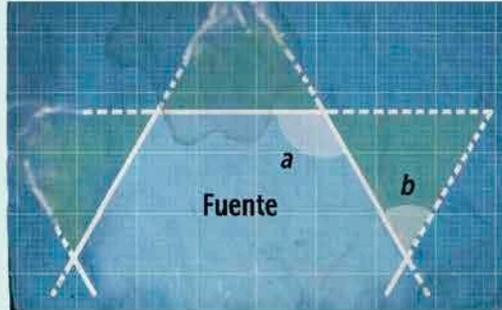
$x =$ _____
 $y =$ _____
 $z =$ _____

❖ Además de lo estudiado en la secuencia, recuerden las características de los polígonos regulares. Utilicen esa información para justificar sus argumentos sobre como obtuvieron los valores numéricos de los ángulos.

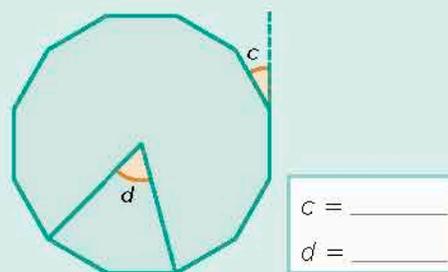
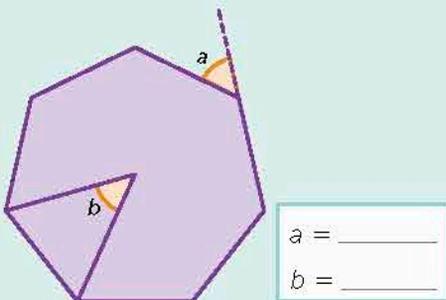
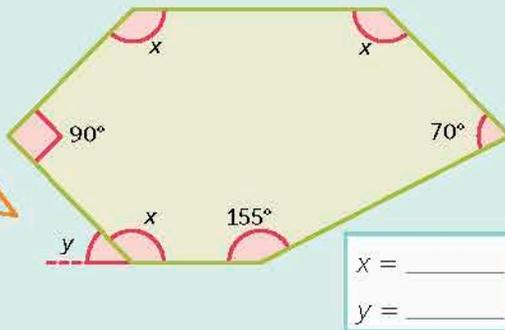
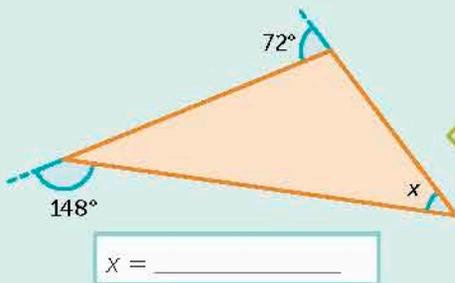


1. Retoma el problema al inicio de la secuencia y contesta.

En el plano arquitectónico también se aprecia que la fuente central del parque tendrá forma de hexágono regular, con jardineras en cada lado. ¿Cuánto miden los ángulos a y b ?



2. Encuentra en cada polígono el valor de los ángulos señalados con letras.



3. Escribe el nombre del polígono al que se refiere cada descripción.

- a) Polígono regular cuyo ángulo central mide 45° .
- b) Polígono regular cuyo ángulo exterior mide 72° .
- c) Polígono regular cuyo ángulo exterior mide el doble que su ángulo interior correspondiente.
- d) Polígono cuya suma de ángulos interiores es igual a la suma de sus ángulos exteriores.
- e) Polígono regular cuyo ángulo exterior mide $\frac{360^\circ}{n}$.
- f) Polígono cuya suma de ángulos exteriores es 360° .

◆ Compara tus respuestas con las de tus compañeros.



Resuelve los ejercicios en el siguiente enlace www.edutics.mx/Unj para practicar lo estudiado en esta secuencia.

Múltiplos y submúltiplos del metro, litro y kilogramo

Resuelve problemas que implican conversiones en múltiplos y submúltiplos del metro, litro y kilogramo.

Partimos

Glosario

magnitud. Propiedad de los cuerpos que puede ser medida, como por ejemplo, la masa o la longitud.

En primaria aprendiste a estimar, comparar y ordenar longitudes y distancias, capacidades y masas por medio de unidades convencionales como el metro, el litro, el kilogramo (así como medios y cuartos de estas unidades), el centímetro, el milímetro, el mililitro y el gramo. En esta secuencia formularás estrategias para convertir unidades de medida para una misma **magnitud**.

1. Analiza la información y responde.

En promedio una persona debe tomar dos litros de agua al día. En ocasiones, para señalar la cantidad de agua consumida se contabiliza en número de vasos. El equivalente a medio litro de agua en vasos se muestra en la siguiente figura.



- ¿A cuántos mililitros equivale un litro?
- Si una persona al cumplir 15 años, por prescripción médica, inicia el hábito de tomar dos litros de agua diariamente y vive 85 años, ¿cuántos vasos de 250 mL habrá tomado en ese tiempo?

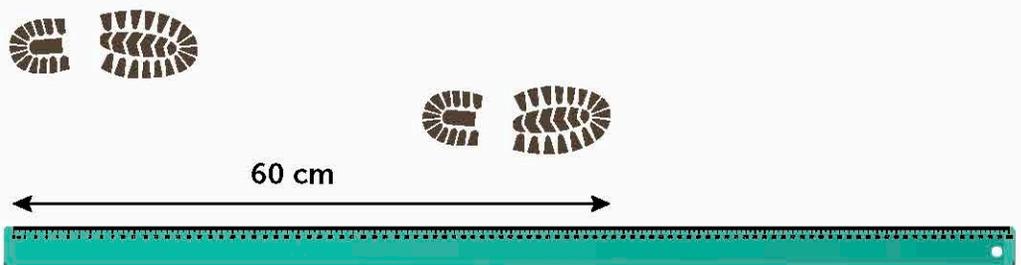
✚ Reúnete con tus compañeros. Cada uno explique cómo entendieron y resolvieron el problema. Para calcular, ¿consideraron 85 o 70 años? ¿Por qué?

Recorremos

Unidades de longitud

1. Resuelve el siguiente problema.

Gracias a una aplicación del celular de su papá, Esther sabe que para ir de la escuela a su casa la distancia es un kilómetro. Ella quiere saber cuántos pasos camina; para ello, marca en el suelo una de sus huellas y la mide con una regla de madera de un metro.



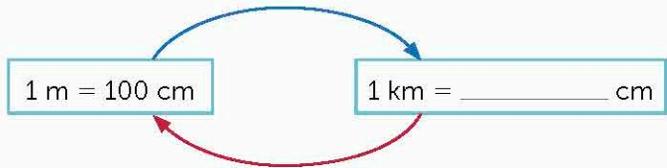
Somos

Valora: ¿cuál es la importancia de tener hábitos saludables como tomar agua y realizar alguna actividad física?

a) ¿Aproximadamente cuántos pasos da Esther de su casa a la escuela?

b) Esther observa en la regla de madera que en un metro hay 100 cm y encontró en internet que un kilómetro es mil veces la longitud de un metro.

- ¿Cuántos metros hay en un kilómetro? _____
- ¿Cuántos centímetros hay en un kilómetro? Describe cómo lo calculaste.



- ¿Qué fracción de un metro es un centímetro? _____
- ¿Qué fracción de un kilómetro es un centímetro? Explica. _____

c) ¿Cómo utilizarías lo anterior para calcular los pasos que camina Esther?

❖ Compara tus respuestas con las de tus compañeros. ¿Cómo calcularon la cantidad de pasos? ¿La respuesta fue un número exacto? ¿Cómo lo interpretan?



El metro es una unidad para medir longitudes. A partir de él se derivan otras unidades, tanto mayores (**múltiplos**) como menores (**submúltiplos**).

Los nombres de estas unidades están formados por los prefijos griegos seguidos de la palabra metro. Los valores de algunos prefijos son los siguientes:

- | | |
|-------------------|----------------------------|
| deca: diez veces | deci: una décima parte |
| hecto: cien veces | centi: una centésima parte |
| kilo: mil veces | mili: una milésima parte |

Con estos mismos prefijos es posible formar los múltiplos y submúltiplos de las unidades de medida de cualquier magnitud.



Glosario

múltiplo. Número que contiene una cantidad exacta de veces a otro.
submúltiplo. Número contenido en otro cierta cantidad de veces de manera exacta.

2. Con base en la información anterior, completen en equipos la siguiente tabla y contesten.

Prefijo	kilo	hecto	deca	unidad	deci	centi	mili
Símbolo	km	hm	dam	m	dm	cm	mm
Valor	1000			1	$\frac{1}{10} = 0.1$		

- a) ¿Cuántas veces contiene la unidad base a la correspondiente del prefijo *deci*?

- b) ¿Cuántas veces contiene un hectómetro a un metro? ¿Es múltiplo o submúltiplo de la unidad? _____
- c) ¿Cuántas veces contiene 1 km a 1 hm? Expliquen su razonamiento.

- d) Tomando como referencia un múltiplo o submúltiplo, ¿cuál es la relación entre el valor de la referencia y el siguiente a la derecha? _____
- e) ¿Cuál es la relación entre el valor de la referencia y el siguiente a la izquierda? _____

❖ Comparen sus respuestas con otros equipos. ¿Qué relaciones encuentran entre los múltiplos y submúltiplos? Analicen: ¿es posible decir que un hectómetro es a la vez un múltiplo del metro y un submúltiplo del kilómetro? ¿Por qué?

3. Resuelvan en parejas el siguiente problema.

Esther se ha entusiasmado con la idea de practicar la caminata y participa en una carrera de 5 km. Si Esther ha recorrido 500 m, ¿cuántos metros le falta por recorrer? _____

- a) ¿A cuántos pasos suyos equivale la distancia que le falta?

❖ Comparen sus respuestas y procedimientos con otras parejas.



Integración

- Trabaja con un compañero e inventen un problema en los que sea necesario realizar conversiones de unidades de longitud.

- Intercambien con otra pareja el problema que plantearon y resuelvan el que les den.



Unidades de masa

4. Lee la situación y contesta.

Alan necesita 3 kg de piloncillo. En la tienda venden tanto bolsas con 5 piezas como piezas sueltas.

- a) ¿Cuántos gramos tiene cada pieza de piloncillo? _____

- b) Considera la información de la página 69 y completa la tabla. Incluye los símbolos de las unidades, múltiplos y submúltiplos.

Múltiplos			Unidad	Submúltiplos		
kilogramos	hectogramos	decagramos	gramos	decigramos	centigramos	
3 kg						3 000 000 mg

- c) Si Alan pide 2 bolsas, ¿cuánto le falta? _____

- d) Con base en la tabla anterior, contesta.

- ¿Qué operación realizaste para convertir gramos a decagramos?

- ¿Qué operación realizaste para convertir gramos a decigramos?

- e) Para completar los 3 kg que necesita, Alan compró algunos piloncillos sueltos. Al colocarlos en la báscula pesaron 8.8 hg. ¿Cuántas piezas compró?

- ❖ Con tus compañeros explica las analogías entre la conversión de múltiplos y submúltiplos de las unidades de masa y longitud. Analicen las regularidades y traten de establecer una estrategia.



La unidad de masa convencional no es el gramo sino el kilogramo; es la única cuyo nombre contiene un prefijo (kilo).

Sin embargo, los nombres y los símbolos de los múltiplos y submúltiplos decimales de la unidad de masa se forman añadiendo los nombres de los prefijos a la palabra "gramo" y los símbolos de estos prefijos al símbolo de la unidad "g". Por ejemplo para un decigramo el símbolo usado es dg.

Unidades de capacidad

5. Lean y contesten en parejas.

- a) Los bancos de sangre colectan a través de sus donadores unidades con 450 mL de sangre cada una. Cada persona puede donar hasta una unidad de sangre cada vez. Supongan que en una campaña anual se espera juntar 60 hL de sangre y se acepta la sangre de 14 700 personas.

- ¿Cuántas unidades de sangre se espera juntar? Expliquen su razonamiento.

- ¿Cuántas unidades se podrán juntar? _____

- ¿La campaña logra colectar lo que tenían estimado? _____

- ¿Cuál es la diferencia entre la meta y lo colectado? _____

- ¿A cuántos litros equivale? _____



b) Escriban los múltiplos y submúltiplos del litro con sus equivalencias. Consideren la siguiente información.



Como en el caso del metro y el kilogramo, diez unidades de medida de capacidad iguales equivalen a la unidad inmediatamente mayor.

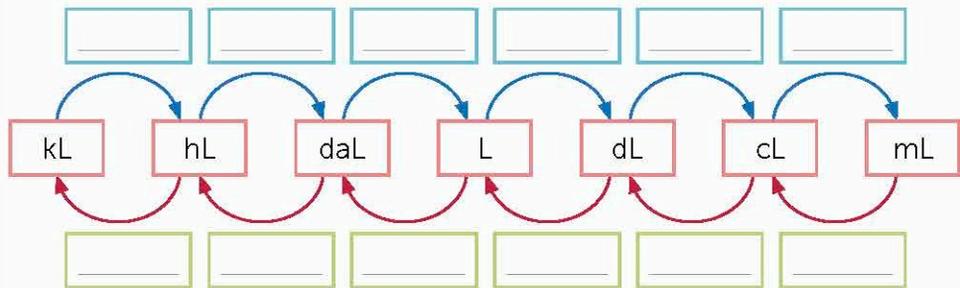
Unidad de capacidad					
1 L					
Múltiplos			Submúltiplos		
Nombre	Símbolo	Equivalencia	Nombre	Símbolo	Equivalencia
decalitro	daL			dL	
hectolitro			centilitro		
		1 000 L	mililitro		0.001 L

❖ Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Si lo consideran adecuado, hagan tablas semejantes a la anterior para los múltiplos y submúltiplos del metro y el kilogramo.



Integración

• Determina las operaciones que es necesario realizar para convertir una unidad en otra. Escríbelas en los espacios del siguiente gráfico.



a) ¿Qué operación realizas para convertir una unidad en su submúltiplo siguiente?

b) ¿Qué operación realizas para convertir una unidad en su múltiplo siguiente?

❖ Con el resto del grupo analiza si la estrategia anterior resume también cómo hacer conversiones en múltiplos y submúltiplos del metro y kilogramo.

Más conversiones

6. Resuelvan en equipos los siguientes problemas.
a) Contesten a partir de la siguiente información.

Rosca de reyes 2018 Ciudad de México

La tradicional Rosca de Reyes que se partió en el zócalo de la Ciudad de México en enero de 2018 midió 1.44 km de longitud con una masa aproximada de 8 toneladas. Para su elaboración se utilizaron 5 720 kg de harina, 961 L de leche, 2 000 kg de azúcar, 3 010 kg de mantequilla, 651 L de vainilla, entre otros y se repartieron 250 000 porciones. Cabe aclarar que para este fin el pan en realidad no tiene forma de rosca sino de un gran rectángulo con un ancho de 90 cm, aproximadamente.

"Celebra CDMX día de reyes 2018 con mega rosca en zócalo capitalino" en *Boletín CDMX*, 5 de enero de 2018, www.cdmx.gob.mx/comunicacion/nota/celebra-cdmx-dia-de-reyes-2018-con-mega-rosca-en-zocalo-capitalino# (consulta: 18 de mayo de 2018).

- Suponiendo que se hicieron tres cortes **longitudinales** iguales a la rosca, es decir, a lo largo del pan rectangular como se observa en la figura; ¿cuántos metros en total medían las cuatro partes al colocarse una tras otra? Expliquen su razonamiento. _____
 - Si también se repartieron porciones iguales, ¿cuántos centímetros le tocó a cada asistente? _____
 - ¿Cuál fue la masa, en gramos, de cada porción si una tonelada equivale a 1 000 kilogramos? Describan su procedimiento. _____
 - ¿Cuántos bultos de 400 hg de harina se utilizaron? _____
 - ¿Cuántos bultos de 500 hg de azúcar se utilizaron? _____
 - ¿Cuántos paquetes de 250 g de mantequilla se usaron? _____
- b) Federico se desplazará en caballo de su comunidad a la cabecera municipal, la cual se encuentra a 45 hm de distancia. La velocidad promedio de trote es de 250 m por minuto. Si consideras el tiempo total en el que va y regresa, ¿cuánto tiempo tardará? _____
- c) Una cisterna de 7 500 litros de capacidad se llena a razón de 250 mililitros por cada segundo. ¿En cuanto tiempo se llenará la cisterna en su totalidad? Expresen su respuesta en segundos y horas. _____

- ❖ Comparen sus respuestas con otros equipos. Expliquen cómo interpretaron la información para resolver cada problema. ¿Qué hicieron para expresar la respuesta del último inciso?



Glosario

longitudinal. Que sigue el sentido o dirección de la longitud de lo que se expresa.



7. Realiza las siguientes conversiones

4.5 kg = _____ mg

7 500 mL = _____ L

2 350 mL = _____ kL

0.005 m = _____ mm

7.853 kg = _____ dg

1.26 cm = _____ dam

8.3204 dam = _____ m

7 500 dg = _____ cg

Explora



En la siguiente página www.edutics.mx/Uhs podrás resolver problemas de conversión unidades de medida.

El metro, el kilogramo y el segundo son unidades básicas que pertenecen al Sistema Internacional de Unidades, el cual en realidad tiene siete magnitudes básicas con sus respectivas unidades: para la longitud, el metro (m); para la masa, el kilogramo (kg); para el tiempo, el segundo (s); para la corriente eléctrica, el amperio (A); para la temperatura, el kelvin (K); para la cantidad de sustancia, el mol (mol); y para la intensidad luminosa, la candela (cd). Las últimas cuatro magnitudes con sus unidades las estudiarás en tus cursos de Física y Química.

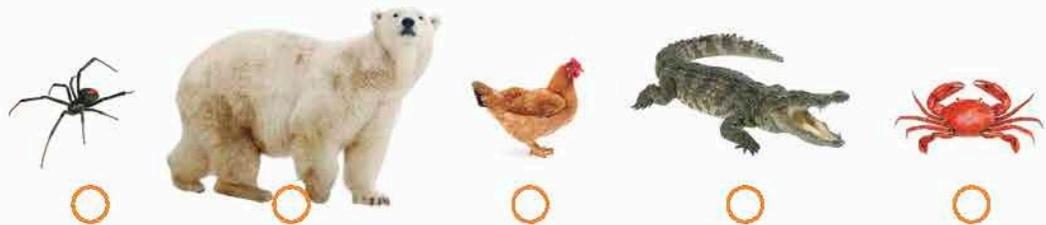
Por cuestiones prácticas, a veces es necesario usar múltiplos o submúltiplos de unidades del Sistema Internacional (SI). Por ejemplo, para medir el líquido de una inyección se utiliza un submúltiplo del litro o para la distancia entre un continente y otro un múltiplo del metro. Los prefijos se añaden a cualquier unidad del Sistema Internacional para escribir un múltiplo o submúltiplo de ésta.

8. Resuelvan en grupo.

- a) Se muestra la velocidad máxima con la que se mueven algunos seres vivos.

	Araña	Cangrejo	Cocodrilo	Oso polar	Gallina
Velocidad máxima	4.1 m/s	330 cm/s	0.0347 km/s	0.00277 km/s	566 cm/s
Velocidad máxima (m/s)					

- Completen la tabla convirtiendo la velocidad de cada animal a metros por segundo. Describan su procedimiento. _____
- ¿Cuál se desplaza con mayor rapidez? Ordenen las imágenes considerando la velocidad de cada uno? _____



- Comparen sus respuestas y estrategias de solución. Analicen y hagan una puesta en común sobre los procesos más sencillos y los más efectivos.

1. Considera nuevamente el problema al inicio de la secuencia. En lugar de vasos considera el siguiente recipiente y la cantidad de agua que habría tomado la misma persona en 70 años.



- a) ¿Cuántos garrafones de 2 daL habrá bebido?
- b) ¿Cuál es la medida del garrafón de 2 daL en litros?
- c) ¿Cuántas pipas de 10 kL habrá bebido la misma persona?

2. Resuelve los problemas.

- a) Una gota de agua de la llave tiene el volumen aproximado que se muestra en la imagen. Supongamos que una llave con fuga deja caer 20 gotas por minuto.
 - ¿Cuántos mL de agua se desperdicia por minuto?
 - ¿Cuántos litros de agua se desperdiciarán durante un día completo?



- b) La pirámide de Louvre (figura 8.1) es una estructura muy famosa ubicada en el patio del museo que lleva el mismo nombre. Su altura es de 21.65 metros, la longitud del lado de la base de la pirámide es de 35 metros. La masa total de la estructura es de 180 toneladas.
 - ¿Cuántos kilogramos tiene la estructura completa?
- c) Raúl quiere poner losetas de 30 cm × 30 cm en su habitación de 3 m × 4 m. ¿Cuántas losetas necesita?
- d) Una oruga avanza 15 mm por segundo sobre una jardinera que mide 3 m de largo. ¿Cuánto tiempo necesita para recorrer el largo de la jardinera?



Figura 8.1 Patio principal del Museo del Louvre, París, Francia.

3. Encierra con un mismo color las cantidades equivalentes.

27 kg	2.7 dag	2.70 g	0.27 hg
2.7 mg	27 cg	0.27 g	27 hg
2.7 g	270 cg	0.27 kg	27 000 g
2.7 kg	270 g	0.27 cg	27 dg

- ◆ Evalúen de manera grupal las estrategias formuladas a lo largo de la lección. Asegúrense de comprender lo que el problema solicita.

El sistema inglés

Resuelve problemas que implican conversiones de unidades del sistema inglés (yarda, pulgada, galón, onza y libra).

Partimos

1. Resuelve el siguiente problema.

Christine es una turista extranjera que está solicitando ayuda para hacer sus compras en el mercado. Ella necesita comprar 6 libras de naranjas, 3 libras de manzanas.



- a) Si una libra equivale aproximadamente a medio kilo, ¿cuántos kilogramos de manzanas y de naranjas le deben despachar respectivamente?
- b) ¿Cuánto tiene que pagar Christine?

✦ Discute con tus compañeros en qué contextos conviene hacer aproximaciones al realizar cálculos. ¿Todos obtuvieron la misma respuesta?

Recorremos

Unidades del sistema inglés

1. Analicen en parejas la información y contesten.

Tres amigos viajaron a California, EUA, para participar en una carrera de ciclismo.

La dinámica consistió en recorrer la mayor distancia en un tiempo determinado.

Laura: 12.5 mi, 370 yd y 58 ft Patricio: 12.3 mi, 400 yd y 175 ft

Marina: 12.4 mi, 300 yd y 200 ft

- a) Lean la siguiente información y calculen cuántas millas recorrió cada ciclista.

En los Estados Unidos de América las unidades para medir la longitud son la pulgada (in), el pie (ft), la yarda (yd) y la milla (mi).

Estas unidades se relacionan entre sí de la siguiente forma:

$$1 \text{ ft} = 12 \text{ in}$$

$$1 \text{ yd} = 3 \text{ ft}$$

$$1 \text{ mi} = 1760 \text{ yd}$$

Laura: _____ mi

Patricio: _____ mi

Marina: _____ mi

- b) ¿Cuál de ellos ganó? _____
- c) La masa aproximada de un casco de ciclista es de 9 onzas y la de una bicicleta, en libras, se muestra en la imagen de la báscula. Si una libra equivale a 16 onzas, ¿cuál es la masa total de ambos? _____

❖ Comparen sus respuestas con sus compañeros. Expliquen cómo hicieron las conversiones de unidades mayores a menores y viceversa. Al realizar estas operaciones, ¿hay una relación de proporcionalidad entre las unidades?



En el sistema inglés como en el Sistema Internacional también hay unidades específicas para la masa y la capacidad.

Masa: onza (oz) y libra (lb)

Capacidad: onza fluida (fl oz) y galón (gal)



Integración

- En equipo respondan. Consideren también lo estudiado en la secuencia anterior.
 - ¿Qué operación deben hacer para convertir una unidad menor en una mayor? _____
 - ¿Qué operación deben hacer para convertir una unidad mayor en una menor? _____
 - Con base en lo anterior, completen los diagramas.

15 yardas \longrightarrow pies

15 _____ 3 = 45 ft

4 400 yardas \longrightarrow millas

4 400 _____ 1 760 = 2.5 yd

Relaciones entre unidades de diferentes sistemas

2. Lee la situación y resuelve.

Antonio trabaja en una empaedora de arándanos que exporta sus productos. Hoy deben empaquetar el contenido de 60 cajas, cada una de 4 kg, en paquetes de 6 onzas y con ellos llenar otras cajas de 4.5 libras cada una.

- a) Considerando nuevamente que una libra equivale aproximadamente a medio kilogramo, estima cuántas cajas de 4.5 lb se llenarán. _____
- b) ¿Cuántos paquetes de 6 oz se completarán aproximadamente? _____

❖ Compara con un compañero tus respuestas y comenten: ¿en este contexto es suficiente hacer aproximaciones?



El sistema inglés, conocido también como sistema imperial, nació en el Reino Unido y se extendió a los países anglosajones, quedando actualmente Estados Unidos de América como uno de los pocos países que lo sigue utilizando.

Al utilizar medidas del sistema inglés muchas veces será necesario convertirlas al SI y para ello debes tomar en cuenta las siguientes equivalencias.

Notación



Para representar a las pulgadas y los pies también se utilizan las comillas; dos y una, respectivamente.
Por ejemplo:
2 pulgadas = 2"
5 pies = 5'

Medida	Unidad de medida	SI
Longitud	Milla (mi)	1.609 km
	Yarda (yd)	0.9144 m
	Pie (ft)	30.48 cm
	Pulgada (in)	2.54 cm
Masa	Libra (lb)	453.59 g
	Onza (oz)	28.35 g
Volumen	Galón (gal)	3.785 L
	Onzas fluidas (fl oz)	29.574 mL

3. Ya que Antonio no tiene una báscula en onzas, considera la información anterior y realiza los cálculos para obtener las cantidades reales del problema 2.

a) ¿Cuál es la masa que tendrá cada paquete en gramos? _____

b) ¿Cuántos paquetes saldrán al final del día? _____

c) ¿Cuántos paquetes llevará cada caja de 4.5 libras? Describe tu procedimiento.

d) Si únicamente se envían las cajas que cumplen con la masa requerida, ¿cuántas estarán listas para enviarse? _____

❖ Compara con un compañero tus respuestas y procedimientos. ¿Qué operaciones utilizaron para hacer las conversiones?

4. Completa las siguientes frases haciendo un cálculo mental para estimar las cantidades. Pues, si bien, no siempre recordaremos la equivalencia exacta de todas las unidades, hacer una estimación aproximada nos será útil para la vida.

a) 2 millas son aproximadamente _____ kilómetros.

b) $\frac{1}{2}$ kilogramo es un poco más que _____ libras.

c) 10 pulgadas son aproximadamente _____ centímetros.

d) 7 galones son un poco menos de _____ litros.

e) 7 gramos son aproximadamente _____ onzas.

f) 120 mL son un poco menos de _____ onzas líquidas.

Explora



En la siguiente página www.edutics.mx/Uhe encontrarás ejemplos y ejercicios de conversión entre unidades de longitud.





Hacemos

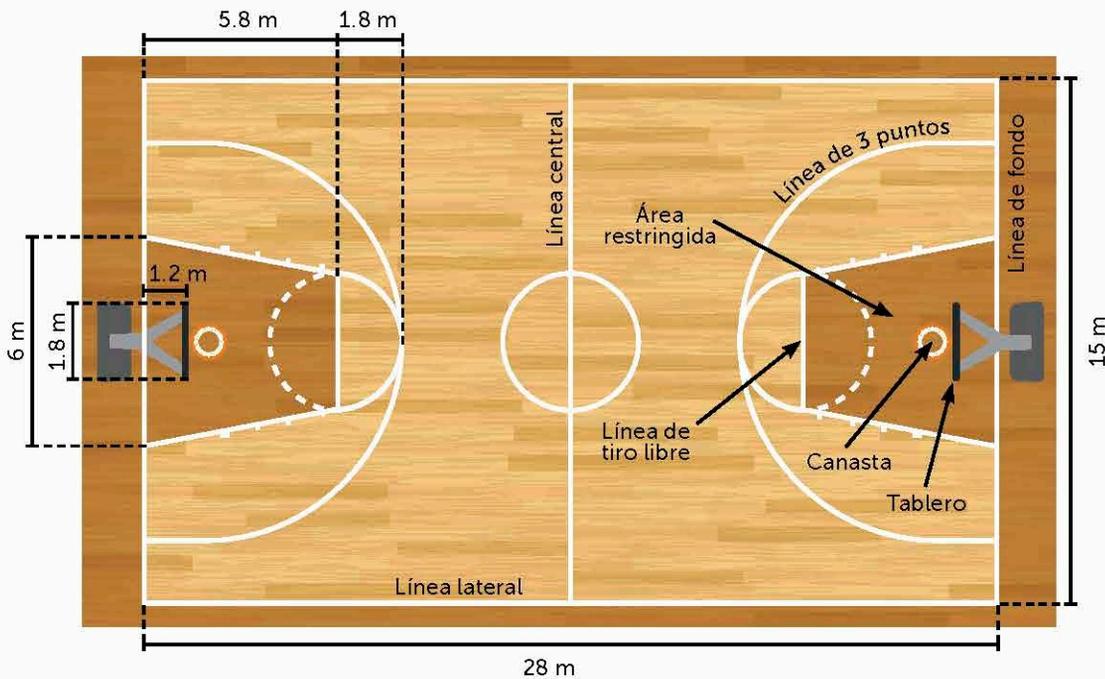
Organízate con tu grupo para medir la masa y la estatura de algunos compañeros. Conviertan esos datos a libras y pies, consideren también pulgadas.

5. Resuelvan en equipos los siguientes problemas.

a) Víctor trabaja medio tiempo en el rancho de los Garza alimentando a los animales. Uno de los terneros tiene moquillo y el veterinario le recetó un medicamento; la dosis que le debe suministrar es 2.5 onzas líquidas cada 24 horas por 7 días. Víctor cuenta únicamente con jeringas de 5 mL, 10 mL y 50 mL.

- ¿Cuántos mililitros debe suministrarle por día? _____
- ¿De qué manera puede combinar las jeringas para medir el medicamento cada día? _____
- Si el medicamento se vende en dos presentaciones una de 600 mL y otra de 800 mL, ¿cuál le conviene comprar? Expliquen su respuesta. _____

b) La cancha de basquetbol que se muestra a continuación tiene las medidas aceptadas por la National Basketball Association (NBA). Observen detenidamente la imagen y contesten.



- ¿Cuál es la medida de largo y ancho de la cancha expresada en pies? _____
- ¿Cuál es la medida del largo del tablero expresada en pulgadas? _____
- Expresen la distancia en yardas que hay desde la línea de tiro libre a la línea de fondo. _____
- ¿Cuál es la diferencia entre la medida del ancho de la cancha y el área restringida? Expresen el resultado en yardas. _____
- Obtengan la distancia que hay de la línea central a la línea de tiro libre expresada en pulgadas. _____

- ❖ Comparen sus respuestas y procedimientos. Si hay diferencias en el procedimiento, expliquen cómo lo resolvieron y lleguen a un acuerdo. Si hay diferencias en los cálculos, verifiquen sus resultados utilizando la calculadora.

Otras conversiones

6. Analicen y contesten en equipos.

- ¿Cómo convierten 250 onzas en gramos? _____
- ¿Existe una relación de proporcionalidad directa entre la cantidad de onzas y su equivalente en gramos? Si es así, ¿cuál es el factor o razón de proporcionalidad para convertir una unidad en otra y viceversa? _____
- David dice que para hacer conversiones de unidades basta con multiplicar por el factor de proporcionalidad expresado como razón.

$$250 \text{ oz} = 250 \text{ oz} \times \frac{28.35 \text{ g}}{1 \text{ oz}}$$

Además, como el numerador y denominador de esa razón son cantidades equivalentes, la razón representa una unidad; por lo que equivale a multiplicar por 1 la cantidad que se va a convertir. Efectúen la multiplicación.

$$250 \text{ oz} = 250 \text{ oz} \times \frac{28.35 \text{ g}}{1 \text{ oz}} = \frac{\text{oz} \times \text{g}}{\text{oz}} = \text{_____ g}$$

- ❖ Comparen sus respuestas. ¿Obtuvieron los mismos resultados en los incisos a) y c)? Expliquen por qué las unidades del denominador de la fracción unitaria fueron onzas. ¿Qué harían para convertir de gramos a onzas?



Integración

- De forma grupal utilicen el método de David para calcular el equivalente a 60 millas/hora en kilómetros/segundo.

a) Expliquen por qué para convertir millas a kilómetros es necesaria la fracción unitaria $\frac{1.609 \text{ km}}{1 \text{ mi}}$. _____

b) Expliquen por qué para convertir horas a segundos es necesaria la fracción unitaria $\frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}}$. _____

c) Completen la expresión y realicen los cálculos.

$$\frac{60 \text{ mi}}{1 \text{ h}} = \frac{60 \text{ mi}}{1 \text{ h}} \times \frac{\text{km}}{\text{mi}} \times \frac{\text{h}}{\text{s}}$$

$$\frac{60 \text{ mi}}{1 \text{ h}} = \text{_____} = 0.02 \text{ _____}$$

- ❖ Discutan cómo es posible saber cuáles son todas las fracciones unitarias requeridas para utilizar el método de David.

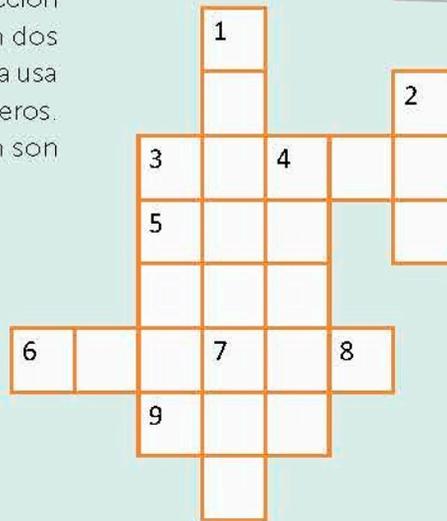


1. Analiza nuevamente el problema al inicio de la secuencia.

- Si además necesita un galón de leche, ¿cuántos litros debe comprar Christine?
- ¿Cuánto gastó en total?



2. Resuelve el siguiente crucigrama. Coloca la respuesta en la sección de instrucciones hasta con dos decimales y en el crucigrama usa solamente los números enteros. Los datos que se presentan son reales.



Horizontal

- _____ ft largo de una cancha de fútbol americano (109.73 m)
- _____ ft altura de la torre latinoamericana (204 m)
- _____ mi en total recorridas en el triatlón de los Juegos Olímpicos de Sidney 2000: natación, 1 500 m; ciclismo, 40 km; carrera, 10 km
- _____ mL en un café mediano de 12 fl oz

Vertical

- _____ yd de ancho de una cancha de fútbol americano (48.77 m)
- _____ cm de una pantalla de televisión de 43 in
- _____ fl oz de sangre en el cuerpo (5 litros aproximadamente)
- _____ g de masa de un paquete de arroz de 14 oz
- _____ lb de masa de un joven adulto de 72 kg
- _____ gal de agua que se gastan en producir 1 kg de brócoli (37 litros)

3. María quiere comprar un mueble nuevo para su casa. El espacio disponible para colocarlo es de 2.5 m \times 3.5 m. La etiqueta de la mesa señala que mide 2.5 yd \times 3.5 yd.

- ¿Cuáles son las medidas de la mesa en metros?
- ¿Cabrará el mueble en el espacio que tiene?

✚ Compara tus respuestas y explica tus procedimientos.

Histogramas y polígonos de frecuencia

Recolecta, registra y lee datos en histogramas y polígonos de frecuencia.

Partimos

Notación

Cuando los datos que se quieren mostrar en una gráfica se encuentran muy alejados del cero se utiliza una línea quebrada sobre el eje para acortarlo y así no tener que mostrar toda la escala. Este trazo recibe el nombre de línea de corte.

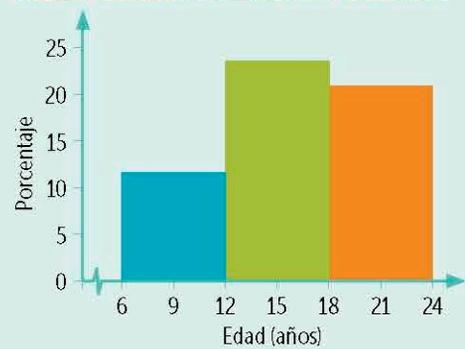
1. Observa las siguientes gráficas y contesta.

Gráfica 1
Población con acceso a internet en México (2016)



Fuente: ENDUTIH, Inegi, 2016

Gráfica 2
Porcentaje de personas que tienen acceso a internet de acuerdo a su edad



Fuente: ENDUTIH, Inegi, 2016

- ¿Qué porcentaje de los mexicanos no tiene acceso a internet?
- ¿Qué porcentaje de las personas entre 12 y 24 años tiene acceso a internet?

❖ Compara tus respuestas y procedimientos con los de tus compañeros. ¿Podrían decir qué porcentaje de los mexicanos mayores de 24 años tiene acceso a internet? Discutan las diferencias y similitudes entre las gráficas 1 y 2.

Recorremos

Histogramas

1. Analiza la situación y contesta.

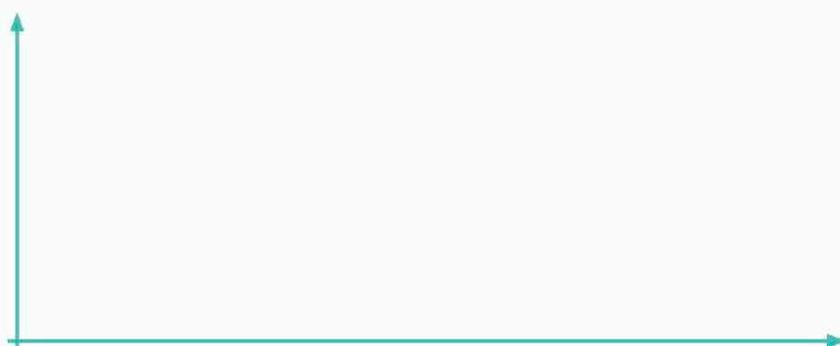
Héctor confecciona los uniformes escolares de una comunidad y para su próxima venta quiere ofrecer paquetes de descuento para cierto número de uniformes que sean adquiridos por una misma familia. Además, quiere saber las tallas de las que debería tener mayor cantidad. Para ello, recopiló la información sobre el número de hermanos de sus vecinos y sus respectivas estaturas en centímetros, como se muestra en la siguiente tabla.

	Estaturas (cm)			
	Hermano 1	Hermano 2	Hermano 3	Hermano 4
Juan	114	123	156	X
Laura	134	X	X	X
Patricia	105	117	126	158
Pedro	109	132	X	X

	Estaturas (cm)			
	Hermano 1	Hermano 2	Hermano 3	Hermano 4
Perla	156	158	X	X
Aurora	114	128	142	150
Ignacio	123	129	158	X
Julián	108	135	150	X
Marcela	105	118	X	X
Alfredo	145	X	X	X

Número de hermanos	Frecuencia
1	
2	
3	
4	

a) Construye una tabla de frecuencia y una gráfica de barras para mostrar el número de hermanos de los vecinos. Recuerda colocar los títulos de la gráfica y de los ejes.



b) Con la información de las estaturas, Héctor construyó una tabla en la que organizó los datos en **intervalos**. Completa la tabla de la derecha calculando el punto a la mitad del intervalo y la frecuencia de las estaturas.

c) Completa la siguiente gráfica a partir de los datos de la tabla.



Glosario

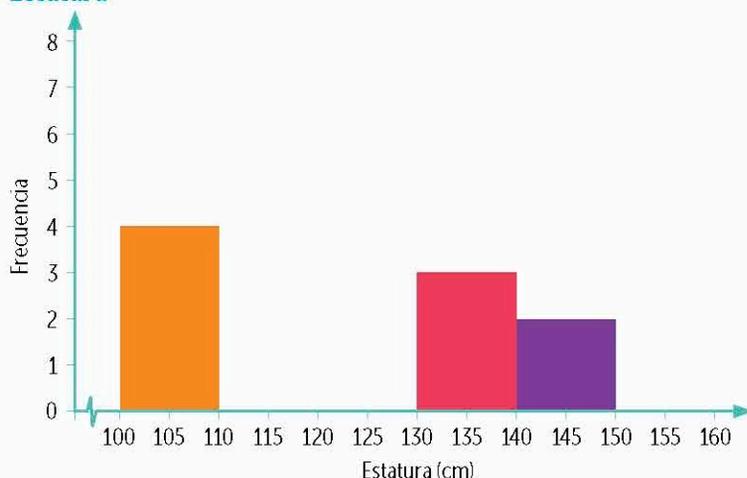
intervalo. Distancia entre dos valores. Cualquier intervalo se define por dos valores llamados límites de intervalo. Uno es el límite inferior y el otro el superior.



Notación

Al escribir un intervalo, por ejemplo, de 100 a 110 se escribe un guión entre los límites, 100 - 110. En este caso, se consideran los datos iguales o mayores que 100 y estrictamente menores que 110. De este modo no se traslapan los intervalos.

Estatura



Estaturas (cm)	Punto medio (cm)	Frecuencia
100 - 110		
110 - 120		
120 - 130		
130 - 140		
140 - 150		
150 - 160		

- ¿Cuántos intervalos hay? _____
- ¿El tamaño de los intervalos es el mismo en cada caso? ¿Cuánto mide cada uno? _____

d) ¿Qué diferencias hay entre la gráfica del número de hermanos y la de estaturas?

e) Explica por qué en la gráfica de las estaturas, a diferencia de la gráfica de la cantidad de hermanos, no hay espacio entre las barras. _____

- ❖ Compara tus respuestas y gráficas con las de tus compañeros. Discutan sobre las semejanzas y diferencias de las tablas y las gráficas. ¿En la tabla de frecuencia de la cantidad de hermanos los datos se pueden agrupar en intervalos? ¿Por qué? ¿Por qué las estaturas sí se pueden agrupar en intervalos?

Recuerda



El **rango** es la diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo de un conjunto de datos.

Hay variables como la estatura, la masa, la distancia o la temperatura, que son de tipo **continuo** porque entre dos valores cualesquiera siempre hay otro. Para presentar este tipo de información, en una tabla de frecuencia y en una gráfica, se utilizan **intervalos**.

Para determinar el número de intervalos necesarios se toma en cuenta la cantidad de datos que se tienen de la muestra o experimento. Normalmente para menos de 30 datos se usan 5 intervalos. Los intervalos tienen un límite inferior y un límite superior (en el primer intervalo de la tabla de las estaturas el límite inferior es 100 y el superior, 110). Para calcular la amplitud o tamaño de cada intervalo, se calcula el **rango** y se divide entre el número de intervalos. El punto medio de un intervalo se obtiene al calcular el promedio entre el límite inferior y el límite superior de dicho intervalo.

Minutos	Punto medio	Frecuencia

2. Reúnete con un compañero, lean y realicen lo que se pide.

En una fábrica textil cada dos horas pasan a recoger las prendas elaboradas para llevarlas al almacén. Sin embargo, con frecuencia solicitan que las recojan mucho antes de que transcurran 120 minutos, por lo que se desea saber después de cuántos minutos sería conveniente dar otra vuelta para recoger las prendas. Para ello se obtuvo el siguiente registro, en minutos, del tiempo transcurrido después de la última recolección y una nueva solicitud: 42, 56, 63, 65, 62, 46, 50, 57, 72, 82, 58, 52, 75, 65, 48, 53, 75, 66, 54 y 77.

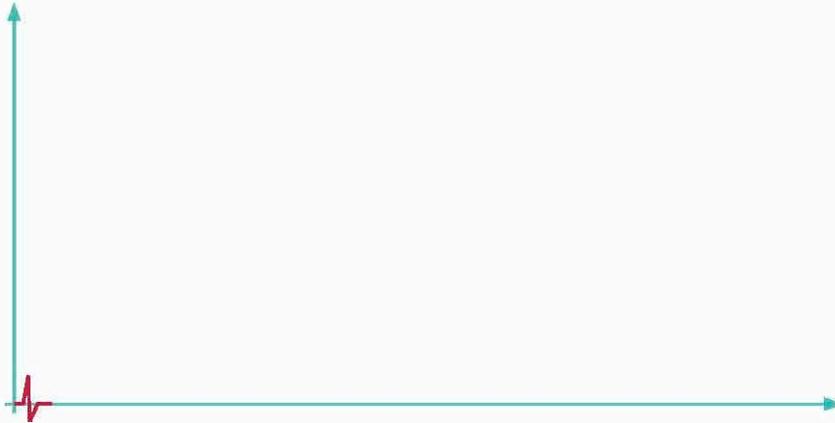
a) Completen la tabla de la izquierda agrupando los datos anteriores en cinco intervalos. Recuerden que deben ser del mismo tamaño y continuos como en la página 83.



Para presentar información de variables continuas se usan los **histogramas**. Un histograma se construye con barras sobre dos ejes perpendiculares. En el eje horizontal (abscisas) se colocan los intervalos indicando para cada uno el límite inferior, el punto medio y el límite superior; en el eje vertical (ordenadas) se utiliza una escala adecuada que indique la frecuencia de los datos en cuestión.



b) Construyan el histograma con la información de la tabla anterior.



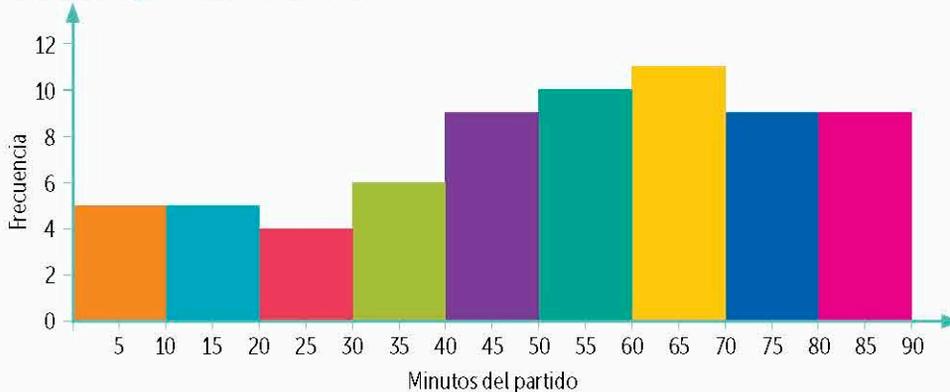
- ¿Cuál es el límite inferior y superior de todos los datos? _____
- ¿Cuál es el intervalo en el que sería conveniente recoger las prendas nuevamente? _____

❖ Comparen su tabla y su histograma con los de otras parejas. En caso de diferencias traten de analizar a qué se deben y corrijan en caso necesario.

3. Analicen en equipos cada situación y contesten.

a) Fernando construyó el siguiente histograma con los datos que recopiló de todos los partidos del torneo de futbol de su escuela. Registró en qué minuto de cada partido se anotaba un gol, pues tiene la idea de que es en el segundo tiempo donde hay mayor intensidad de juego.

Número de goles en cada minuto



- ¿En qué intervalo se anotaron más goles? ¿Y menos goles?

- Si en un partido de futbol cada tiempo dura 45 minutos, ¿cuándo se anotaron menos goles, en los primeros tiempos o en los segundos?

- ¿Cuántos goles se anotaron a partir del minuto 50? _____



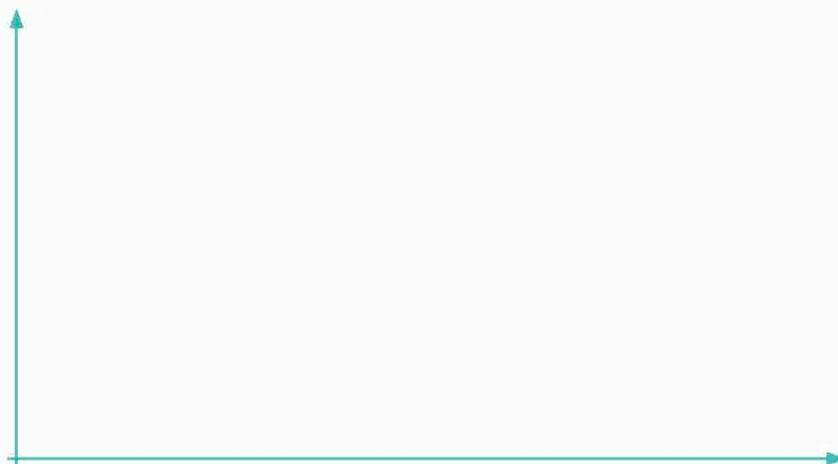
Explora

En la siguiente página www.edutics.mx/U7z podrás construir un histograma para un ejemplo concreto.

- ¿Es posible saber en qué minuto de los partidos se anotaron la mayor cantidad de goles? _____

- b) Luisa y María fueron a pescar en un lugar donde les aseguraban que la mayoría de las truchas eran de 1 kg; por lo que registraron la masa en gramos de cada una de las truchas que pescaron: 405, 876, 567, 925, 659, 620, 750, 228, 987, 860, 634, 790, 289, 495, 550, 489, 600, 480, 375, 200, 965, 1200, 680, 705, 810, 833, 710, 1100, 745, 850.
- Completen la tabla de frecuencias con cinco intervalos y construyan el histograma correspondiente.

Masa (g)	Punto medio (g)	Frecuencia



Explora



En los siguientes enlaces www.edutics.mx/U7K y www.edutics.mx/U7r podrás aprender dos formas de construir un histograma con ayuda de un *software* de geometría dinámica.

- ¿Cuál fue la masa máxima y mínima de las truchas que pescaron?

- ¿Cuál fue la masa más común de las truchas pescadas?

- ¿Atraparon bastantes truchas de más de 1 kg? Expliquen su respuesta.

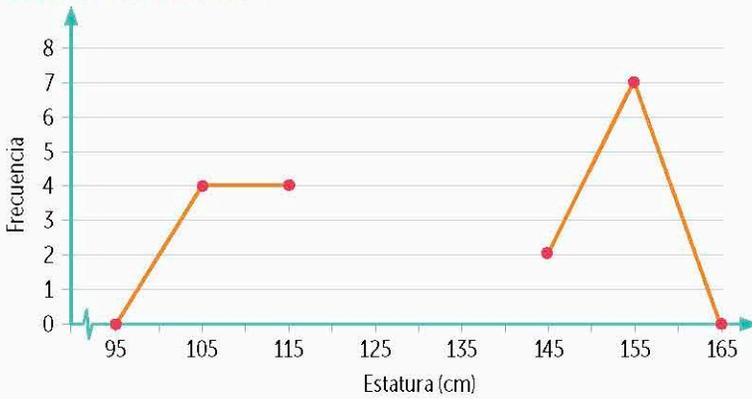
- ❖ Comparen con sus compañeros. ¿Cada uno de sus intervalos tiene los mismos límites y frecuencias?

Polígonos de frecuencia

4. Resuelvan en parejas.

- a) A partir de la tabla de frecuencias de la estatura de los hermanos (p. 83), Héctor construyó otra gráfica para representar los datos. Ubicó la frecuencia exactamente en los puntos medios de cada intervalo y luego unió los puntos mediante segmentos de recta. Ayúdenle a completar la gráfica.
- b) ¿Cuántos puntos hay en el eje horizontal a los que les corresponde un punto en la gráfica? _____

Estatura de hermanos



- c) ¿Coinciden con el número de intervalos? _____
- d) ¿Qué frecuencia corresponde a los puntos medios que no aparecen en la tabla de frecuencias de la página 83? _____
- e) Expliquen cómo se obtienen los puntos medios de los extremos de la gráfica.



La gráfica que acabas de construir es llamada **polígono de frecuencia**, la cual es otra forma de representar datos agrupados en intervalos.

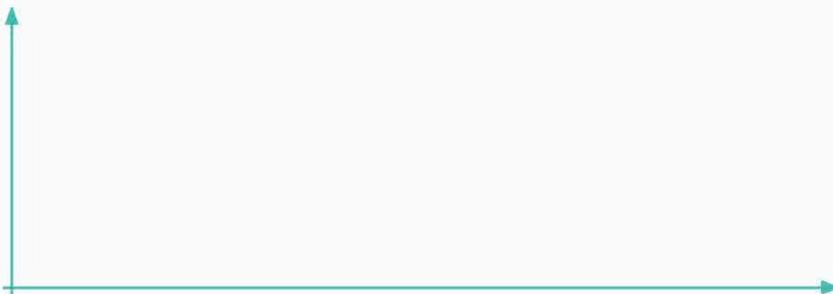
Un polígono de frecuencia se construye sobre dos ejes perpendiculares. En el eje horizontal (abscisas) se ubican los puntos medios de cada intervalo; en el eje vertical (ordenadas) se debe utilizar una escala adecuada para la frecuencia. Se localizan los puntos que tienen como coordenadas el punto medio de cada intervalo y su frecuencia respectiva. Además, se calcula el punto medio anterior al primer intervalo y posterior al último y se agregan al polígono de frecuencias los dos puntos asignándoles frecuencia 0. Es importante que el polígono de frecuencia inicie y termine en 0. Finalmente los puntos se unen con segmentos.



Explora

En siguiente enlace www.edutics.mx/U7H podrás aprender cómo construir un polígono de frecuencias a partir de un histograma.

- 5. Continúen trabajando en parejas. Consideren la tabla de frecuencias de la actividad 2 de la página 84 y construyan un polígono de frecuencia para presentar los datos.



- a) Comparen su gráfica con la de otra pareja. Si hay diferencias traten de llegar a un acuerdo.

b) ¿Cuántas veces se hizo una nueva solicitud en menos de 58 minutos?

c) Los empleados de la fábrica textil comentan que cuando solicitan que recojan las prendas en menos de 58 minutos es porque las máquinas de coser funcionan sin ninguna complicación. ¿Cómo describirían el funcionamiento de las máquinas cuando se tomaron los registros?

Revisen sus gráficas. Analicen la información que pueden obtener de ellas de forma más sencilla que con una tabla.



En una misma gráfica se pueden representar dos polígonos de frecuencia, que corresponden a dos conjuntos de datos en los que se analiza la misma variable, con la intención de comparar los conjuntos y obtener conclusiones.

6. Analicen en equipos la gráfica y contesten.

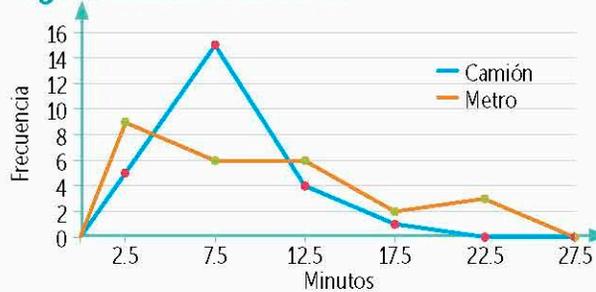
La siguiente gráfica muestra los minutos que José se retrasó en llegar a su trabajo considerando las veces que tomaba el metro o el camión.

Hacemos



Realiza una encuesta en tu comunidad tanto a jóvenes (10 a 17 años) como adultos (18 a 25 años) acerca del tiempo que dedican a leer en la semana. Entrevista a la misma cantidad de personas de cada población. Reflexiona: ¿cómo podrías utilizar las gráficas estudiadas en esta secuencia para comunicar los datos que obtengas?

Registro de minutos de retraso



a) ¿Qué medio de transporte tuvo el mayor retraso? y ¿dentro de cuál intervalo de minutos está?

b) Observando los dos polígonos de frecuencia ¿qué medio de transporte consideran que le conviene tomar a José? ¿Por qué?



Integración

En grupo elaboren una tabla comparativa de las características de los histogramas y de los polígonos de frecuencia. Incluyan algunos ejemplos de uso para cada una.

	Semejanzas	Diferencias
Histograma y polígono de frecuencia		

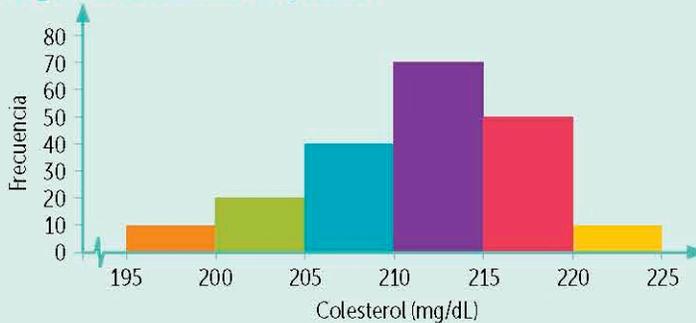


1. Analiza nuevamente la gráfica 2 de la actividad con la que inició la secuencia. Considera la siguiente información sobre la población en México en 2016.

Edad (años)	Número de habitantes (millones)
6 - 12	13
12 - 18	12
18 - 24	16

- a) En parejas, calculen el número de personas de cada intervalo de edad que representan los porcentajes en la gráfica 2.
 - b) Elaboren la tabla de frecuencias por intervalos, ubicando el punto medio de éstos y construyan el polígono de frecuencia correspondiente.
2. El siguiente histograma muestra el resultado de la prueba del colesterol en miligramos por decilitro de sangre (mg/dL), realizado a 200 personas.

Registro de colesterol en pruebas



- a) ¿Cuál es la amplitud de cada intervalo?
- b) Si para tener una buena salud se considera ideal tener un colesterol de entre 180 mg/dL y 200 mg/dL o menos, ¿qué porcentaje de las personas a las que se le hizo la prueba tienen un resultado considerado ideal?
- c) ¿Qué cantidad de colesterol tiene la mayoría de las personas?
- d) Explica qué observas en el histograma con relación a la salud de las personas que se realizaron la prueba del colesterol.
- e) Sobre el histograma anterior, construye el polígono de frecuencia correspondiente.

3. Con los datos de la tabla del tiempo que tarda una población infantil en resolver un problema construye en un mismo plano los polígonos de frecuencia correspondientes.

Tiempo	Niños	Niñas
0 - 10	5	2
10 - 20	40	33
20 - 30	45	42
30 - 40	10	14
40 - 50	0	9

- a) ¿Algún niño tarda más de 40 minutos en resolver el problema?
- b) ¿Cuántas niñas tardan más de 40 minutos?

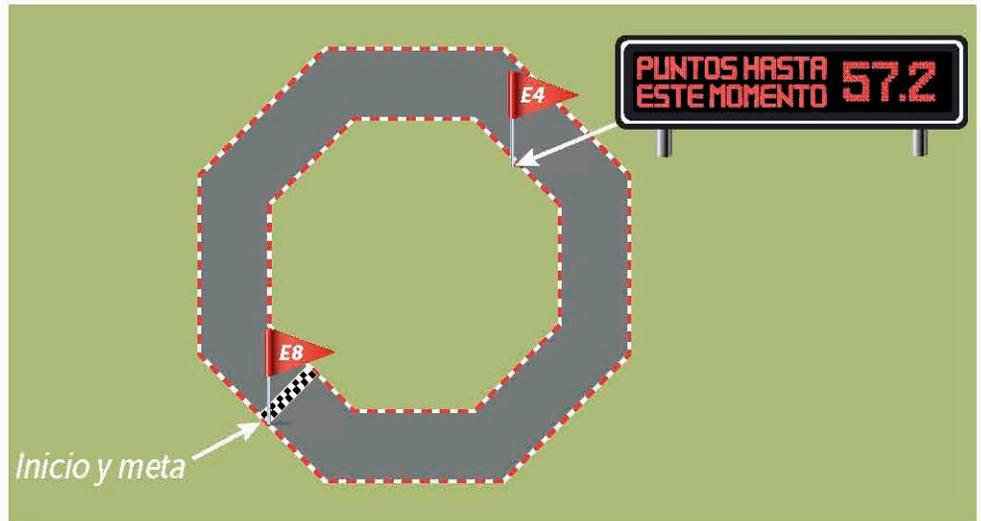
❖ Explica al grupo cómo utilizaste los datos para construir las gráficas.



Autoevaluación

Analiza cada situación y subraya la opción correcta.

1. En la imagen se muestra el circuito para una competencia de carreras de autos. Analiza el letrero que se enciende en la estación 4 y responde.



- Uno de los participantes terminó la carrera y otro sólo junto 85.8 puntos, ¿cuántos puntos obtuvo en total el primer participante y en qué estación quedó el segundo?
 - A) El primero obtuvo 114.4 puntos y el segundo quedó en la estación 6.
 - B) El primero obtuvo 100 puntos y el segundo quedó en la estación 6.
 - C) El primero obtuvo 80.4 puntos y el segundo quedó en la estación 7.
 - D) El primero obtuvo 57.2 puntos y el segundo quedó en la estación 5.

 - Un corredor logró avanzar hasta $\frac{3}{8}$ de la pista, y con dificultad recorrió $\frac{2}{5}$ más del resto de la pista. Inicialmente, ¿cuánto le faltaba por recorrer? y en el último tramo, ¿qué parte de la pista recorrió?
 - A) $\frac{1}{2}$ de la pista y $\frac{2}{5}$ de la pista
 - B) $\frac{5}{8}$ de la pista y $\frac{1}{4}$ de la pista
 - C) $\frac{1}{3}$ de la pista
 - D) $\frac{5}{8}$ de la pista y $\frac{2}{5}$ de la pista

 - Si en $\frac{1}{4}$ de hora se recorren $\frac{3}{5}$ partes del circuito, ¿cuántas vueltas se pueden dar en una hora?
 - A) Una vuelta
 - B) $1\frac{3}{4}$ vueltas
 - C) $2\frac{1}{6}$ vueltas
 - D) $2\frac{2}{5}$ vueltas
2. La capacidad del tanque del auto de carreras es de 105 L de gasolina. Por cada litro recorre 8 000 m y por cada estación recorrida se consumen $\frac{2}{7}$ partes del tanque. ¿Cuántos galones de gasolina quedan en el tanque al terminar la tercera estación y cuántos kilómetros se habrán recorrido?
- A) 15 galones, 0.8 km
 - B) 4 galones, 720 km
 - C) 4 galones, 450 km
 - D) 0 galones, 800 km

3. Si las placas de los autos de carreras son como las de la imagen, ¿cuál es la cantidad máxima de autos que pueden participar en la carrera si solo se toman en cuenta los números?

- A) 10 autos
- B) 10^2 autos
- C) 10^3 autos
- D) 10^4 autos



4. Observa la pista, ¿cuántos grados debe rotarse el volante en cada vuelta?

- A) 360°
- B) 135°
- C) 90°
- D) 45°

5. En el histograma se muestran los resultados de una encuesta realizada a los corredores de autos acerca de la edad en la que eligieron esa profesión. ¿Cuál fue el intervalo de edad con mayor frecuencia?

- A) De 16 a 18 años
- B) De 14 a 16 años
- C) De 10 a 12 años
- D) Más de 18 años

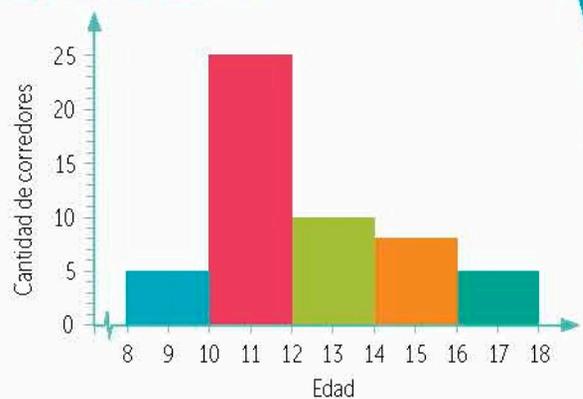
• ¿A cuántos corredores se entrevistaron?

- A) 25
- B) 53
- C) 100
- D) Más de 100

• Al trazar el polígono de frecuencias, ¿cuáles son los puntos medios de los intervalos?

- A) 8, 10, 12, 14 y 16
- B) 9, 11, 13, 15 y 17
- C) 9.5, 11.5, 13.5, 15.5 y 17.5
- D) 10.5, 12.5, 14.5, 16.5 y 18.5

Edad a la que los corredores de autos eligieron su profesión



6. Para un objeto en caída libre, la fuerza de gravedad es proporcional a la masa m , de dicho objeto, de manera que se cumple la siguiente expresión, donde g es la aceleración de la gravedad dirigida hacia abajo (-9.8 m/s^2). La fuerza se mide en newtons (N).

$$F = mg$$

Si sobre un cuerpo en caída libre actúa una fuerza de -490 N , ¿cuál es la masa de dicho cuerpo?

- A) 50 kg
- B) 85 kg
- C) 480.2 kg
- D) 4 802 kg

Reúnete en pareja con un compañero. Comparen sus respuestas, argumenten el porqué respondieron así. Corrijan lo que sea necesario.

Coevaluación

Revisa con tu profesor los resultados: ¿en qué necesitas mejorar? ¿Qué estrategias usarás?

Heteroevaluación



Los datos de ayer y hoy

Plantear y resolver problemas usando herramientas matemáticas.

La recolección, registro e interpretación de datos provenientes de distintas fuentes es una práctica que se ha desarrollado desde tiempos remotos, pues en una sociedad organizada siempre surge la necesidad de poseer datos sobre su población, actividades y condiciones materiales que la rodean. Así, esta práctica ha evolucionado desde la simple recolección de datos hasta la diversa y rigurosa interpretación que en la actualidad se hace de éstos.



De acuerdo con lo que indica el historiador griego Herodoto, en Egipto algunos de los censos de riqueza y población se hacían para planificar la construcción de las pirámides.

La estadística, en general, trata de la recopilación, organización, presentación, análisis e interpretación de datos numéricos con el fin de tomar decisiones.

Los primeros registros estadísticos de los que se tiene conocimiento fueron los censos, estudios descriptivos sobre todos los integrantes de una población.

En antiguas civilizaciones como la egipcia, china, griega y romana era común que se llevaran a cabo recuentos sobre características de los habitantes: nacimientos, defunciones o de aspectos económicos, impuestos, cosechas, etcétera.

Materiales para el registro de datos estadísticos

Los materiales empleados para el registro y comunicación de datos han evolucionado a la par de la escritura. Van desde la piedra, láminas metálicas, papiros y papel, entre otros, hasta los soportes electrónicos actuales.

Desde la prehistoria han existido formas rudimentarias de registrar información con fines contables: montículos de piedras o señales en huesos, pieles, palos y paredes de cuevas.



Hacia el año 3 000 a. n. e. los babilonios usaban pequeñas tablillas de arcilla para recopilar datos acerca de la producción agrícola y los géneros vendidos o cambiados mediante trueque.



Actualmente se dispone de medios electrónicos para resguardar información así como de las hojas de cálculo o diversos *softwares* que permiten introducir números y variables y, de forma casi instantánea, presentar una representación visual de los mismos.

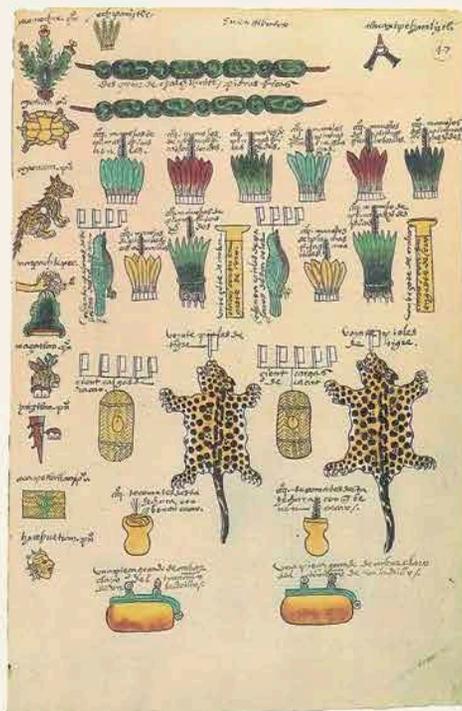


En México

Nuestro país tiene una rica tradición en materia de información estadística de la cual dan cuenta diversos códigos e innumerables publicaciones, instituciones y personajes desde la época colonial hasta nuestros días.

El 25 de enero de 1983 se creó, por decreto presidencial, el Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática (Inegi). Con su creación, el instituto modernizó la valiosa tradición que tenía nuestro país en materia de captación, procesamiento y difusión de información acerca del territorio, la población y la economía.

El 16 de abril de 2008, el Inegi cambió su personalidad jurídica, adquiriendo autonomía técnica y de gestión. A partir de entonces su nueva denominación es Instituto Nacional de Estadística y Geografía, pero aún conserva las mismas siglas.



En 1535, por órdenes del primer virrey de la Nueva España, Antonio de Mendoza, se realiza el Códice Mendocino, que en su apartado "Matrícula de tributos" se describe la manera en que los pueblos registraba sus datos de la tributación.



¡En México todos contamos!



Cada 10 años el Inegi realiza un censo de población y vivienda. El último se llevó a cabo en 2010.

➔ En el siglo XVII Gaspar Neumann demostró, basándose en los registros de defunciones de la época, la falsedad de la creencia popular de que en los años acabados en siete moría más gente. ¿Conoces algún otro hecho en el que la aportación estadística haya provocado un cambio de ideas?



Número, álgebra y variación

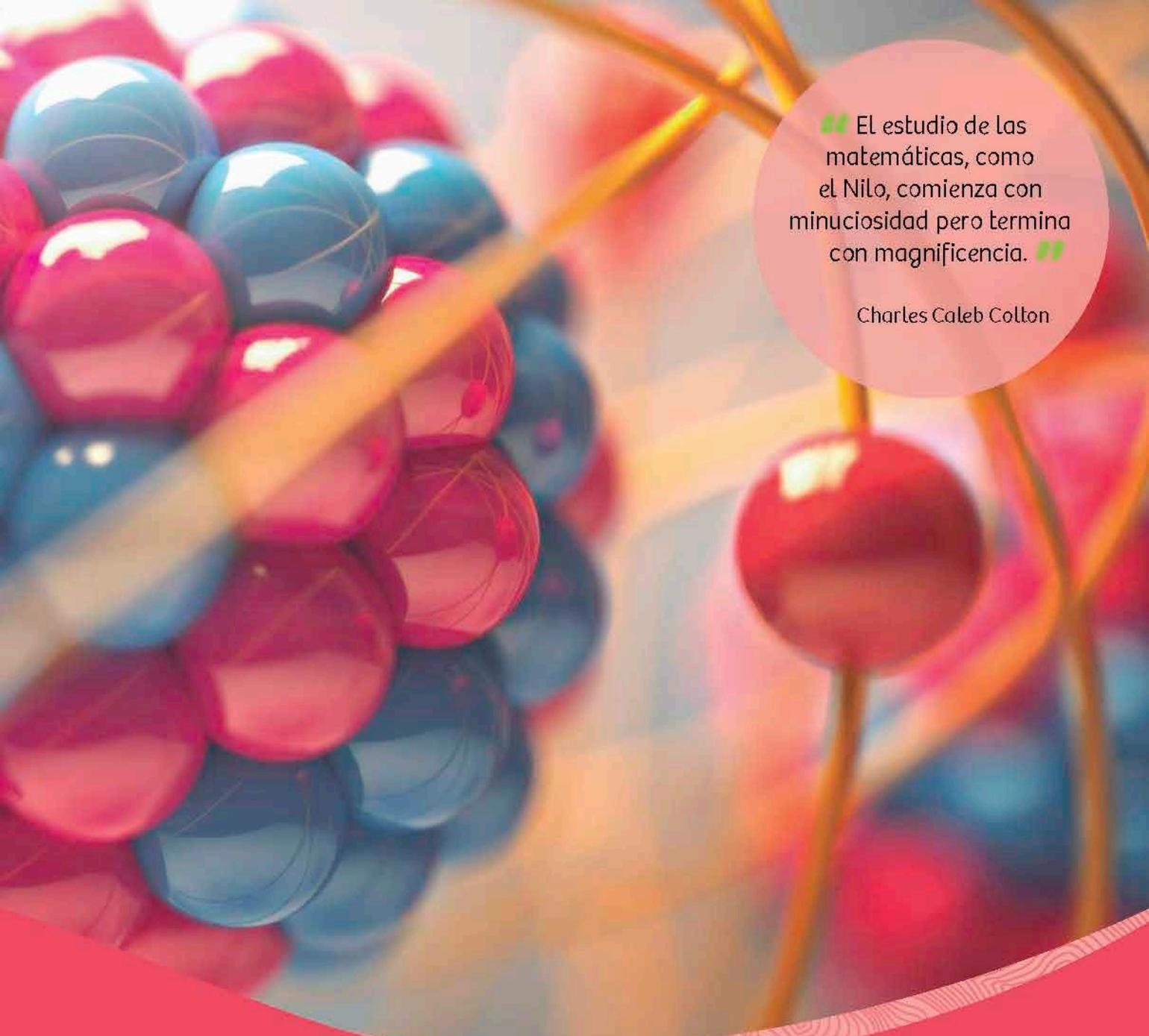
- 11. Notación científica
- 12. Raíz cuadrada
- 13. Problemas de proporcionalidad inversa y directa
- 14. Problemas de reparto proporcional
- 15. Representaciones tabular, gráfica y algebraica de la proporcionalidad inversa
- 16. Otros problemas de proporcionalidad inversa

Forma, espacio y medida

- 17. Construcción de polígonos regulares y teselados
- 18. Área de polígonos regulares e irregulares
- 19. Área del círculo

Análisis de datos

- 20. Gráficas de línea
- 21. Desviación media

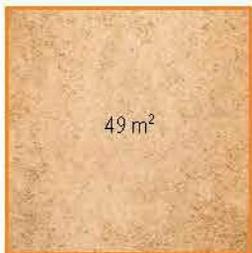
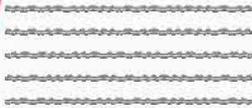


“ El estudio de las matemáticas, como el Nilo, comienza con minuciosidad pero termina con magnificencia. ”

Charles Caleb Colton

Bloque **2**

- Subraya la opción que representa el resultado de $0.00078 \times 10^4 + 2 \times 10^{-1}$.
A) 80
B) 78.2
C) 9.8
D) 8
- Realiza las operaciones correspondientes y contesta: en el plano de una ciudad, la calle Hidalgo mide 2.8 m, cuya longitud real es de 350 m. ¿Cuánto medirá sobre ese mismo plano otra calle de 200 m de longitud?



- Subraya la opción correcta: para cercar un terreno cuadrado, cuya área se muestra en la figura de la izquierda, se colocarán alrededor cinco líneas de alambre de púas. Si el metro de alambre cuesta \$2.30, ¿cuánto costará cercar el terreno?
A) Entre \$250.00 y \$300.00
B) Entre \$300.00 y \$325.00
C) Entre \$325.00 y \$350.00
D) Entre \$350.00 y \$375.00
- Calcula: un abuelo reparte \$756.00 entre dos de sus nietos. Si al mayor le da tres quintas partes del total, ¿cuánto dinero le corresponde al nieto menor?
A) \$453.60
B) \$378.00
C) \$302.40
D) \$151.20

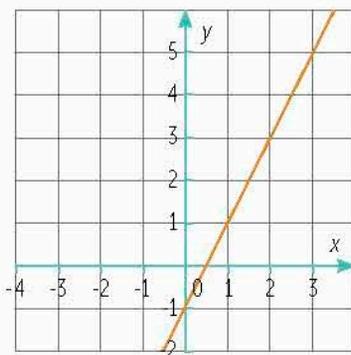
5. Asocia cada expresión algebraica con su gráfica.

() $y = 2x - 1$

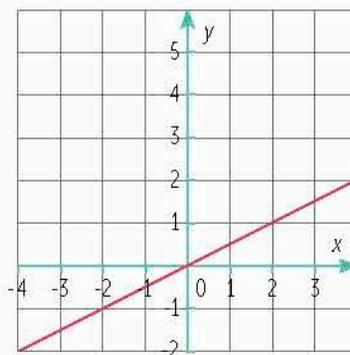
() $y = -3x$

() $y = \frac{1}{2}x$

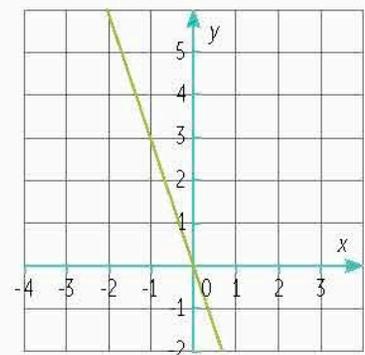
A)



B)



C)



Resuelve problemas de potencias con exponente entero.

Partimos

Glosario

resistencia eléctrica.
Oposición que presenta un conductor al paso de la corriente eléctrica.

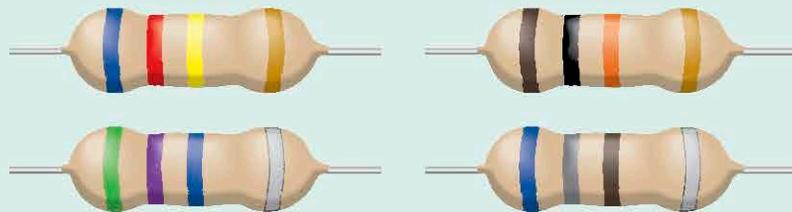
En ocasiones es necesario expresar cantidades muy grandes, como la distancia de la Tierra al Sol, o muy pequeñas como el tamaño de un glóbulo rojo. En ambos casos, al escribir las magnitudes observamos que tienen muchas cifras. En esta secuencia estudiarás la notación que se utiliza en esos casos, a partir de tus conocimientos sobre la potenciación.

1. Analiza la información y contesta.

El código de colores aceptado y utilizado por todos los fabricantes de resistores indica la **resistencia eléctrica**, en ohms (Ω), y su precisión o tolerancia. Por ejemplo, en el resistor de cuatro bandas que se muestra, los dos primeros colores forman un número de dos cifras y el tercer color la potencia de base 10 por la que se multiplica dicho número, por lo que su resistencia eléctrica es de $27 \times 10^5 \Omega$ con una tolerancia de 10 %.

Código de colores para resistores de cuatro bandas										
Color										
1. ^{er} dígito	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2. ^o dígito	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Multiplicador	10^0	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8	10^9
Tolerancia	5% color oro					10% color plata				

a) ¿Cuáles son los valores de resistencia y tolerancia en los siguientes resistores?



b) ¿De qué color deben ser las bandas de un resistor para que tenga los siguientes valores de resistencia y tolerancia?

Resistencia eléctrica: $79 \times 10^6 \Omega$
Tolerancia: 5 %

Resistencia eléctrica: $81 \times 10^4 \Omega$
Tolerancia: 5 %

❖ Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Analicen cómo podrían representar los valores de las resistencias eléctricas para que el primer factor sea un número entre 1 y 10. ¿Las expresiones 27×10^5 y 2.7×10^6 son iguales?

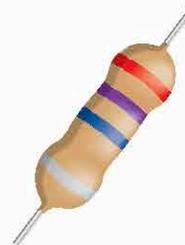
Escritura con potencias de base 10



1. Resuelvan en parejas lo siguiente.

Para escribir los prefijos de los múltiplos y submúltiplos en el Sistema Internacional de Unidades (SI) se utilizan las potencias de base 10. Por ejemplo, dado que el ohm es una unidad derivada del SI, la resistencia eléctrica del resistor de la imagen se puede expresar como $27 \times 10^6 \Omega$, o bien, $27 \text{ M}\Omega$, que se lee 27 megaohms.

a) Escriban en la última columna la potencia de base 10 que corresponda a cada prefijo de acuerdo con su valor numérico. Utilicen exponentes positivos o negativos según se requiera.



	Prefijo	Valor numérico	10^n
Múltiplos	Giga (G)	1 000 000 000	
	Mega (M)	1 000 000	
	Kilo (k)	1 000	
	Hecto (h)	100	
	Deca (da)	10	
		1	
Submúltiplos	Deci (d)	0.1	
	Centi (c)	0.01	
	Mili (m)	0.001	10^{-3}
	Micro (μ)	0.000 001	
	Nano (n)	0.000 000 001	



En la secuencia 5 del bloque 1 analizaste el significado de una potencia con exponente negativo.

- Detallen su procedimiento para escribir las potencias de la última columna, conformada por los múltiplos y los submúltiplos.

Múltiplos: _____

Submúltiplos: _____

- ¿Qué prefijos se escriben con exponentes positivos? _____
- ¿Y con exponentes negativos? _____

Expliquen por qué $0.001 = 10^{-3}$. _____

- ❖ Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. ¿Todos siguieron el mismo procedimiento? ¿Observaron alguna regularidad? Analicen: en los múltiplos, ¿qué relación existe entre la cantidad de ceros del número y el exponente de la potencia con base 10? En los submúltiplos, ¿qué relación existe entre la cantidad de cifras decimales del número y el exponente de la potencia con base 10?



Integración

- Como grupo establezcan una regla que permita representar con potencias de 10 los múltiplos y submúltiplos decimales de la unidad.

$$10^n = \underbrace{10 \times \dots \times 10}_{\text{veces}} = \underbrace{1000 \dots 00}_{\text{ceros}}$$

$$10^{-n} = \frac{1}{\underbrace{10 \times \dots \times 10}_{\text{veces}}} = \underbrace{0.000 \dots 001}_{\text{ceros}}$$



Figura 11.1 El diámetro de un glóbulo rojo puede medir en promedio $0.0000076 \text{ mm} = 7.6 \times 10^{-6} \text{ mm}$.



La notación científica surge de la necesidad de escribir, leer y operar con cantidades muy grandes como un año luz, que corresponde a la longitud que recorre la luz en un año (9 460 000 000 000 km), o muy pequeñas como el tamaño de un glóbulo rojo (figura 11.1).

Un número en notación científica se expresa como $a \times 10^n$, donde a es un número decimal o entero entre 1 y 10 llamado coeficiente; y n es un entero. Si el número representado es mayor que 1 el exponente de la potencia con base 10 es positivo y es un entero negativo si el número es menor que 1.



Integración

- Con base en la información anterior, encierra en un círculo las cantidades que estén escritas en notación científica y corrige las que no.

23×10^{12}	9.8×10^{-2}	0.07×10^4	0.5×10^7
1.723×10^6	32.1×10^3	2.6×10^{-5}	10.1×10^{-4}

2. Completen en equipos la tabla.

Medidas aproximadas	Notación científica	Escritura decimal
Tamaño de una bacteria (mm)	2×10^{-7}	
Distancia media de la Tierra al Sol (km)		150 000 000
Diámetro de un protón (mm)		0.000000000000001
Un mol (moléculas)	6.02×10^{23}	
Superficie de la Tierra (km ²)	5.1×10^7	

- Comparen sus respuestas con sus compañeros. Utilicen la calculadora para verificarlas. ¿Qué dificultades tuvieron? ¿Cómo las solucionaron?

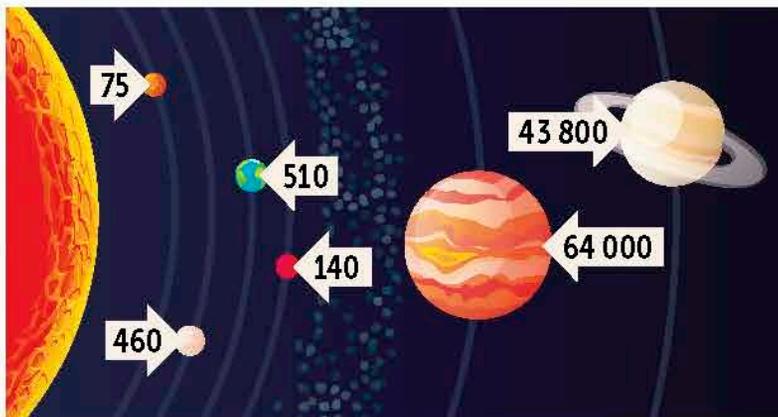
**Integración**

- En grupo redacten un procedimiento para convertir cantidades muy grandes expresadas con decimales en notación científica y viceversa.

Orden de magnitud

3. Resuelve con un compañero los siguientes problemas.

- a) La figura muestra la superficie aproximada, en millones de kilómetros cuadrados, de los primeros seis planetas del Sistema Solar.



- Escriban la superficie de cada planeta en notación científica.

Mercurio: _____ km² Venus: _____ km²

Tierra: _____ km² Marte: _____ km²

Júpiter: _____ km² Saturno: _____ km²

- b) Lean la información y contesten.



Escribir una cantidad en notación científica permite identificar lo que se conoce como el orden de magnitud de dicha cantidad. Por ejemplo, sabemos que la distancia media de la Tierra al Sol es de 150 000 000 km, es decir, es una cantidad del orden de las centenas de millón. Si escribimos dicha cantidad en notación científica, $1,5 \times 10^8$, decimos que dicha cantidad tiene orden de magnitud 10^8 .

- ¿Qué planeta tiene el mayor orden de magnitud de superficie?

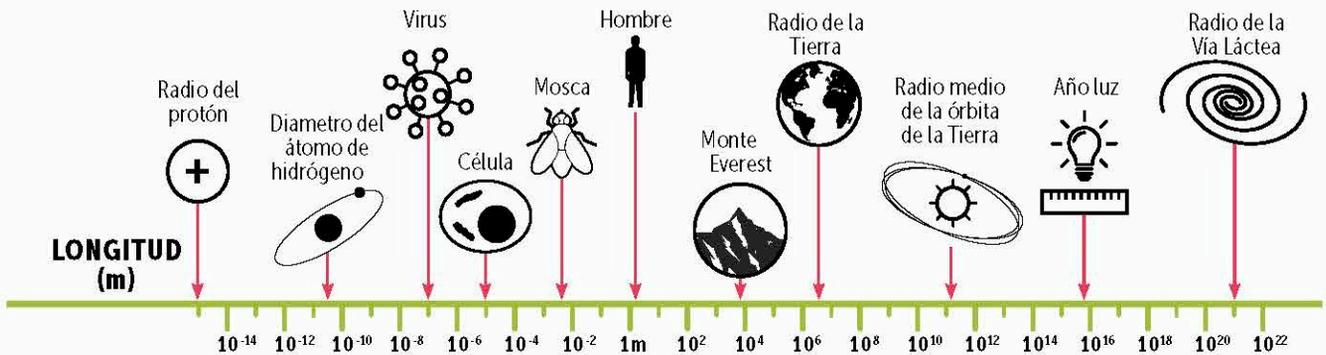
- ¿Qué planeta tiene en superficie el mismo orden de magnitud que la Tierra?

- ¿Qué planetas difieren en dos órdenes de magnitud?

**Explora**

Para practicar la notación científica, en la siguiente página www.edutics.mx/U7V podrás realizar algunos ejercicios.

c) La utilidad del orden de magnitud radica en que permite captar de forma intuitiva el tamaño relativo de las cosas, desde lo más ínfimo hasta lo más vasto.



Fuente: Ariany Martínez, "Ordenes de magnitud" en *Curso de Física Básica*, <http://www2.montes.upm.es/dptos/digfa/cfisica/magnitudes/ordenes.htm> (consulta: 11 de septiembre de 2018).

- ¿Cuántas veces es más pequeña una mosca de la fruta que el hombre?
_____ ¿A cuántos órdenes de magnitud corresponde? _____
- ¿Cuántas veces es más pequeña una célula que una mosca de la fruta?
_____ ¿A cuántos órdenes de magnitud corresponde? _____
- Lucía dice que la diferencia entre el orden de magnitud de un virus y el hombre es semejante a la diferencia entre el orden de magnitud del hombre y el radio de la Tierra. Expliquen por qué lo dice.

❖ Reúnanse con otros compañeros y discutan cómo pueden comparar números en notación científica y hagan otras comparaciones con la información de la imagen.

Operaciones con números escritos en notación científica

Entidad federativa	Habitantes
Colima	7.11×10^5
Baja California Sur	7.12×10^5
Campeche	9×10^5
Nayarit	1.18×10^6
Tlaxcala	1.3×10^6

4. Resuelvan en parejas.

Paulina, Enrique y Jaime calcularon el total de habitantes de los cinco estados menos poblados de la república mexicana, según la información que se muestra en la tabla, perteneciente al año 2015.

a) Observen los procedimientos de cada uno y contesten.

Paulina		Enrique		Jaime	
7.11×10^5	7.11×10^5	1.18×10^6	2.323×10^6	7.11×10^5	
7.12×10^5	$+ 7.12 \times 10^5$	$+ 1.3 \times 10^6$	$+ 2.48 \times 10^6$	7.12×10^5	
$+ 9 \times 10^5$	9×10^5	2.48×10^6	4.803×10^6	$+ 9 \times 10^5$	
1.18×10^6	23.23×10^5			11.8×10^5	
1.3×10^6				13×10^5	
25.71×10^7				$48.03 \times 10^5 = 4.803 \times 10^6$	

b) Expliquen el procedimiento de cada uno.

- Paulina: _____

- Enrique: _____

- Jaime: _____

c) Calculen el total de habitantes expresando las cantidades de forma decimal y compárenlo con los resultados de Paulina, Enrique y Jaime. ¿Con cuáles de los procedimientos se obtiene el resultado correcto?

d) Reúnanse con otra pareja y resuelvan las siguientes sumas y restas. Calculen utilizando la escritura decimal y escriban el resultado en notación científica.

$$2 \times 10^3 + 1.2 \times 10^3 = \underline{\hspace{2cm}} \qquad 5.3 \times 10^{-2} - 2.5 \times 10^{-3} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$7.7 \times 10^6 - 4.5 \times 10^4 = \underline{\hspace{2cm}} \qquad 8.2 \times 10^{-1} + 2 \times 10^{-3} = \underline{\hspace{2cm}}$$

e) Utilicen los procedimientos del inciso c) que hayan considerado correctos y resuelvan nuevamente las operaciones. ¿Obtuvieron los mismos resultados?

¿Qué pueden concluir? _____

- ❖ Comparen sus respuestas con otras parejas. Discutan cuál de los procedimientos les parece más general. Traten de establecer cómo realizar una suma de números en notación científica cuando tienen el mismo orden de magnitud y cuando no lo tienen. ¿Cómo se puede cambiar el orden de magnitud de un número en notación científica?



Para sumar o restar cantidades en notación científica es necesario que éstas tengan el mismo orden de magnitud.

Si dos cantidades tienen el mismo orden de magnitud se suman o se restan los coeficientes y el resultado se multiplica por la potencia de 10 correspondiente. Por ejemplo:

$$3.2 \times 10^4 - 1.1 \times 10^4 = 2.1 \times 10^4$$

Para cambiar el orden de magnitud de un número en notación científica se multiplica o divide por potencias de 10, según sea necesario.

5. Resuelvan en equipos el siguiente problema.

La masa de la Tierra es aproximadamente 6×10^{24} kg y la masa del Sol es casi 330 000 veces la masa de la Tierra, es decir, 3.3×10^5 veces mayor. ¿Qué procedimiento utilizarían para saber cuál es la masa aproximada del Sol?

Recuerda


La propiedad conmutativa del producto establece que el orden de los factores no altera el producto.

Recuerda


En primer grado de secundaria aprendiste a resolver ecuaciones de la forma $ax = c$.

- a) Escriban en notación científica cuál es la masa aproximada del Sol.

Expliquen su respuesta. _____

- ❖ Comparen sus resultados y procedimientos con los de otros equipos, expliquen cómo hicieron los cálculos: ¿desglosaron las cantidades en escritura decimal? ¿Pudieron hacer cálculos con las expresiones en notación científica?

6. Resuelvan en equipos.

La velocidad con la que viaja la luz es 3×10^8 m/s, ¿cuántos segundos tardará en recorrer 30 km?

- a) Expresen en notación científica la cantidad de metros que hay en 30 km.

b) Si la velocidad es igual a la distancia entre el tiempo, ¿qué procedimiento utilizarían para calcular el tiempo que tarda la luz en recorrer 30 km?

- c) ¿Cuántos segundos tarda la luz en recorrer 30 km? _____

- ❖ De forma grupal comparen sus resultados y procedimientos: ¿cómo hicieron los cálculos? ¿Cómo podrían utilizar las propiedades de las potencias para resolver los problemas de las actividades 5 y 6? Establezcan procedimientos generales para calcular el producto y cociente de números en notación científica y compárenlos con la siguiente información.



Para multiplicar o dividir dos números escritos en notación científica se multiplican o dividen los coeficientes y a las potencias con base 10 se les aplican las propiedades del producto y división de potencias estudiadas anteriormente. Por ejemplo:

$$(3 \times 10^4)(2.2 \times 10^{-2}) = 6.6 \times 10^2$$

$$(5 \times 10^2) \div (2.5 \times 10^4) = 2 \times 10^{-2}$$


Integración

- A partir de las actividades anteriores y de su conocimiento sobre las propiedades para resolver la potencia de una potencia, establezcan grupalmente cómo calcular la potencia de un número escrito en notación científica. Resúmanlo completando el siguiente ejemplo: $(2 \times 10^{-4})^3 = 2 \times 10^{(-4)(3)} = ___ \times ___$

7. Resuelvan en grupo los siguientes problemas.

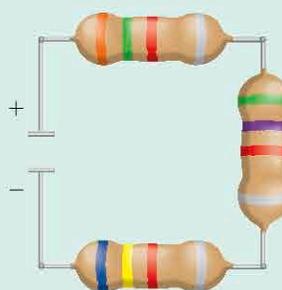
- a) El cuerpo humano tiene 5 L de sangre, de los cuales el 40 % son glóbulos rojos. Si cada glóbulo rojo tiene un volumen aproximado de 9×10^{-14} L, ¿cuántos glóbulos rojos hay en el cuerpo humano? _____

b) La masa tanto de un protón como de un neutrón es aproximadamente 1.67×10^{-27} kg y la masa de un electrón es 9×10^{-31} kg. ¿Cuál es la masa de un átomo de azufre si se sabe que está conformado por 16 electrones, 16 protones y 16 neutrones? _____

❖ Expliquen detalladamente las operaciones con potencias que realizaron en cada caso.



1. Considera nuevamente la información del problema que se encuentra al inicio de la secuencia. La resistencia total de un circuito en serie se calcula sumando las resistencias de los resistores que lo forman. ¿Cuál es la resistencia total del siguiente circuito?



2. Expresa los siguientes números en notación científica o decimal, según corresponda.

$$2.7 \times 10^{-5} = \qquad 3500\ 000 =$$

$$0.00099 = \qquad 1.01 \times 10^7 =$$

3. Ordena los números de menor a mayor.
 2×10^5 , 1.1×10^6 , 3×10^{-4} , 8.2×10^2 , 9.9×10^{-1} .

4. Resuelve las siguientes operaciones expresando los resultados en notación científica.

$$2.1 \times 10^7 + 7.2 \times 10^7 = \qquad 5.1 \times 10^5 - 4.9 \times 10^4 =$$

$$(7.81 \times 10^{11})(2.5 \times 10^{11}) = \qquad (2.3 \times 10^{-8})(1.5 \times 10^{-6}) =$$

$$(6 \times 10^6) \div (2.2 \times 10^6) = \qquad (2.5 \times 10^{-7}) \div (2 \times 10^{-9}) =$$

5. Resuelve los siguientes problemas.

- a) La distancia de la Tierra al Sol es de 149 000 000 km y a la Luna de 385 000 km. ¿Cuál es la diferencia entre los órdenes de magnitud de ambas distancias?
- b) Calcula tu edad equivalente en segundos, utilizando notación científica. ¿Cuál es el orden de magnitud?
- c) La masa de la luna es 7.34×10^{22} kg y la masa de la Tierra es de 6×10^{24} kg. ¿A cuántas lunas equivale la masa de la Tierra.
- d) Se calcula que en la Vía Láctea hay cerca de 1.2×10^{11} estrellas. ¿Cuántos años aproximadamente le tomaría a una persona contar las estrellas si cuenta una por segundo?

❖ Explica a tus compañeros tus procedimientos. Trata de entender los de tus compañeros y compáralos con los tuyos. Recuerda que se vale equivocarse y corregir, pues en matemáticas es importante aprender del error.



En el siguiente enlace www.edutics.mx/U7j podrás realizar algunos ejercicios de operaciones y conversión de notación científica. Al término, corrobora tus respuestas con las que vienen en la misma página.



Reflexiona: ¿el error es una oportunidad de aprender? ¿Por qué? ¿Qué actitud debes mantener frente a él?

Raíz cuadrada

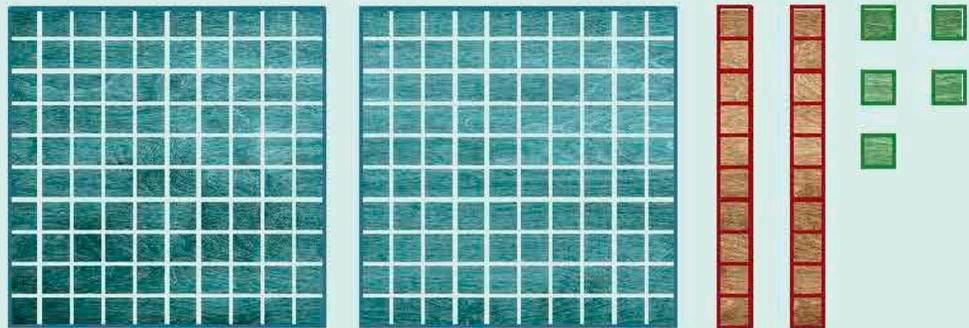
Resuelve problemas de potencias con exponente entero y aproxima raíces cuadradas.

Partimos

La raíz cuadrada es una de las operaciones elementales y se ha calculado desde épocas muy antiguas. Surgió al plantear diversos problemas geométricos, entre ellos el cálculo del área de un cuadrado o la longitud de su diagonal.

1. Lee la situación y contesta.

En un taller de carpintería se trabaja con diferentes piezas de madera. Las azules están formadas por 100 cuadraditos cada una, las de color naranja por 10 cuadraditos cada una y hay cuadraditos verdes sueltos. Necesitan cubrir una superficie cuadrada que contiene 225 cuadraditos en total. Pueden cambiar un cuadrado azul por 10 tiras anaranjadas o 100 cuadraditos verdes; o una tira anaranjada por 10 cuadraditos verdes, según les convenga, sin embargo, para ello deben utilizar el menor número posible de cuadraditos verdes porque sólo les quedan 25.



- Si logran formar un cuadrado, ¿cuál será su área en cuadraditos o unidades cuadradas?
- ¿Cuántos cuadraditos tendría cada lado?
- ¿Cuál es la cantidad mínima de cuadros azules, tiras anaranjadas y cuadraditos verdes que se pueden utilizar?

✚ Compara tus respuestas con tus compañeros. ¿Cómo hicieron para resolver el problema? Discutan cómo es posible obtener la longitud del lado de un cuadrado si conocen su área.

Recorremos

El lado de un cuadrado

1. Analiza la situación y resuelve.

Un despacho de arquitectos diseñó varias salas de cine, de manera que el número de butacas en cada fila es igual al número de filas en la sala.

- La sala A tiene 169 asientos, ¿cuántas butacas hay en cada fila y cuántas filas hay en la sala?

- La sala B tiene 289 asientos, ¿cuántas filas hay en la sala y de cuántas butacas es cada fila? _____

c) Explica cómo interpretaste el problema para contestar los incisos anteriores.

d) La sala C cumple las mismas condiciones que las demás pero tiene más butacas por fila que la sala A y menos que la B, ¿cuántos asientos en total podría tener? ¿Hay una sola respuesta? Explica.

❖ Reúnete con tus compañeros y expliquen cómo resolvieron el problema: ¿hicieron un dibujo? ¿Qué operaciones utilizaron? ¿Llegaron a los mismos resultados?

2. Determinen en parejas la longitud del lado de cada cuadrado a partir de su área.

64 cm² 16 cm² 36 cm² 4 cm²

Lado: _____ Lado: _____ Lado: _____ Lado: _____

a) ¿Cómo hicieron para encontrar las medidas anteriores?

❖ Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. ¿Cómo relacionarían los problemas anteriores con la potenciación?



La raíz cuadrada de un número n , es un número a que multiplicado por sí mismo, es decir, elevado al cuadrado da n . El símbolo que representa la raíz cuadrada es $\sqrt{\quad}$. Así $\sqrt{n} = a$, si $a^2 = n$. Cuando un número es exactamente igual al cuadrado de otro se dice que es un cuadrado perfecto.



Integración

• Completa las siguientes potencias y reescríbelas como raíces cuadradas.

(\quad)² = 9, así $\sqrt{9} = \quad$ (\quad)² = 144, así $\sqrt{144} = \quad$
 (\quad)² = 100, así $\sqrt{100} = \quad$ (\quad)² = 361, así $\sqrt{361} = \quad$



Notación

La operación raíz cuadrada se forma de dos partes: radicando y raíz. El símbolo se llama radical.

radical $\rightarrow \sqrt{16} = 4$
 radicando \rightarrow raíz \leftarrow

3. Resuelvan en equipos lo siguiente.

- a) Consideren que $20^2 = 400$ y $40^2 = 1600$ para calcular las siguientes raíces cuadradas exactas.

$$\sqrt{625} = \underline{\hspace{2cm}} \quad \sqrt{1369} = \underline{\hspace{2cm}} \quad \sqrt{576} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\sqrt{1024} = \underline{\hspace{2cm}} \quad \sqrt{1444} = \underline{\hspace{2cm}} \quad \sqrt{900} = \underline{\hspace{2cm}}$$

- b) Juan dice que para encontrar la raíz cuadrada de 625 debe buscar un número mayor que 20 y menor que 30 que termine en 5. Expliquen en qué basa Juan su razonamiento. _____

- c) Claudia dice que para encontrar la raíz cuadrada de 1 444 debe buscar un número entre 30 y 40 cuyo dígito de las unidades sea 2 o sea 8. Expliquen el razonamiento de Claudia. _____

- d) Con base en los razonamientos anteriores, argumenten cómo encontrar la raíz cuadrada de 1 369. _____

- ❖ Comparen sus respuestas y razonamientos con los de sus compañeros. Discutan por qué es útil conocer cuál es el dígito de las unidades de los cuadrados de los números del 0 al 9.

4. Utilicen su juego de geometría para trazar dos cuadrados: uno azul con área de 12.25 cm^2 y otro verde con área de 16.81 cm^2 .

- a) ¿Cómo pueden conocer la longitud de los lados de los cuadrados?

b) ¿Entre qué números enteros está la longitud del lado del cuadrado azul? ¿Y entre cuáles la longitud del cuadrado verde?

c) Expliquen cómo podrían encontrar la longitud de los lados de cada cuadrado sin utilizar calculadora. _____

- d) ¿Cuánto miden los lados de cada cuadrado? _____

Explora



En el siguiente enlace www.edutics.mx/U8k encontrarás un video con una explicación del término raíz cuadrada. Y en los enlaces www.edutics.mx/U8Z y www.edutics.mx/U84 podrás resolver algunos ejercicios del cálculo de la raíz cuadrada.

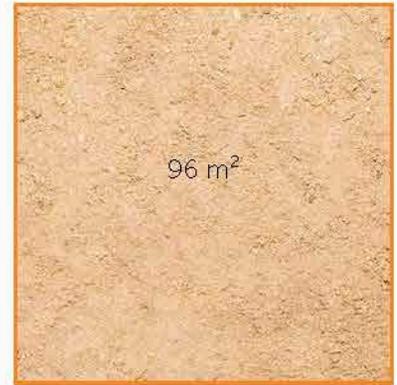


- ❖ Analicen las semejanzas al calcular la raíz cuadrada de números enteros y con algunas cifras decimales. ¿Cómo pueden utilizar las regularidades que observaron en la actividad 3?

Raíces cuadradas no exactas

5. Analicen y resuelvan en equipos.

Natalia quiere comprar malla para cercar el terreno de forma cuadrada que se muestra en la figura de la derecha, por lo cual necesita saber cuántos metros mide cada lado de dicho terreno.



- a) ¿Cómo pueden calcular la longitud de los lados del terreno? _____

- b) ¿El valor numérico es un entero o un decimal no exacto? _____
- c) ¿Qué medida aproximada tienen los lados del terreno? _____
- d) Natalia hizo una tabla como la de la derecha para aproximar el resultado. Complétenla.

- e) A partir de los resultados de la tabla, identifiquen el resultado más cercano al área sin pasarse y traten de hacer una nueva aproximación de la longitud del lado del terreno pero, en esta ocasión, con dos cifras decimales. ¿Cuál es la aproximación?

$(9.1)^2 =$	$(9.4)^2 =$	$(9.7)^2 =$
$(9.2)^2 =$	$(9.5)^2 =$	$(9.8)^2 =$
$(9.3)^2 =$	$(9.6)^2 =$	$(9.9)^2 =$

- f) ¿Cuántos metros de malla deben comprarse para cercar el terreno?

- ❖ Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. ¿Utilizaron el mismo método que Natalia? ¿Consideran necesario calcular todos los números de la tabla para hacer la aproximación? ¿Cómo podrían reducir la cantidad de ensayos o pruebas de los números cuyo cuadrado se aproxima al valor del área?



Notación

En matemáticas el signo \approx significa aproximadamente igual a.

6. Trabaja con un compañero.

Completan lo siguiente para obtener una aproximación de $\sqrt{2\,853}$ con una cifra decimal.

- Como $50^2 = 2\,500$ y $60^2 = 3\,600$, entonces $50 < \sqrt{2\,853} < 60$.
 - Como $50^2 =$ _____ y $55^2 =$ _____, entonces $50 < \sqrt{2\,853} <$ _____.
 - Como $50^2 =$ _____ y $53^2 =$ _____, entonces $53 < \sqrt{2\,853} < 55$.
 - Como $53^2 =$ _____ y (_____)² = 2 916, entonces _____ $< \sqrt{2\,853} <$ _____.
 - Como $53^2 =$ _____ y (_____)² = 2 862.25, entonces _____ $< \sqrt{2\,853} <$ _____.
 - Como (_____)² = 2 840.59 y (_____)² = 2 862.25, entonces (_____) $< \sqrt{2\,853} <$ _____.
- Luego, $\sqrt{2\,853} \approx$ _____

- a) Expliquen con sus palabras cómo se obtiene la raíz cuadrada de un número con la técnica de aproximaciones sucesivas, expuesta en el cuadro anterior.

- ❖ Comparen sus respuestas. ¿Cuáles son las semejanzas y diferencias en las técnicas empleadas en las actividades 5 y 6? ¿Qué modificación consideran que se podría hacer en ellas para que sean más eficientes?

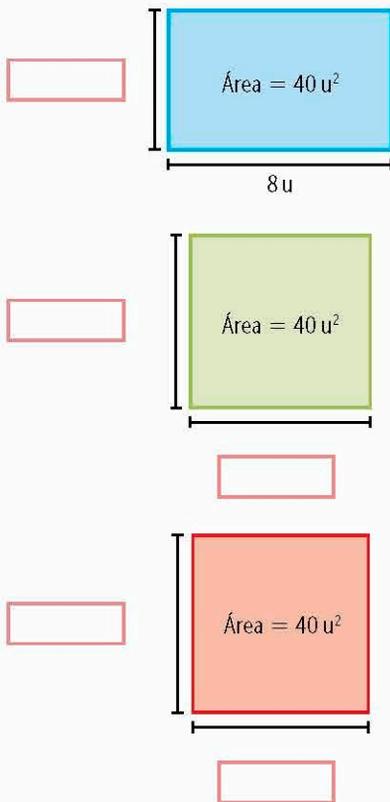
Explora



En el siguiente enlace www.edutics.mx/U8J encontrarás algunos ejercicios de aproximaciones de raíces cuadradas.

En ocasiones, la raíz cuadrada de un número no es exacta, por lo que sólo es posible aproximarla. Algunos procedimientos son el ensayo y error, aproximaciones sucesivas, el método babilónico, entre otros.

El método para calcular la raíz cuadrada inventado por los babilonios consiste en representar un número por medio del área de un rectángulo el cual se va transformando, conservando su área, de manera que cada vez se asemeje más a un cuadrado. Calcular la raíz cuadrada es equivalente a buscar la medida del lado del cuadrado del que se conoce el área.



7. Completen en equipos el método babilónico para obtener una aproximación de $\sqrt{40}$.

- a) Busquen dos números que multiplicados den 40: estos corresponderán a los lados del rectángulo azul.
 b) Calculen el promedio de la longitud de los lados anteriores y escriban esta longitud en la base del rectángulo verde.

Luego calculen cuánto mide la nueva altura: _____
 Escribanla en el rectángulo verde, recuerden que el área original se conserva.

- c) Repitan el procedimiento anterior: calculen el promedio de la longitud de los lados en el rectángulo verde e indiquen esta longitud en la base del rectángulo rojo.

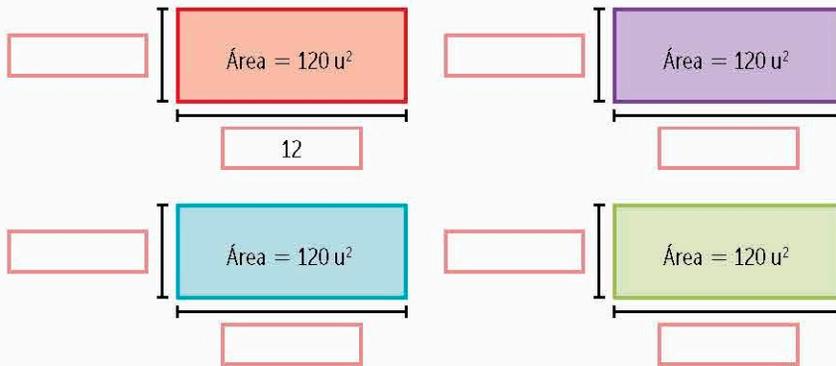
Luego calculen cuánto mide la nueva altura: _____
 Escriban el valor anterior en el rectángulo rojo.

- d) Los lados del rectángulo anterior son casi iguales, entonces:
 _____ $< \sqrt{40} < 6.325$, porque _____ $\times 6.325 \approx 40$.
 Verifiquen con su calculadora.

- e) Den una aproximación, sin pasarse, de $\sqrt{40}$ con tres decimales:

- ❖ Comparen sus respuestas con las de otro equipo. Discutan si al continuar con este procedimiento es posible encontrar aproximaciones más cercanas a $\sqrt{40}$. Argumenten su respuesta.

8. Calculen en equipos una aproximación de $\sqrt{120}$ hasta centésimos con el método babilónico. En cada uno de los siguientes rectángulos señalen la medida de los lados que obtienen. Si necesitan más rectángulos, dibújenlos.



- a) ¿Cuál es la aproximación hasta dos decimales de $\sqrt{120}$ que obtuvieron?



Explora

En el siguiente enlace www.edutics.mx/U8o podrás observar otro ejemplo del cálculo de una raíz cuadrada por medio del método babilónico.



Integración

- En parejas utilicen alguno de los métodos anteriores para calcular una aproximación hasta centésimos de las siguientes raíces cuadradas. Verifiquen sus resultados con la calculadora.

$$\sqrt{2} \approx \underline{\hspace{2cm}} \quad \sqrt{44} \approx \underline{\hspace{2cm}} \quad \sqrt{93} \approx \underline{\hspace{2cm}} \quad \sqrt{158} \approx \underline{\hspace{2cm}}$$

- En grupo elijan una de las raíces anteriores y resuélvanla por los tres métodos estudiados para compararlos. Analicen las ventajas y las desventajas de cada uno.



Aprendemos

Al comparar resultados, procedimientos, interpretaciones, etcétera, ¿qué habilidades, desarrollas?

Algunas consideraciones sobre la raíz cuadrada

9. Calcula las siguientes raíces cuadradas exactas. Considera que $0.1^2 = 0.01$ y $3^2 = 9$.

$$\sqrt{0.09} = \underline{\hspace{2cm}} \quad \sqrt{1.44} = \underline{\hspace{2cm}} \quad \sqrt{0.25} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\sqrt{2.25} = \underline{\hspace{2cm}} \quad \sqrt{0.16} = \underline{\hspace{2cm}} \quad \sqrt{0.49} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\sqrt{0.01} = \underline{\hspace{2cm}} \quad \sqrt{4.41} = \underline{\hspace{2cm}} \quad \sqrt{0.81} = \underline{\hspace{2cm}}$$

- a) Subraya los casos en que el radicando es menor que la raíz.
- b) En equipos analicen los casos que subrayaron y juntos traten de establecer una característica que cumplan los números cuya raíz cuadrada es menor que ellos, así como una característica que cumplan los números cuya raíz cuadrada es mayor que ellos. _____

- ❖ Comparen sus resultados con los de sus compañeros y argumenten sus respuestas. ¿Llegaron a la misma conclusión?

10. Completa las frases y las igualdades.

- a) $\sqrt{49} = \underline{\hspace{2cm}}$, porque $(\underline{\hspace{2cm}})^2 = 49$ y $\sqrt{49} = -7$ porque $(\underline{\hspace{2cm}})^2 = 49$
 b) $\sqrt{144} = \underline{\hspace{2cm}}$, porque $(\underline{\hspace{2cm}})^2 = 144$ y $\sqrt{144} = -12$ porque $(\underline{\hspace{2cm}})^2 = 144$
 c) $\sqrt{0.04} = \underline{\hspace{2cm}}$, porque $(\underline{\hspace{2cm}})^2 = 0.04$ y $\sqrt{0.04} = -0.2$ porque $(\underline{\hspace{2cm}})^2 = 0.04$
 d) $(\sqrt{121})^2 = (\underline{\hspace{2cm}})^2 = \underline{\hspace{2cm}}$
 e) $\sqrt{25^2} = \sqrt{\underline{\hspace{2cm}}} = \underline{\hspace{2cm}}$

✦ En grupo analicen: ¿cuántas raíces puede tener un número positivo? ¿Por qué? ¿Qué sucede con un número cuando se eleva al cuadrado y a su resultado se le extrae la raíz cuadrada o viceversa?



El signo de la raíz cuadrada siempre representa un valor positivo. Si se quiere obtener la raíz cuadrada negativa, por ejemplo de 81, se debe indicar con el signo menos antes del radical, $-\sqrt{81} = -9$. Si se desea indicar las dos raíces se utiliza el signo \pm , mas - menos, así $\pm\sqrt{81} = \pm 9$.

Las operaciones que consisten en elevar un número al cuadrado y extraer la raíz cuadrada son operaciones inversas para números positivos porque una "deshace" lo que hizo la otra, $(\sqrt{n})^2 = n$ y $\sqrt{n^2} = n$.

11. Argumenten en equipos la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones.

- a) No existe la raíz cuadrada de un número negativo. _____

 b) $\sqrt{1} = 1$ _____
 c) $\sqrt{0} = 0$ _____



Integración

• Entre todo el grupo intenten establecer qué sucede si el radicando de una raíz cuadrada es una suma, una resta, una multiplicación o una división.

a) Realicen individualmente las operaciones en cada lado de las siguientes igualdades y marquen con una \checkmark aquellas que son verdaderas. Pueden utilizar la calculadora.

$\sqrt{16 + 25} = \sqrt{16} + \sqrt{25}$

$\sqrt{49 \times 4} = \sqrt{49} \times \sqrt{4}$

$\sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{4}}$

$\sqrt{100 + 4} = \sqrt{100} + \sqrt{4}$

$\sqrt{81 - 9} = \sqrt{81} - \sqrt{9}$

$\sqrt{100 \times 36} = \sqrt{100} \times \sqrt{36}$

$\sqrt{64 - 25} = \sqrt{64} - \sqrt{25}$

$\sqrt{\frac{36}{9}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{9}}$

$\sqrt{\frac{48}{16}} = \frac{\sqrt{48}}{\sqrt{16}}$

$\sqrt{45 \times 12} = \sqrt{45} \times \sqrt{12}$

- b) Planteen otros ejemplos y argumenten cuáles de las siguientes expresiones son válidas para cualesquiera dos números positivos a y b .

$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

$\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$

$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

1. Analiza nuevamente el problema al inicio de la secuencia.

- a) ¿Es posible formar un cuadrado sin que sobren o falten cuadraditos con 4 cuadrados azules, 12 tiras naranjas y 9 cuadraditos verdes? Explica tu respuesta.
- b) Si las piezas de los cuadros azules de la derecha pueden separarse, ¿se podría formar con ellas un cuadrado sin que sobren ni falten cuadraditos? ¿Cuántas piezas tendrá el lado del mayor cuadrado que puedas formar?
- c) Si Manuel formó un cuadrado que en total tenía 961 cuadraditos, ¿cuántos cuadraditos tiene el lado del cuadrado?

2. Identifica entre qué números naturales consecutivos se encuentran las siguientes raíces cuadradas: $\sqrt{53}$, $\sqrt{230}$, $\sqrt{420}$, $\sqrt{382}$.

3. Obtén las siguientes raíces cuadradas. Para las raíces que no sean exactas, encuentra una aproximación con dos decimales. Utiliza el signo $=$ o \approx según corresponda: $\sqrt{4\,225}$, $\sqrt{600}$, $\sqrt{10\,000}$, $\sqrt{72}$.

4. Subraya con color rojo las igualdades que sean falsas.

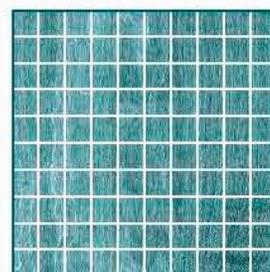
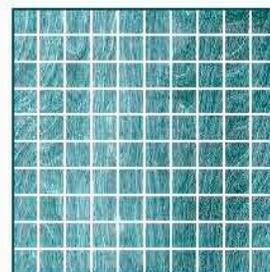
$\sqrt{4+1} = \sqrt{5}$ $\sqrt{5 \times 4} = \sqrt{20}$ $\sqrt{36} = \pm 6$ $\sqrt{5^2} = 5$

$\sqrt{\frac{121}{81}} = \frac{11}{9}$ $\sqrt{36-16} = \sqrt{20}$ $\sqrt{0} = 0$ $\sqrt{6^5} = 6$

5. Resuelve los problemas.

- a) En la fiesta de cumpleaños de mi hermano había 128 caramelos para repartir. Después del reparto cada niño tenía tantos caramelos como la cantidad de niños que había. Si sobraron 7 caramelos, ¿cuántos niños había?
- b) El presupuesto para pintar las cuatro paredes de una recámara es de \$1800. Si las paredes son cuadradas y cobran \$50 por metro cuadrado, ¿cuánto mide el lado de cada pared?
- c) La suma de los cuadrados de dos números es 954. Uno de ellos es 15. ¿Cuál es el otro?
- d) Luciano tiene cercado con alambre de púas un terreno de cultivo de forma rectangular de 120 m de largo por 30 m de ancho. Con la misma cantidad de alambre cercará otro terreno cuadrado que tiene la misma área. ¿Cuánto mide el lado del terreno cuadrado? ¿Ocupará la misma cantidad de alambre que en el terreno rectangular?

◆ Explica y argumenta al grupo tus procedimientos y respuestas.



Problemas de proporcionalidad inversa y directa

Resuelve problemas de proporcionalidad directa e inversa.

En grados anteriores aprendiste que existen relaciones entre magnitudes en las cuales si una de ellas aumenta al doble o se reduce a la tercera parte, la otra magnitud también aumenta o se reduce en la misma proporción. En esta secuencia estudiarás la relación entre dos magnitudes en las que cuando una de ellas aumenta la otra disminuye o viceversa.

Partimos

1. Analiza la situación y contesta.

Francisco quiere instalar en el techo de su casa un sistema de captación de agua pluvial. Los fabricantes le proponen colocar una tubería cuyo flujo es de 20 L por minuto para llenar un tinaco de 600 L. Francisco calculó el tiempo que tardaría en llenarse el tinaco y pidió otra tubería que lo llenara en máximo 10 minutos.



- Si coloca la tubería que le proponen, ¿en cuánto tiempo se llenará el tinaco?
- Con un flujo de 40 L por minuto, ¿cuánto tiempo tardaría en llenarse?
- ¿Cuál es el mínimo de litros de agua por minuto que debe arrojar la tubería para satisfacer las necesidades de Francisco?

❖ Compara tus respuestas y razonamientos. ¿Qué sucede con el tiempo cuando el flujo de la tubería aumenta: aumenta, disminuye, no varía?

Somos

Reflexiona: ¿de qué manera podrías implementar en tu casa métodos alternativos de sostenibilidad ambiental para hacer frente a la escasez de agua y con la finalidad de buscar el mejor aprovechamiento de ésta?

Recorremos

Proporcionalidad inversa

1. Resuelvan en parejas los siguientes problemas.

- Juan viaja constantemente de San Mateo a Vista Hermosa en automóvil. Debido a que algunos días hay poca visibilidad a causa de la lluvia o la niebla, el tiempo que dura el trayecto a través de la sierra varía. La tabla muestra la velocidad constante a la que Juan viaja y el tiempo que tarda.

Velocidad (km/h)	100	80	50	40	25
Tiempo (h)	2	2.5	4	5	8

- ¿Qué sucede con el tiempo si aumenta la velocidad del viaje? _____
- ¿Qué sucede con la velocidad si el tiempo disminuye? _____
- ¿En qué proporción cambia el tiempo cuando la velocidad se duplica?

- ¿En qué proporción cambia la velocidad si el tiempo se reduce a la cuarta parte? _____

b) Para ir de excursión, el grupo de Claudia contrató un autobús por un precio fijo. El precio que cada alumno debe pagar depende de la cantidad de asistentes a la excursión, como se muestra en la siguiente tabla.

Cantidad de alumnos	5	10	20	30	40
Precio por alumno (\$)	1060.00	530.00	265.00	176.70	132.50

- ¿Cuánto cuesta rentar el autobús? Expliquen su respuesta. _____

- Si van 25 alumnos a la excursión, ¿cuánto pagará cada uno?

- Si al contratar el camión se consideraron a 40 personas, pero sólo llegaron 20, ¿en cuánto se incrementa el costo que debe pagar cada asistente?

c) Dos albañiles tardarían 12 días en construir un muro.

- Si se contratan más trabajadores para construir otro muro con las mismas características, ¿tardarán más o menos días? _____

- ¿Cuántos días tardaran seis albañiles en construir el mismo muro en las mismas condiciones? Expliquen su respuesta. _____

- ¿Cuántos trabajadores se necesitan para construir el muro en tres días, bajo las mismas condiciones? Argumenten. _____

❖ Comparen sus respuestas y sus procedimientos con otra pareja. ¿Cómo interpretaron cada problema para resolverlo? ¿Cómo se relacionan entre sí los dos tipos de magnitudes en cada situación? En el primer y tercer incisos, ¿cómo se reduce el tiempo?; en el inciso b), ¿en qué condiciones el costo del boleto es más caro?



Dos cantidades o magnitudes son inversamente proporcionales si:

- Al aumentar una de las magnitudes la otra disminuye en proporción inversa a la primera. Por ejemplo, si una aumenta al doble, la otra disminuye a la mitad.
- El producto de las dos magnitudes es siempre el mismo (constante).

Proporcionalidad directa e inversa

2. Subraya en color verde las situaciones donde las magnitudes guardan una relación de proporcionalidad inversa, de color azul aquellas que tienen una relación de proporcionalidad directa y de color rojo las que no tienen una relación de proporcionalidad.
- Número de amigos que rentan un departamento y cantidad de dinero que paga cada uno.
 - La estatura de una persona y la longitud del pie.
 - La cantidad de kilogramos de naranjas y su precio.
 - El tiempo que un automóvil tarda en recorrer cierta distancia y la distancia recorrida.
 - La velocidad de un ciclista para recorrer cierta distancia y el tiempo empleado.
 - Número de páginas de un libro y su precio.

3. Observa la relación entre las magnitudes de las siguientes tablas y responde.

Tabla 1	
A	B
2	30
3	20
4	15
5	12
6	10

Tabla 2	
X	Y
0	3
1	2
2	1
3	0
4	-1

Tabla 3	
C	D
3	4.5
4	6
5	7.5
11	16.5
13	19.5

Tabla 4	
E	F
10	15
12	17
15	20
21	26
26	31

Tabla 5	
J	P
100	12.5
300	37.5
450	56.25
500	62.5
750	93.75

Tabla 6	
G	H
12.6	2
8.4	3
4.2	6
1.4	18
0.7	36

- ¿En qué tablas cuando una magnitud aumenta la otra disminuye?

- Revisa en las tablas que consideraste en tu respuesta anterior, ¿el producto de las magnitudes es constante? Argumenta. _____

- ¿En qué tablas ocurre que cuando una magnitud aumenta la otra también?

d) En las tablas que señalaste en tu respuesta anterior, ¿el cociente de las magnitudes es constante? Explica. _____

• ¿En qué tablas las magnitudes son inversamente proporcionales?

• ¿Y en cuáles son directamente proporcionales? _____

❖ Compara tus respuestas con el resto del grupo. ¿Qué diferencia hay entre la relación que existe entre dos magnitudes que son inversamente proporcionales o directamente proporcionales y su constante de proporcionalidad?

4. Completen en parejas las siguientes tablas. La relación entre las magnitudes es inversamente proporcional.

Magnitud A		4	6	
Magnitud B	12	9		4

Magnitud E	3	5		10
Magnitud F	0.4		0.15	

Magnitud C	2	8		128
Magnitud D		16	2	

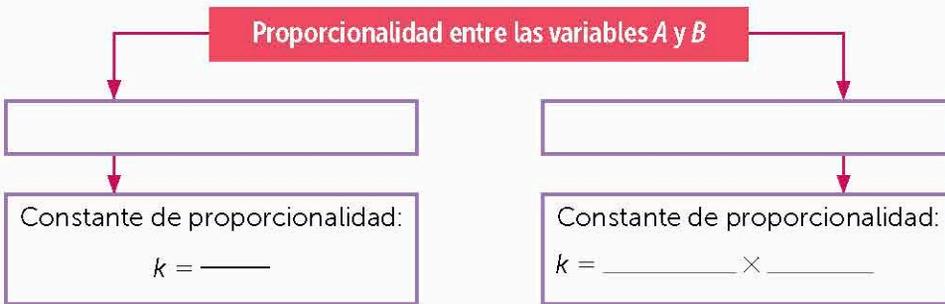
Magnitud G		8		24
Magnitud H	40	30	20	

❖ Compáren sus resultados con los de otra pareja. ¿Utilizaron el mismo procedimiento para encontrar los valores faltantes? ¿Cómo pueden encontrar la constante de proporcionalidad de cada tabla?



Integración

• Completa el siguiente esquema.



Glosario

atmósfera. La unidad de presión denominada atmósfera (atm) equivale a la presión que ejerce la atmósfera terrestre al nivel del mar.

5. Resuelvan los siguientes problemas en parejas.

a) De acuerdo con la ley de Boyle, la presión de un gas en un recipiente cerrado es inversamente proporcional al volumen de dicho recipiente, si la temperatura es constante.

• Cierta gas a 24 **atmósferas** de presión tiene un volumen de 3 dm³. Completen la tabla para obtener el volumen que ocupará el gas a 4.5 atm de presión.

Presión (atm)	Volumen (dm ³)
24	3

- ¿Qué volumen ocupa el gas a 18 atm de presión? _____
- b) Pedro está construyendo una casa y con los 36 trabajadores que tiene actualmente calcula que terminará la obra en 30 días.
 - ¿La relación entre el número de trabajadores y la cantidad de días es directamente proporcional o inversamente proporcional? _____
 - Completen la tabla para saber cuántos hombres necesita si quiere terminar la casa en 20 días.

Trabajadores	Tiempo (días)
36	30

- ¿Cuántas personas más necesita contratar? _____
- c) El descuento del precio de la lavadora corresponde al 25 %.
 - ¿La relación entre el tanto por ciento y el monto de descuento es directamente proporcional o inversamente proporcional? _____
 - Completen la tabla para saber el tanto por ciento que le corresponde a \$89.00.



Monto (\$)	Porcentaje del precio (%)
445	25

- ¿A cuántos pesos corresponde el 32% del precio? _____
 - Expliquen su procedimiento. _____
- _____
- d) Una bomba que extrae 200 L por minuto tarda 1 hora con 45 minutos en vaciar un depósito de agua.
 - ¿La relación entre capacidad de extracción y el tiempo empleado es directamente proporcional o inversamente proporcional? _____
 - Completen la tabla para saber cuántos litros por minuto extrae una bomba que tarda 5 horas en vaciar el depósito de agua.

Extracción (L/m)	Tiempo (m)
200	

- Si una bomba extrae el agua en tres horas y media, ¿cuántos litros extrae por minuto? Argumenten. _____
- _____

- ❖ Comparen con otra pareja sus respuestas y sus procedimientos. ¿Qué operaciones pueden hacer para encontrar el término desconocido de una tabla, si la variación es inversamente proporcional? ¿Y si es directamente proporcional?



Integración

- En grupo, a partir de los problemas anteriores, determinen qué tipo de variación se presenta en las siguientes tablas. Escriban una expresión que permita encontrar el valor de las variables indicadas en los recuadros.

Velocidad	Tiempo
a	b
v	x

$v = \underline{\hspace{2cm}}$
 $x = \underline{\hspace{2cm}}$

Distancia	Tiempo
m	h
d	y

$d = \underline{\hspace{2cm}}$
 $y = \underline{\hspace{2cm}}$

6. Resuelve los siguientes problemas. Indica si se trata de una relación de proporcionalidad directa o inversa.

- a) Un camión que lleva una velocidad de 60 km/h tarda 50 minutos en recorrer cierta distancia. ¿Cuánto tiempo tardará una moto que va a 120 km/h en recorrer la misma distancia?

- b) Una máquina que trabaja de manera ininterrumpida coloca 14 000 tornillos en 8 horas. ¿Cuántos tornillos coloca en dos horas y media?

- c) En una granja avícola tienen alimento suficiente para alimentar a 300 gallinas por 20 días. Si se compran 100 gallinas más, ¿cuánto tiempo durará el alimento?

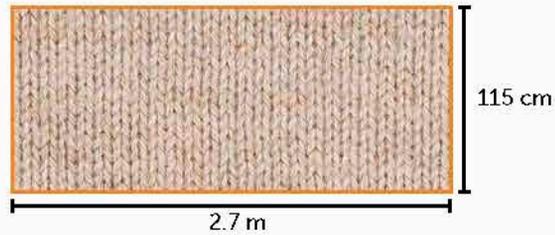
- ❖ Compara tus respuestas y procedimientos con los de algún compañero. Expliquen cómo decidieron el tipo de relación entre los datos. ¿Utilizaron procedimientos distintos? ¿Cuál les parece más sencillo?

7. Resuelvan en equipos los siguientes problemas.

- a) Pablo calentó una mezcla en el laboratorio, como lo muestra la figura. ¿Cuántos mililitros de agua se deben evaporar para que la nueva mezcla contenga 20 % de sal?

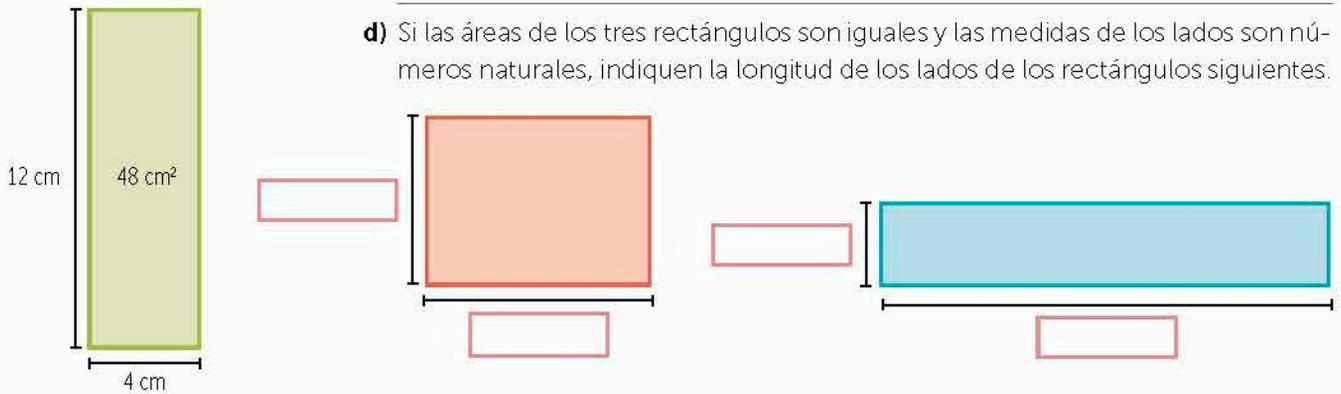


- b) Con 7 kg de lana se va a fabricar una tela cuyas dimensiones se muestran en la figura. Si con esta misma cantidad de material se quiere fabricar una tela de 50 cm de ancho, ¿cuál sería su largo? _____



- c) En una pequeña ciudad una cuadrilla de 10 jardineros se encarga de darle mantenimiento a 10 de los parques que existen. Los jardineros tardan 10 días en arreglarlos, pero el gobierno de la ciudad considera que es mucho tiempo. ¿Cuántos jardineros se necesitan para que los parques estén listos en un día?

- d) Si las áreas de los tres rectángulos son iguales y las medidas de los lados son números naturales, indiquen la longitud de los lados de los rectángulos siguientes:



- e) A partir de las siguientes tablas indiquen, en cada caso, si los pares de valores son inversamente proporcionales, directamente proporcionales o no tienen ninguna relación de proporcionalidad. Para cada tabla inventen un problema que se modele con esos datos.

X	9	10	11	12	13
Y	2	3	4	5	6

X	4	6	20	36	180
Y	90	60	18	10	2

X	6.25	20	12.5	50	25
Y	16	5	8	2	4

X	2.5	7	9.5	15.5	21.25
Y	5	14	19	31	42.5

- ❖ Comparen sus respuestas con sus compañeros. Intercambien con otros equipos los problemas que inventaron. Revisen y resuelvan los que les asignen sus compañeros.



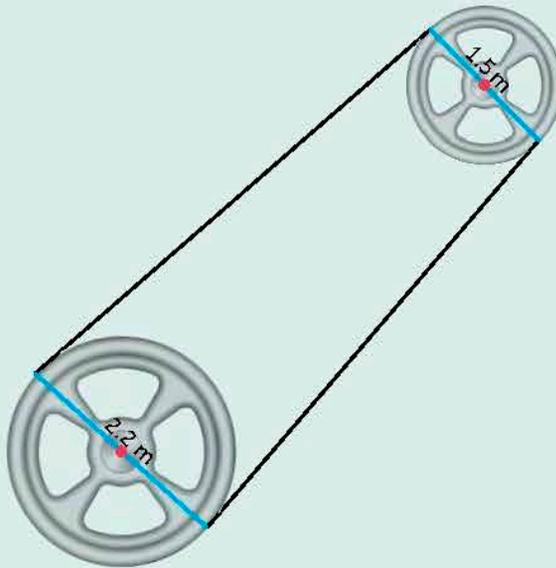
1. Lee nuevamente la situación inicial.

Francisco piensa instalar el mismo sistema de recolección de agua de lluvia en su fábrica. Para su casa, escogió la tubería que tarda 7.5 minutos en llenar el tinaco de 600 L, y para la fábrica considera que es mejor una tubería que arroje 120 L por minuto.

- ¿En cuántos minutos se llenará el tinaco de 600 L de la fábrica?
- Si quiere comprar otro tinaco en la fábrica para que se llene en 12.5 minutos, ¿qué capacidad debe tener?

2. Resuelve los siguientes problemas. Explica tus respuestas e indica si se trata de una relación de proporcionalidad directa o inversa.

- Un tren de carga que viaja a una velocidad de 85 km/h tarda tres horas y veinte minutos en realizar el viaje de ida entre dos ciudades cercanas. ¿Cuánto tardará el viaje de regreso si aumenta su velocidad a 100 km/h?
- Dos ruedas de una maquinaria industrial están unidas por una correa transmisora, como se muestra en la figura. Si la rueda menor da 220 vueltas, ¿cuántas dará la rueda mayor?



- Con las provisiones de follaje, un granjero puede alimentar en el invierno a 36 vacas durante 2 meses. ¿Cuántas de ellas debe vender para poder alimentar al resto durante 3 meses?
- Seis cosechadoras han segado un campo de 36 hectáreas en tres horas. ¿Cuántas cosechadoras serán necesarias para segar el mismo campo en 2 horas?

❖ Reúnete con tus compañeros y revisen los procedimientos que emplearon para resolver los problemas. Expliquen cómo interpretaron los datos y los contenidos de otros temas que tuvieron que recordar y cómo los utilizaron en la solución.



Explora

En la siguiente página www.edutics.mx/U8w encontrarás otros problemas que se resuelven con proporcionalidad inversa.



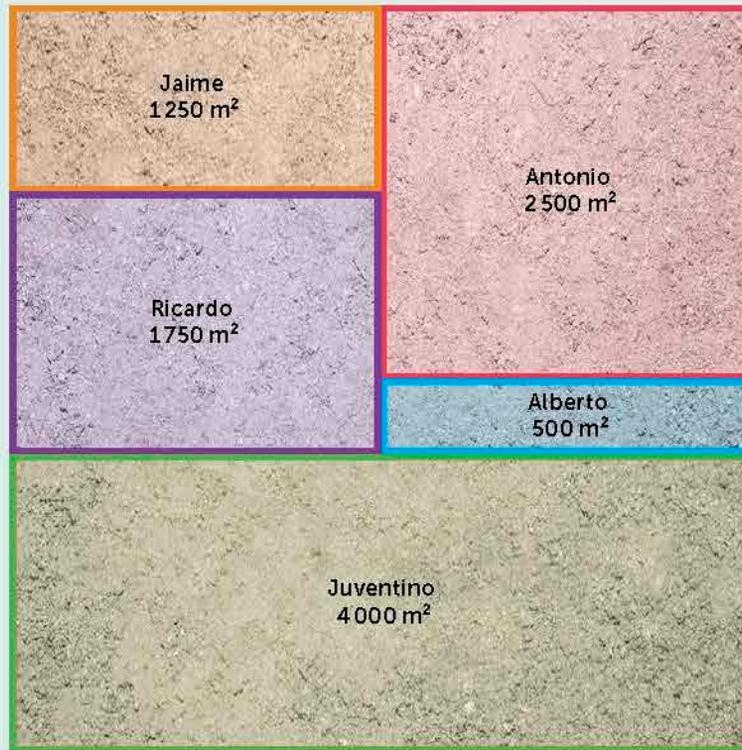
Resuelve problemas de reparto proporcional.

En cursos anteriores aprendiste a resolver problemas de reparto equitativo. Pero, en ocasiones, este tipo de reparto no considera ciertas situaciones especiales; por ejemplo, repartir un premio económico entre los tres primeros lugares de una carrera de acuerdo con el lugar obtenido. En esta secuencia estudiarás cómo son los repartos que se utilizan en situaciones de este tipo.

Partimos

1. Analiza el siguiente problema y resuelve.

Una ONG desea ayudar a familias que por circunstancias ajenas a su voluntad no han podido comprar maíz para sembrar. Para ello, ha donado 20 kg de semillas de maíz que alcanza para sembrar en 1 ha de terreno. En primera instancia la ONG decidió repartir los kilogramos de forma equitativa entre los jefes de familia sin importar el tamaño de su parcela.



- ¿Cuánto suman los terrenos de los campesinos en metros cuadrados?
- ¿Es suficiente el maíz que donó la ONG?
- De acuerdo con el tamaño de las parcelas, ¿a quién le sobrarán semillas?
- ¿A quién crees que le van a faltar semillas?
- ¿Consideras que la forma de repartir es adecuada? Explica.

❖ Discute con el resto del grupo: ¿de qué otra forma se les ocurre que podrían repartir el grano? ¿Qué otros factores se pueden tomar en cuenta? Traten de encontrar una forma de repartir el maíz de modo que la cantidad sea adecuada con el tamaño de la parcela.

Glosario

ONG. Siglas de Organización no gubernamental. Se trata de entidades de iniciativa social y fines humanitarios, que son independientes de la administración pública y que no tienen afán lucrativo.

Somos

Reflexiona: ¿un reparto equitativo es un reparto justo en todos los casos?

Repartos justos

1. Reúnete con un compañero, analicen y contesten.

a) Raquel y Benjamín quieren ganar algo de dinero para la excursión de fin de año de la escuela. Deciden vender esquites en el parque los domingos. Para comprar todos los ingredientes necesarios Raquel aporta \$125 y Benjamín, el doble. Benjamín trabaja el doble de tiempo que Raquel y al terminar el día obtienen una ganancia de \$1125.

- ¿Creen que es justo que la ganancia se reparta en cantidades iguales? ¿Por qué? _____
- Completen la siguiente tabla para calcular cómo incrementaron las inversiones de cada uno.

	Inversión (\$)	Ganancia (\$)
Benjamín	250	
Raquel	125	
Total	375	1125

- ¿Cuál fue la ganancia por cada peso invertido? Expliquen cómo la obtuvieron.

- ¿En cuánto incrementaron las inversiones de Benjamín y de Raquel por separado? _____
- Si Benjamín invirtió el doble de dinero que Raquel, ¿cómo debería ser su ganancia respecto a la de Raquel? _____
- ¿Cuánto dinero le corresponde a cada uno de ganancia? _____

❖ Reúnanse con otras parejas y comparen su respuesta. Comenten cómo determinaron la cantidad que le toca a cada uno. Una vez que estén de acuerdo con la respuesta, discutan: un alumno de otro equipo dice que se ganaron \$2 por cada peso invertido, ¿es correcta esta afirmación? Argumenten su respuesta.

2. Resuelvan en equipos.

a) Ricardo, Julián y Jesús fueron contratados para darle mantenimiento a un parque y les pagaron \$1800. Ricardo trabajó 4 horas; Julián, 5 horas y Jesús, una hora. Entre los tres decidieron repartirse el pago de acuerdo con el número de horas que cada uno trabajó.

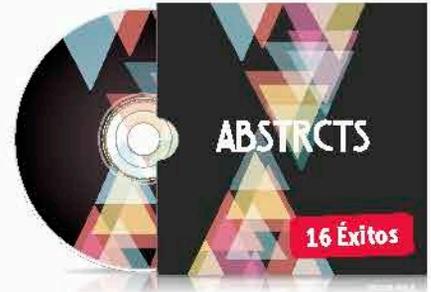
- ¿Quién creen que cobrará más? ¿Por qué?

- Completen la tabla de la derecha para saber el pago que recibió cada uno.
- ¿Cómo hicieron para repartir el dinero? _____

Nombre	Tiempo trabajado (h)	Pago (\$)
Jesús	1	
Julián	5	
Ricardo	4	
Total		

- ¿Existe una relación de proporcionalidad directa entre el tiempo trabajado y el pago recibido? En caso afirmativo, ¿cuál sería la constante de proporcionalidad? _____
- b) Un grupo de rock formado por cuatro integrantes sacó a la venta su primer CD. Por cada CD vendido la disquera les otorga cierta ganancia que, de acuerdo con el contrato, debe repartirse entre cada integrante dependiendo del número de canciones que cada uno compuso.
 - Completen la siguiente tabla.

	Número de canciones	Ganancia (\$)
Integrante A	7	
Integrante B	5	
Integrante C	3	42
Integrante D		
Total		



- ¿Cuánto gana un integrante por una canción? _____
- ¿Cuántas veces es superior la ganancia del integrante B a la del D? _____
- ¿Existe la misma relación proporcional entre las canciones compuestas y la ganancia recibida entre los integrantes A y B? Argumenten. _____

❖ Expliquen al resto del grupo cómo son los repartos en los problemas anteriores y cuál es su característica principal. Si hay diferencia en los resultados, revísenlos para llegar a un acuerdo.



Un reparto proporcional directo consiste en dividir una cantidad en varias partes, las cuales guardan una relación de proporcionalidad con otras. El reparto es de proporcionalidad directa porque a mayor cantidad corresponde, por tanto, mayor proporción y viceversa.



52 lápices

Valor unitario

- Resuelve los siguientes problemas.
 - A Laura, Cecilia y Maru les regalaron varios lápices de colores. A Laura se le ocurrió repartirlos de acuerdo con sus edades, ya que considera que entre mayor sea el grado escolar en el que estudian ocuparán mayor cantidad de colores en sus tareas y trabajos. Las edades de las niñas son 10, 9 y 7 años, respectivamente. Observa el esquema que hicieron y contesta.

Laura										
Cecilia										
Maru										

- ¿Qué representa cada fila de la tabla? _____
- ¿Cuánto suman en total las edades de las niñas? _____
- Cecilia marca cada casilla con un rayita para representar cada lápiz que les toca por año, ¿cuántas rayitas habrá en una casilla? ¿Cómo puedes calcularlo sin utilizar la tabla? _____
- ¿Cuántos lápices le tocan a cada niña? _____

b) Juan, Pedro y Carlos están juntando las estampas del mundial de futbol. Su abuelo compró 50 estampas y decidió repartirlas entre sus tres nietos de acuerdo con el número de horas que dedicaron a la lectura en una semana. Juan leyó seis horas, Pedro tres horas y Carlos una hora.

- ¿Cuántas horas leyeron en total los 3 niños? _____
- ¿Cuántas estampas corresponden a cada hora leída? Explica cómo lo calculaste.

- ¿Cuántas estampas le toca a cada uno? _____

c) Carolina y Rubén son empleados de una escuela y al finalizar el ciclo escolar reciben una gratificación de \$3 500, que se reparte de acuerdo con los años que llevan trabajando. Carolina lleva 5 años y Rubén 2.

- ¿Cuánto recibirá un compañero que lleva un año trabajando? _____
- ¿Cuánto dinero recibió Carolina? ¿Cómo lo calculaste? _____

d) En la kermés de la escuela, Antonio y Eugenia compraron un boleto para una rifa de entradas para el cine. Cada uno aportó una cantidad distinta para comprar el boleto.



El boleto salió premiado y Antonio se quedó con 15 pases y Eugenia con 10. El dinero que aportaron tiene una relación de proporcionalidad directa con el número de pases que se ganó cada uno.

- ¿Cuánto dinero aportaron Antonio y Eugenia para comprar el boleto?

- ¿De cuántas entradas consistía el premio? _____
- ¿Cuánto dinero invertido corresponde a cada pase? _____
- Verifica que corresponda con lo que calculaste anteriormente.

- ❖ Compara tus respuestas y tus procedimientos con los de algún compañero. Si tienen resultados diferentes analicen si se deben a interpretaciones distintas de cada problema o a errores numéricos.



Ya que el reparto proporcional directo, como su nombre lo indica, representa una relación de proporcionalidad directa es posible resolverlo empleando los mismos procedimientos que se utilizan para esta última. Por ejemplo, encontrar el valor unitario y a partir de él calcular las otras partes. Recuerda que el valor unitario puede obtenerse al calcular el cociente de la razón entre cualesquiera dos cantidades correspondientes.

De manera general: si N es la cantidad a repartir en tres partes (A , B y C) proporcionales con los valores a , b y c , entonces se tienen las siguientes relaciones y razones:

$$\begin{array}{l} A \longleftrightarrow a \\ B \longleftrightarrow b \\ C \longleftrightarrow c \\ N \longleftrightarrow a + b + c \end{array} \quad \frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c} = \frac{N}{a + b + c}$$

Notación



Recuerda que una razón entre dos números, a y b , se puede representar usando el símbolo $:$ o por medio de una fracción.

$$\frac{a}{b} \text{ o } a : b$$

Conservar razones internas

- Analicen en parejas los problemas y respondan.

- Para crear pintura verde, un artista mezcla pintura azul y amarilla en dos partes que están a razón 2:6. Si quiere producir 400 mL de pintura verde, ¿cuánta pintura azul y cuánta amarilla tiene que mezclar?

- Completen la siguiente tabla con los datos del problema.

	Partes	Mililitros
Pintura azul	2	
Pintura amarilla	6	
Pintura verde		400

- ¿Cuál es la razón entre las partes de pintura azul y las partes de pintura verde?
- ¿Cuál debe ser la razón entre los mililitros de pintura azul y los de pintura verde?

- ¿Existe la misma razón entre los mililitros de pintura amarilla y azul que entre las partes de pintura amarilla con las de pintura verde? ¿Por qué?

b) Repartan 84 en tres partes que guarden entre sí la razón 5:4:3.

- ¿En cuántas partes se va a dividir 84? _____
- ¿Cuál es el valor correspondiente a cada parte para que guarden entre sí la misma razón 5:4:3? _____

❖ Comparen sus respuestas con otras parejas. ¿Cómo utilizaron las razones entre cantidades de una misma columna de la tabla? Con la ayuda del resto del grupo hagan un recordatorio de todas las características que cumplen los conjuntos de datos que son directamente proporcionales y señalen cómo pueden emplearlas para resolver los problemas de reparto.



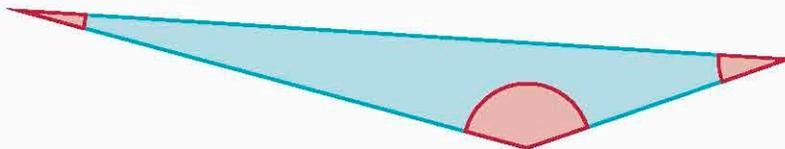
De manera general: si N es la cantidad a repartir en tres partes (A , B y C) proporcionales con los valores a , b y c ; entonces, las razones entre las cantidades de un conjunto son iguales a las razones correspondientes en el otro. Se muestran algunas:

$$\begin{array}{l}
 A \longleftrightarrow a \\
 B \longleftrightarrow b \\
 C \longleftrightarrow c \\
 N \longleftrightarrow a + b + c
 \end{array}
 \qquad
 \frac{A}{B} = \frac{a}{b} \qquad \frac{B}{C} = \frac{b}{c} \qquad \frac{c}{a+b+c} = \frac{C}{N}$$



Integración

- Identifica en las cantidades anteriores otras razones entre los elementos de un mismo conjunto y sus correspondientes. _____
- Calcula la medida de los ángulos interiores de un triángulo de modo que guarden entre sí la razón 1:2:9. ¿Cuánto mide el ángulo más grande? _____



5. Resuelvan en grupo los siguientes problemas.

- a) En la biblioteca de la delegación hay 800 libros de los siguientes géneros literarios: ciencia ficción, aventuras, policiaco e histórico. La razón que guardan entre sí es de 6:3:5:2. ¿Cuántos libros hay de cada género?



b) Jorge, Mauricio y Adriana tienen 10 manzanas y se las repartieron de esta manera: a Jorge le tocaron 2, a Mauricio 6 y a Adriana el resto. Al día siguiente les dieron 25 naranjas y decidieron repartirlas en la misma razón que las manzanas.

¿Cuántas naranjas le tocaron a cada uno? _____

c) La delegación hará una donación de 1620 tabletas electrónicas que repartirá en 3 escuelas. El número de tabletas otorgadas a cada escuela depende del número de alumnos inscritos en ellas. La escuela A tiene 300 alumnos, la B, 360 y la C, 690. Las siguientes tablas muestran distintas posibilidades de reparto de las tabletas.

Escuela	Alumnos	Tabletas
A	300	392
B	360	400
C	690	828

Escuela	Alumnos	Tabletas
A	300	360
B	360	432
C	690	828

Escuela	Alumnos	Tabletas
A	300	374
B	360	446
C	690	800

• ¿Cuál de las tablas representa el reparto adecuado de las tabletas?

• Expliquen cómo tomaron esa decisión. _____

d) Arturo, Diego y Alejandro organizaron un club de matemáticas para ayudar a sus compañeros más pequeños. Diego trabajó 4 horas; Arturo, 5 y Alejandro, 8. El dinero que ganaron se lo repartieron de acuerdo al número de horas trabajadas. Alejandro ganó \$600 más que Diego.

• ¿Cuántas horas trabajó más Alejandro que Diego? _____

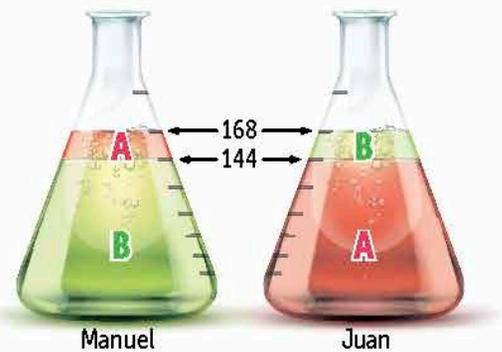
• ¿Cuánto dinero debe ganar Alejandro en relación con Diego? _____

• ¿Cuánto dinero ganó cada uno? _____

e) En un laboratorio de química mezclan 2 reactivos A y B en una razón de 6:1. Antes de preparar la mezcla de 168 mL para un experimento, el profesor les pide a Juan y Manuel que escriban cuántos mililitros tienen que poner de cada uno de los reactivos, indicando la altura a la que llegaría el líquido en el matraz.

• ¿Cuál es la respuesta correcta?

• ¿Cuál fue el error del alumno que no tiene la respuesta correcta? _____



✚ Discutan con el resto del grupo las ventajas de cada uno de los procedimientos que se han estudiado para hacer un reparto proporcional.



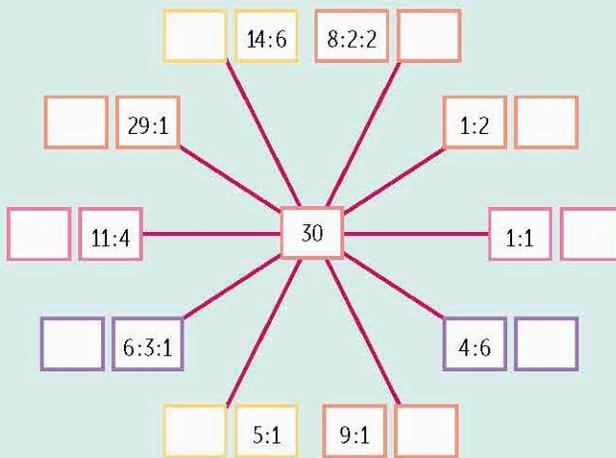
1. Analiza nuevamente el problema que se encuentra al inicio de la secuencia.
 - a) Una forma justa de repartir los 20 kg de maíz es de acuerdo al tamaño de la parcela. ¿Qué cantidad de maíz le corresponderá a 1 m² de terreno?
 - b) Completa la tabla para saber cuántos kilogramos de semilla de maíz le toca a cada campesino.

Jefe de Familia	Tamaño de la parcela (m ²)	Cantidad de maíz (kg)
Antonio	2 500	
Juventino	4 000	
Alberto	500	
Ricardo	1 750	
Jaime	1 250	



En la siguiente página www.edutics.mx/U8L podrás resolver otros problemas de reparto proporcional.

2. Resuelve los siguientes problemas.
 - a) Al terminar unas entrevistas, Diana, Patricia y Natalia recibieron \$ 6 000. Diana hizo 2 entrevistas y cobró \$ 800, Patricia hizo 5 entrevistas y Natalia las otras.
 - Si cada entrevista se paga de la misma forma, ¿cuánto cobró Patricia?
 - ¿Cuántas entrevistas hizo Natalia y cuánto le pagaron?
 - b) Un padre de familia decide repartir el premio de un billete de lotería entre sus cuatro hijos de acuerdo con sus edades. El premio fue de \$36 000 y las edades de sus hijos son 10, 14, 16 y 20. ¿Cuánto le toca a cada uno?
3. Completa el siguiente esquema dividiendo 30 en las razones que se te pide.



- ❖ Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Explica que procedimiento empleaste para calcular los repartos. Juntos investiguen otros contextos en los que se puedan plantear problemas de reparto proporcional e inventen algunos. Cuiden que la redacción sea clara para que sus compañeros los puedan resolver.

Representaciones tabular, gráfica y algebraica de la proporcionalidad inversa

Analiza y compara situaciones de variación lineal y proporcionalidad inversa, a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica.

Al inicio de este bloque, en la secuencia 13, estudiaste situaciones de proporcionalidad inversa. Así como en primer grado de secundaria analizaste las diversas representaciones de la variación lineal; en esta secuencia analizarás situaciones de variación proporcional inversa a partir de la elaboración e interpretación de gráficas, tablas y representaciones algebraicas.

Partimos

1. Analiza la siguiente situación y contesta.

Ana María entrena para el maratón de su ciudad; hace una caminata diaria. Los datos que le dio su aplicación móvil el último día de entrenamiento son los siguientes.



- ¿Cuánto tiempo tardará en hacer el mismo recorrido pero aumentando la velocidad a 7 km/h?
- Encuentra una expresión algebraica que te ayude a calcular el tiempo (t) que tardará en hacer el mismo recorrido al aumentar la velocidad (v).

❖ Compara tus respuestas y razonamientos con los de tus compañeros. ¿Qué procedimiento siguieron para resolver el problema?

Recorremos

Representación tabular y algebraica

Albañiles	Tiempo (días)
x	y
2	
3	
6	
8	
12	
16	

1. Resuelvan en parejas el siguiente problema.

En la secuencia 13 (p. 115), analizaron el problema de dos albañiles que tardan 12 días en construir un muro. Expresen con x el número de albañiles y con y los días por trabajar.

- Completen la tabla de la izquierda, en la que se relaciona el número de albañiles y el tiempo que tardarán en terminar el muro.
- Respondan: ¿cómo calcularon los días a partir del número de albañiles?

- ¿Cuál es la constante de los datos en la tabla? _____
- ¿Qué expresión algebraica muestra la variación del tiempo (y) que tardan en hacer el muro con respecto al número de albañiles (x)? Expliquen su respuesta.



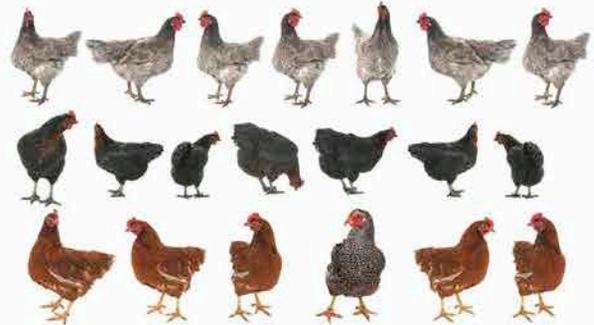
Recuerda

En la secuencia 13 también estudiaste cómo obtener la constante de proporcionalidad inversa.

❖ Comparen sus respuestas con el resto del grupo. ¿Cuál es la expresión algebraica que relaciona de forma general el número de albañiles (x), los días por trabajar (y) y la constante de proporcionalidad inversa? Analicen las expresiones que obtuvieron en el inciso d) y corrijan de modo que con ellas puedan llegar a la expresión anterior.

2. Analicen y resuelvan en equipos.

a) Benjamín tiene las gallinas que se muestran en la imagen y compró alimento para alimentarlas durante 40 días. Su vecino quiere venderle algunas, pero Benjamín necesita saber cuántas más puede comprar de modo que el alimento que ya tiene le alcance para 15 días.



- ¿Qué tipo de relación proporcional existe entre la cantidad total de gallinas y la cantidad de días que dura el alimento? _____

- ¿Cuál es la constante de proporcionalidad? _____
- ¿Cómo la obtuvieron? _____
- ¿Cuántos días le durará el alimento si compra 5 gallinas más? _____

Expliquen su respuesta. _____

- Representen con g el número de gallinas y con d los días que dura el alimento. Escriban una expresión algebraica que permita calcular los días que dura el alimento cuando varía la cantidad de gallinas.

- Sustituyan los valores de g en la expresión anterior y completen la tabla de la derecha.

- ¿Cuántas gallinas más puede comprar Benjamín? _____

b) Por una bolsa de alimento para las gallinas Benjamín paga \$227.50 y desea calcular cuánto vale cada kilogramo que compra.

- ¿Cuál es la constante de proporcionalidad en esta situación? Argumenten.

- Escriban la expresión algebraica que permita obtener el costo total (y) a partir de la cantidad de kilogramos (x). _____

- ¿Cuánto pagará por un costal de 40 kg? _____

g	d
20	40
25	
32	25
40	
50	
53	
64	



❖ Comparen sus respuestas con el resto del grupo. ¿Existe el mismo tipo de relación en los problemas de los incisos a) y b)? ¿Cómo lo identifican? ¿Cuáles son las diferencias entre las expresiones algebraicas obtenidas en cada inciso? ¿Cuáles son las variables dependientes e independientes en cada problema y cómo se relacionan en cada expresión algebraica?



La expresión $k = xy$ corresponde a la expresión algebraica general de una relación de proporcionalidad inversa, donde x es la variable independiente, y la variable dependiente y k es la constante de proporcionalidad inversa.

Aprendemos



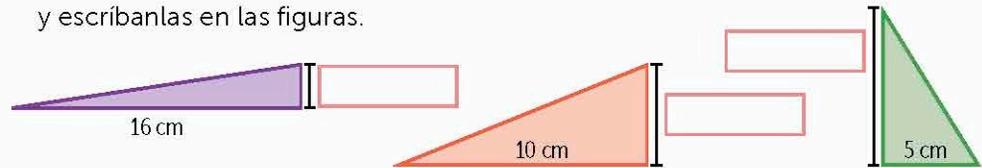
Cuando analizas una afirmación o expresión matemática, ¿cómo puedes comprobar su validez?



Integración

- En grupo resuelvan.

Para analizar cuántos triángulos cuya área sea de 20 cm^2 pueden existir, Felipe, Marcos y Santiago dibujaron cada uno un triángulo. Determinen las alturas y escribanlas en las figuras.



- ¿Cuántos triángulos más podrían dibujar? Expliquen su respuesta.

- Felipe asegura que cuando se fija el área de un triángulo y varían las medidas de la altura y la base, entre estas últimas existe una relación de proporcionalidad inversa que puede representarse por la expresión $h = \frac{20}{b}$.
¿Están de acuerdo? Argumenten. _____

Recuerda



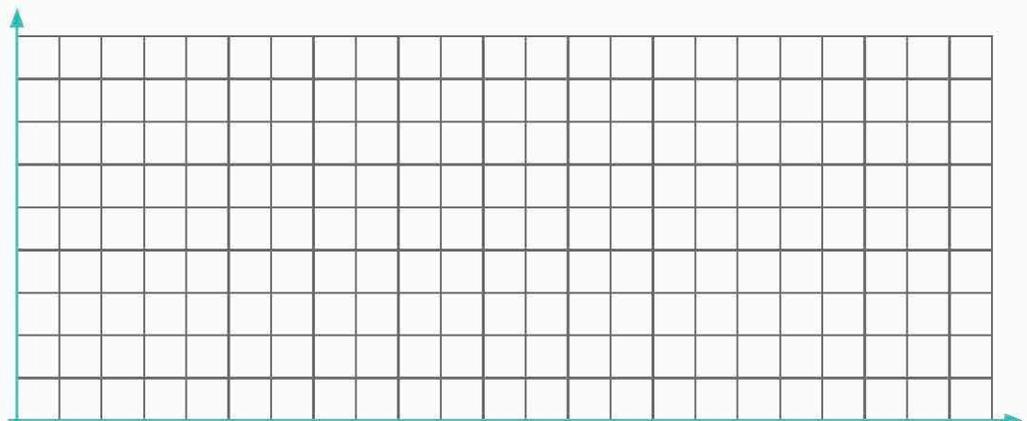
Al construir una gráfica elige una escala adecuada para cada eje e incluye títulos en la gráfica y en los ejes.

Representación gráfica

- Analicen y contesten en parejas.

- Una persona paga mensualmente a una compañía telefónica \$390 por el servicio de internet. Completen la información de los pagos acumulados durante seis meses en la tabla de la izquierda.
 - ¿Qué expresión algebraica pueden usar para calcular el pago que se hará en cualquier mes? _____
 - Elaboren la gráfica en el siguiente plano cartesiano.

Tiempo (meses)	Pago (\$)
1	390
2	
3	
4	
5	
6	



b) Olivia y sus amigos irán a un hospital a repartir despensas a la gente que esté cuidando a algún paciente. Entre otras cosas, repartirán 50 kg de azúcar en bolsas. Para ello necesitan decidir la capacidad de las bolsas y cuántas bolsas utilizarán.

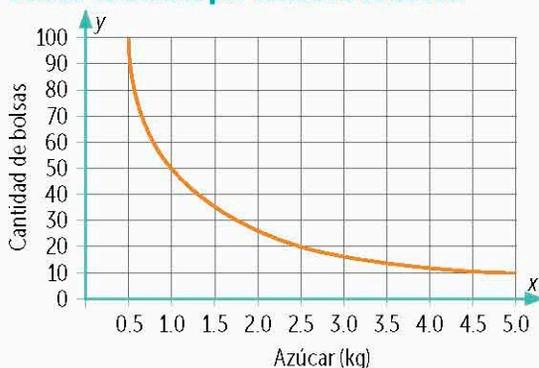
- Denoten con x a la cantidad de azúcar en kilogramos en cada bolsa y con y al número de bolsas en las que se puede repartir el total de azúcar. Completen la tabla de la derecha mostrando la variación de y con respecto a x .
- Escriban una expresión algebraica que modele la relación entre las variables de la tabla. _____
- Consideren los datos de la tabla como pares ordenados y ubíquenlos en el siguiente plano cartesiano.

x	y
0.50	
0.80	
1	
1.5	
2	
2.5	
3	
5	

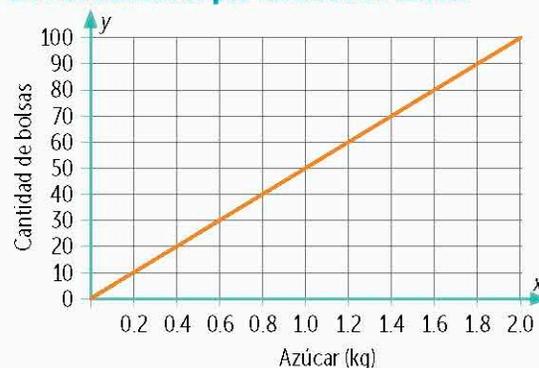


- Observen las siguientes gráficas y elijan la que se asemeja con la forma, en el plano anterior, de los puntos que representan a los datos de la tabla.

Bolsas utilizadas por cantidad de azúcar



Bolsas utilizadas por cantidad de azúcar



- Expliquen en qué se diferencia esta gráfica a la que se plantea en el inciso anterior. _____

❖ Reúnanse en equipos y muestren las gráficas que construyeron: ¿todos ubicaron de manera semejante las escalas en las gráficas? ¿A qué tipo de proporcionalidad hace referencia cada problema? ¿Qué forma tiene la gráfica que se asocia a una relación de proporcionalidad directa y a una de proporcionalidad inversa?

x	y
80	
40	
20	1
2	10
0.5	
0.2	
0.1	

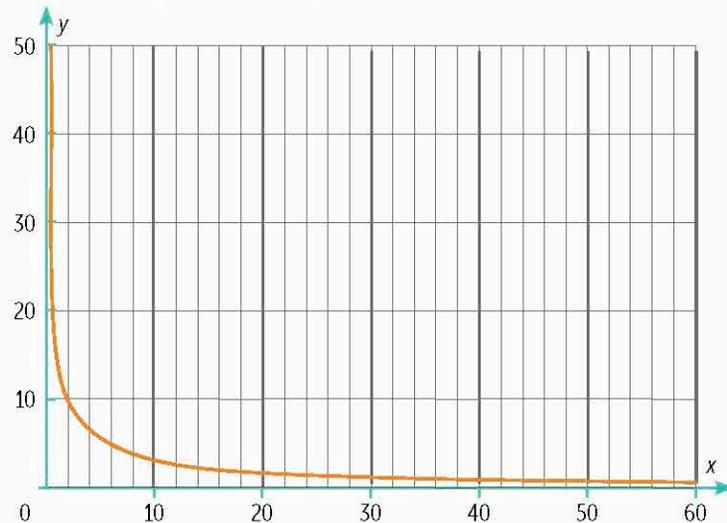
4. Resuelvan en equipos la siguiente actividad.

a) Completen la tabla de la izquierda que muestra la variación de y con respecto a x .

b) Escriban la expresión algebraica que modela dicha variación.

c) Analicen la siguiente gráfica e identifiquen algunos puntos de la tabla. ¿La gráfica representa los datos?

Variación de y respecto de x



• A partir de la gráfica obtengan los valores de y que corresponden con 10 y 5 en x .

• ¿Qué sucede en la gráfica con los valores de y cuando los valores de x se van haciendo cada vez más pequeños y se aproximan al 0?

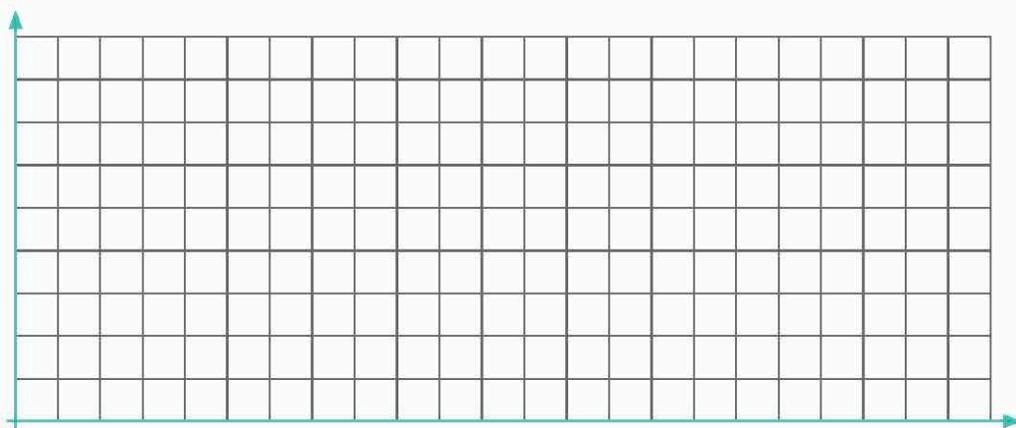
• ¿Qué sucede con los valores de y cuando los valores de x se van haciendo cada vez más grandes y se alejan del 0?

• ¿Es posible que x o y tomen el valor 0? Expliquen con detalle su respuesta algebraicamente y también mediante de la gráfica.

❖ Comparen sus respuestas y sus razonamientos con los de otra pareja. ¿Puede una de las variables tomar el valor de 0? ¿Qué significa que tome el valor de 0 en cualquier problema de los presentados? Comenten en qué intervalos las gráficas crecen o decrecen más rápido. ¿A qué se debe esto?

5. Considera nuevamente el problema de los albañiles y el muro.

Con los datos de la tabla de la página 130, elabora una gráfica en la que muestres la variación de y con respecto a x .



- ¿Para unir los puntos que ubicaste empleaste líneas rectas o una curva?

- ¿Cuál es la razón de cambio entre los puntos $(2, 12)$ y $(3, 8)$ de la gráfica anterior? _____ ¿Y para los puntos $(3, 8)$ y $(6, 4)$? _____
- ¿Se puede unir con una línea recta los puntos $(2, 12)$ y $(6, 4)$? ¿La razón de cambio es constante en ese intervalo? _____

- ¿A qué tipo de línea se asemeja el gráfico de la tabla? _____



Recuerda

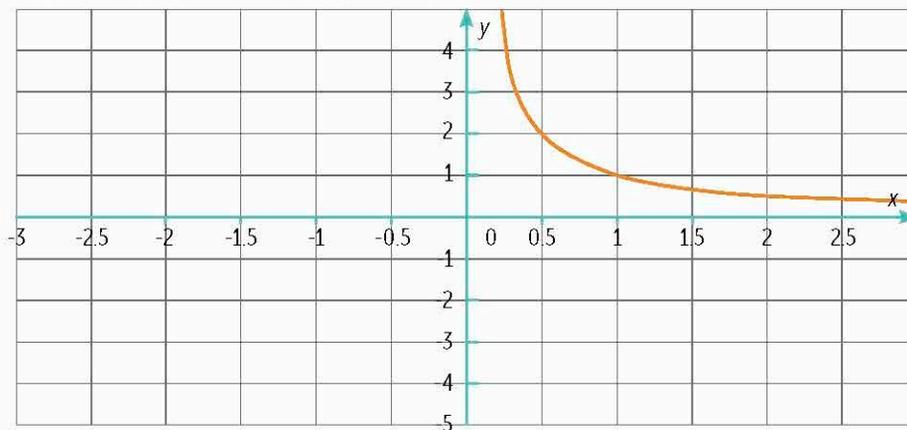
Recuerda que la razón de cambio es el cociente que resulta de dividir el cambio en la variable dependiente entre el respectivo cambio en la variable independiente. Dicho cambio se halla a partir de la resta entre una magnitud final y una inicial.

❖ Reúnete con tus compañeros y expliquen lo que observan en las gráficas. ¿Cómo es la razón de cambio en la gráfica de una línea recta? En el contexto de los albañiles, ¿tiene sentido considerar números decimales para los valores de x ? ¿Por qué?

6. Resuelvan en equipos el siguiente problema.

La siguiente gráfica muestra la variación del factor y con respecto al factor x cuando el producto de dos números es 1.

Producto de dos números cuyo resultado es 1



x	y
2	
1	
0.5	
0.25	

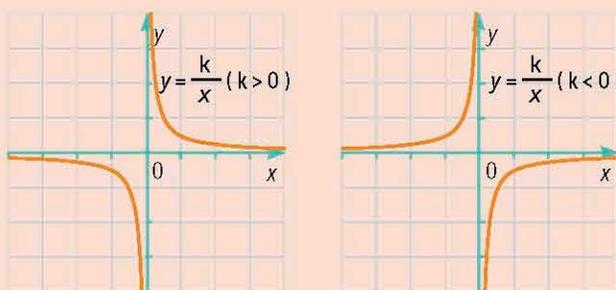
- Completan las primeras cuatro filas de la tabla de la izquierda con los valores de la gráfica.
- Escriban la expresión algebraica que modele la variación de y con respecto a x .

- ¿En este contexto x y y pueden tomar valores negativos? Expliquen su razonamiento. _____
- Completan la tabla con los simétricos de los valores dados para x y calculen los correspondientes valores de y .
- Tracen la respectiva gráfica en el plano cartesiano de la página anterior.

- ❖ Comparen sus respuestas con el resto del grupo. De las tablas y gráficas anteriores, si uno de ustedes sólo elige valores positivos en x y el otro sólo valores negativos, ¿las gráficas serían iguales? ¿Es posible usar valores negativos para todas las situaciones presentadas?



La gráfica de una variación de proporcionalidad inversa es una curva con dos ramas llamada hipérbola, que no pasa por el origen y no cruza a los ejes x y y .



En ocasiones, la situación particular de variación proporcional inversa que se trabaja hace que la gráfica tenga una sola de las ramas.

Explora



Utiliza una hoja de cálculo, y a partir de los datos de alguna de las tablas que representan una relación de proporcionalidad inversa de esta secuencia genera una gráfica. En el siguiente enlace www.edutics.mx/UBL puedes observar un video de cómo hacerlo.



Integración

- Considera las expresiones $y = \frac{50}{x}$ y $y = 50x$
 - Plantea un problema que se modele con cada expresión algebraica.

 - Construye una tabla para cada expresión asignando valores a x (dependiendo del problema que hayas planteado) y encuentra los correspondientes para y .
 - Traza un plano cartesiano y ubica los puntos de cada tabla.
 - Elige tres pares de puntos y calcula la razón de cambio de la gráfica correspondiente a la primera tabla. ¿Cuál es? _____
 - ¿Las razones de cambio son iguales o distintas? _____

f) Elige tres pares de puntos y calcula la razón de cambio de los valores en la gráfica para la segunda tabla. ¿Cuál es? _____

- ¿Con qué trazo unirías los puntos en cada una de las gráficas? Argumenta. _____



1. Retoma la situación al inicio de la secuencia y contesta.

- Escribe la expresión algebraica para calcular el tiempo (t) con respecto a la velocidad (v).
- Construye una tabla que muestre la variación del tiempo (y) con respecto a la velocidad (x) y elabora una gráfica con esa información.

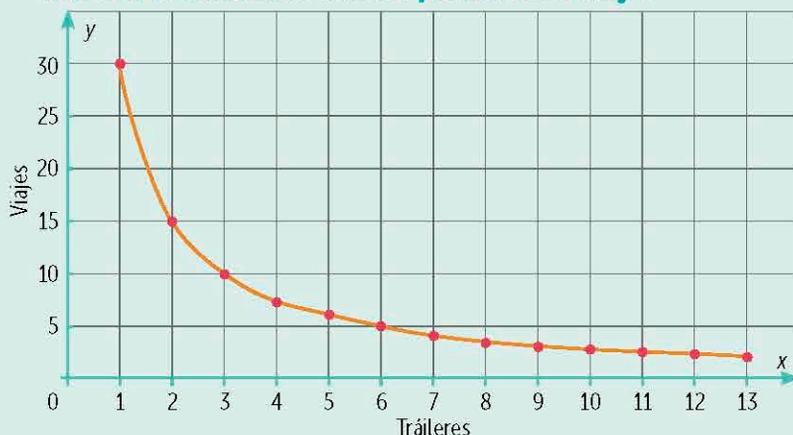
2. Construye una tabla y una gráfica para la expresión $y = \frac{5}{x}$. Considera números positivos y negativos.

- ¿Cómo será la gráfica resultante?
- Con una hoja de cálculo elabora la gráfica. ¿Coincidió tu anticipación de la forma de la gráfica?

3. Resuelve el siguiente problema.

El tráiler de un supermercado deberá hacer 30 viajes para transportar cierta carga de una tienda a otra. La gráfica muestra la variación de los viajes que tendrá que hacer con respecto al número de tráileres de más que pudieran ocupar.

Relación de cantidad de tráileres por número de viajes



- A partir de la información de la gráfica elabora una tabla que muestre la variación de los viajes a realizar (y) con respecto al número de camiones (x).
- Escribe la expresión algebraica que muestre la variación de y con respecto a x .
- ¿En este contexto tiene sentido considerar números decimales para x ?

❖ Compara tus respuestas y gráficas con el resto de tus compañeros.



En la siguiente página www.edutics.mx/UB2 podrás resolver algunos ejercicios interactivos sobre proporcionalidad inversa y su gráfica.

Otros problemas de proporcionalidad inversa

Interpreta y resuelve problemas que se modelan con variación inversamente proporcional, incluyendo fenómenos de la física y otros contextos.

Partimos

En la secuencia anterior estudiaste la proporcionalidad inversa a través de su expresión algebraica, analizando una tabla de variación y su gráfica. En esta secuencia interpretarás y resolverás problemas asociados a la ciencia, así como otros fenómenos que se modelan con este tipo de variación.

1. Analiza la siguiente situación y contesta.

Según se cuenta, en el siglo III a. C., Hierón II de Siracusa encargó a Arquímedes determinar si la corona que mandó hacer a un orfebre era de oro puro o si el oro había sido mezclado con plata. Un día, Arquímedes ensimismado en este problema, al darse un baño de tina observó que al entrar en ella el agua se desplazaba hacia arriba; con ello descubrió que podía calcular el volumen de la corona. De ahí la famosa frase "Eureka" que significa "Lo he encontrado". Para calcular el volumen del objeto lo colocó en un recipiente con agua, y en otro recipiente con las mismas características, un lingote de oro con igual masa que la corona. Esperaba que al sumergir ambos desplazaran la misma cantidad de agua, pero esto no ocurrió.

A la relación que es directamente proporcional a la masa e inversamente proporcional al volumen se le conoce como densidad. La siguiente imagen muestra la densidad de algunos materiales o sustancias en g/cm^3 .



- Escribe una expresión algebraica que muestre la relación entre la masa (m) y la densidad (d) con respecto al volumen (V).
- Si una corona de oro puro tuviera una masa de 1 kg, ¿qué volumen ocuparía?
- ¿Cómo cambia la densidad de los cuerpos con la misma masa y distinto volumen?

❖ Compara tus respuestas y procedimientos con tus compañeros. ¿Las expresiones algebraicas fueron iguales? Para verificar sus respuestas, busquen cuál es la fórmula para calcular la densidad. En el inciso b, ¿fue necesario hacer alguna conversión de unidades?

Proporcionalidad inversa y fenómenos físicos cotidianos

1. Resuelvan en equipos los siguientes problemas.

a) Irene está entrenando para una carrera de 9 km. Con la intención de planear su entrenamiento decide calcular el tiempo que le toma correr los 9 km a una velocidad promedio. En la tabla se muestran algunas velocidades a las que podría correr Irene.

Velocidad (km/h)	Tiempo (h)
3	3
5	
6	
9	
12	
15	
18	

- Representando como v a la velocidad de Irene y como t al tiempo que tarda en recorrer la distancia, escriban una expresión algebraica que muestre cómo varía el tiempo cuando cambia la velocidad. _____
- De la expresión algebraica anterior, ¿qué valor es constante? _____
- ¿Es necesario que Irene recorra los 9 km con la velocidad que se indica en cada fila de la tabla para calcular el tiempo que le llevará hacerlo? ¿Por qué? _____
- Completen la tabla escribiendo los datos faltantes.
- ¿Qué sucede con el tiempo si el mismo recorrido lo hace un caracol que se mueve a 0.05 m/s? _____
- ¿Qué sucede con el tiempo si se transportara en un helicóptero que se mueve a 265 km/h? _____
- ¿Qué sucede con el tiempo al aumentar la velocidad? _____

b) En los hogares mexicanos los tomacorrientes tienen una salida de 120 volts, en promedio. En general los aparatos eléctricos y electrónicos funcionan con diferentes intensidades de corriente eléctrica, que son directamente proporcionales al voltaje e inversamente proporcionales a la resistencia. A esta relación entre unidades se le conoce como ley de Ohm. La intensidad de corriente eléctrica se mide en amperes (A), la resistencia se mide en ohms (Ω) y el voltaje en volts (V).

- Considerando el voltaje como $V = 120$ V, la intensidad de corriente como I , y a la resistencia como R escriban una expresión algebraica que represente la ley de Ohm. _____
- La siguiente tabla comparativa muestra la variación de la intensidad de corriente (I) y la resistencia (R) de focos con diferente potencia eléctrica, medida en watts, W.

Potencia del foco (W)	Resistencia (Ω)	Intensidad (A)
0.07 (led de serie navideña)	206 897	0.00058
7	2 069	0.058
13	1 111	0.108

Explora

Una máquina de toques puede regular la intensidad de corriente, por ejemplo, la corriente de 0.001 A es perceptible para el cuerpo humano y la corriente de 0.005 A provoca dolor. Si deseas saber más sobre electricidad y la ley de Ohm consulta el siguiente libro (disponible en www.edutics.mx/U24): Francisco Manuel Hernández Acevedo, *Y se hizo la luz. Voltaje, corriente y potencia eléctrica*, México, SEP, 2016.

Potencia del foco (W)	Resistencia (Ω)	Intensidad (A)
40	360	0.333
60	240	0.5
100	144	0.833

- ¿Cómo es el valor del voltaje para cada foco? _____
- ¿Cuál es el valor de la intensidad de corriente si se tiene una resistencia de $\frac{1}{8}$ de ohm? _____
- ¿Qué sucede si el valor de la resistencia se acerca a 0? _____

- ¿La resistencia R puede tener el valor 0? Expliquen su respuesta, tanto algebraicamente como en relación con el contexto. _____

❖ Comparen sus respuestas y sus razonamientos con los de otros compañeros. ¿Qué sucede cuando el valor de la velocidad (inciso a)) o el de la resistencia (inciso b)) se acerca mucho al valor de 0? ¿Qué sucede cuando el valor de la velocidad o el de la resistencia se incrementan mucho?

2. Analicen en parejas y contesten.

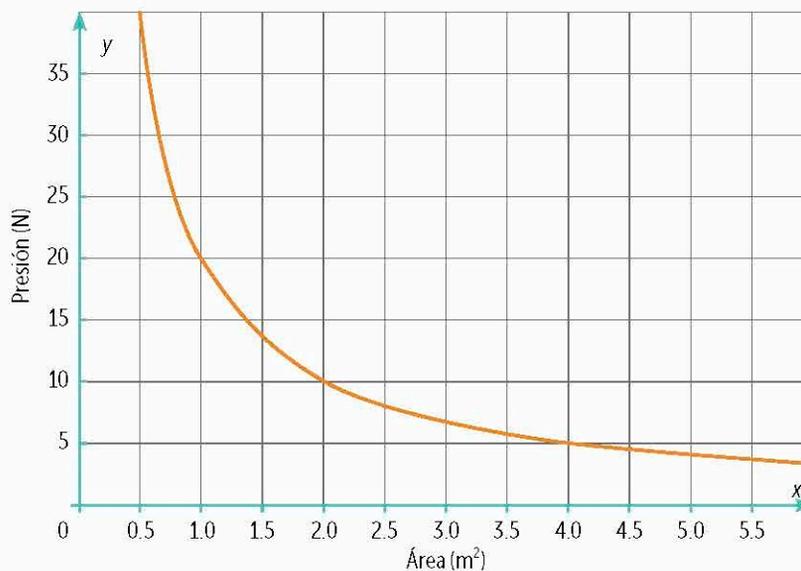
- a) El funcionamiento del brazo hidráulico de una retroexcavadora se basa en el concepto de presión. Ésta se define como la fuerza ejercida sobre unidad de área y se mide en **newtons** sobre metros cuadrados. La siguiente gráfica muestra la variación de la presión debido a la fuerza de 20 N al modificarse el área sobre la que se ejerce dicha fuerza.

Glosario



newton. Unidad de medida de la fuerza, su símbolo es N.

Relación entre la presión y el área



- Considerando la presión como P , a la fuerza como F y al área como A , escriban una expresión algebraica que exprese cómo varía la presión cuando el área se modifica. _____
- ¿Cuál es la presión cuando se ejerce la fuerza sobre un área de 0.005 m^2 ? _____
¿Y cuando es de 5 m^2 ? _____
- ¿Qué sucede cuando el valor del área se acerca a 0? _____
- ¿Cómo pueden relacionar lo anterior con el hecho de que sea más fácil clavar en la pared un clavo por la punta que por la cabeza? _____

b) El espectro electromagnético se define como el conjunto de ondas de las radiaciones electromagnéticas. Dentro de éste se encuentra una parte visible para el ojo humano en la que la **frecuencia** (f) de onda es directamente proporcional a la velocidad de la luz ($v = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$) e inversamente proporcional a la **longitud de onda** (λ) y se expresa mediante $f = \frac{v}{\lambda}$. Algunas longitudes de onda del espectro visible se muestran en la tabla.

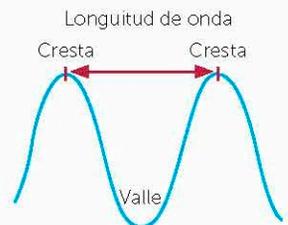
Color	Longitud de onda (nm)	Frecuencia (Hz)
Rojo	618-780	
Naranja	581-618	
Amarillo	570-581	
Verde	497-570	
Cian	476-497	
Azul	427-476	
Violeta	380-427	

- Escriban una expresión algebraica que muestre la variación de la frecuencia respecto de la longitud de onda. _____
- Calculen el intervalo de frecuencias para los colores rojo y violeta.
- ¿Cómo cambian los valores de la frecuencia al pasar del violeta al rojo? _____
- Coloquen una punta de flecha al segmento para indicar el sentido creciente en la columna frecuencia.
- Ya que la frecuencia de la onda determina el color y considerando el significado de los prefijos *infra* y *ultra*, expliquen por qué las ondas, que ya no son visibles para el ojo humano, de menos de $4 \times 10^{14} \text{ Hz}$ se llaman infrarrojas y las de frecuencia mayor que $8 \times 10^{14} \text{ Hz}$, se llaman ultravioleta.



Glosario

frecuencia. Cantidad de veces que se repite una onda en un segundo. Su unidad de medida es el Hertzio (Hz); $1 \text{ Hz} = 1/\text{s}$.
longitud de onda. Distancia real entre valle y valle o entre cresta y cresta de una onda. Su unidad de medida es el metro (m).



- ❖ Expliquen al resto del grupo cómo obtuvieron sus resultados y la manera en que interpretaron la información en los problemas para contestar la última pregunta de cada inciso.



Integración

- Consulta en la biblioteca de tu escuela o de tu comunidad algunos libros de Física y busca otros contextos en los que se presente una relación de proporcionalidad inversa.
- Plantea un problema en el que sea necesario leer información de una gráfica o construirla a partir del cálculo de algunos datos.

- Comparte con tus compañeros tu problema y resuelve el que te asignen.

Otros contextos

3. Resuelve los siguientes problemas.

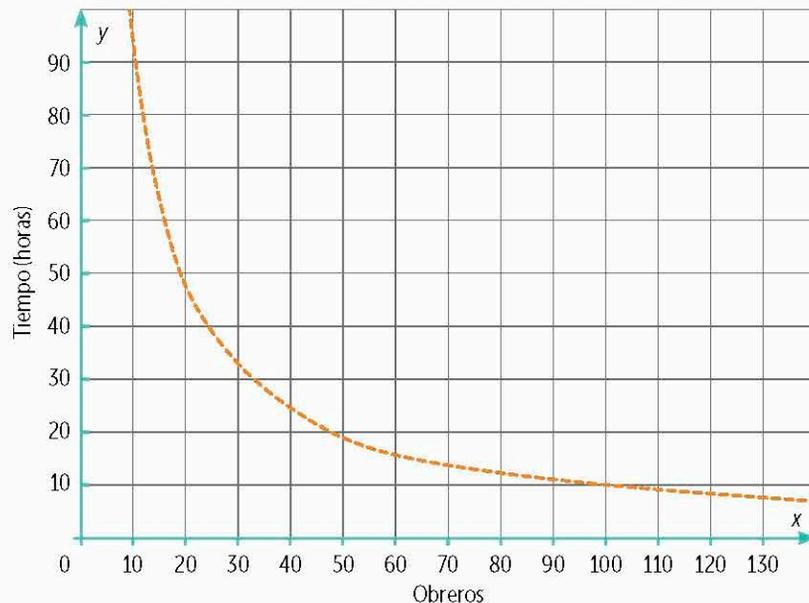
- a) En una fábrica, el dueño está considerando hacer un recorte de personal tomando en cuenta que la producción diaria no debe disminuir, es decir, que la producción sea la misma cantidad con el menor número de trabajadores. La siguiente gráfica muestra las horas (y) que debe trabajar cierto número de obreros (x) para obtener la producción deseada.

Somos



Reflexiona: ¿consideras justo trabajar más de ocho horas diarias? ¿Bajo qué condiciones podría hacerse? ¿Qué repercusiones físicas se podrían experimentar?

Relación entre la cantidad de obreros y Las horas trabajadas



- ¿Cuántos obreros necesita para obtener la producción en 8 horas?

- ¿Cuál es el valor de la producción que no debe cambiar? Explica tu respuesta.

- ¿Qué necesitan hacer para obtener la producción deseada en menos tiempo?

- ¿Qué significa que x tome el valor de cero? ¿Es posible obtener la producción esperada de esta manera? Explica tu respuesta.

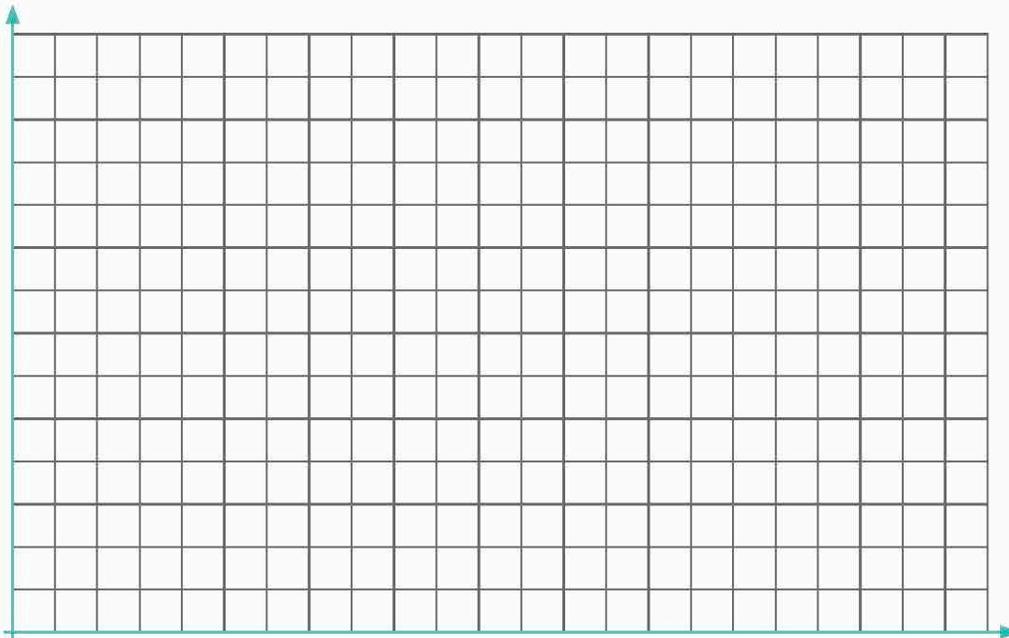
- ¿Por qué la línea de la gráfica no es una curva continua?

b) Algunas tarjetas de crédito dan facilidades de compra a meses sin intereses. La tabla de la derecha muestra de manera parcial la variación del pago en las mensualidades a cubrir respecto al número de meses sin intereses en los que se divide la deuda.

Plazo del pago (meses)	Cantidad mensual a pagar (\$)
3	3200
6	
9	1067
12	
24	
48	

- ¿Cuál es el monto total a pagar? _____
- Escribe una expresión algebraica que represente la variación de las mensualidades con respecto a los meses sin intereses.

- Completa la tabla mostrando la variación de las mensualidades cuando se incrementan los meses.
- Elabora una gráfica de la variación de las mensualidades con respecto al tiempo. Recuerda poner título a la gráfica y a los ejes, además de indicar las magnitudes en cada uno.



- ¿En este contexto, tiene sentido continuar la gráfica para valores menores que 1 en las abscisas? Explica. _____

- Generalmente la máxima cantidad de meses en esta forma de pago es 48; en ese caso, ¿cuál sería el último par ordenado para la gráfica?

- ❖ Compara tus respuestas y procedimientos con los de tus compañeros. Discutan la interpretación que han hecho de los datos de cada problema. ¿Qué restricciones para las gráficas hay en cada problema dependiendo del contexto? ¿Qué sucede en las gráficas cuando los valores del eje de las abscisas son muy pequeños o muy grandes? Anoten sus conclusiones para compartirlas en grupo.



En matemáticas la división de cualquier número entre 0 no está definida. La indeterminación surge del hecho de que si se divide, por ejemplo, el 1 entre números positivos muy pequeños, su resultado es una cantidad muy grande; pero si se divide entre números negativos muy pequeños, su resultado es una cantidad muy pequeña por ser negativa. Como el resultado de $\frac{1}{0}$ no puede ser muy grande o muy pequeño al mismo tiempo, se dice que el cociente $\frac{x}{0}$ es indefinido o indeterminado, para cualquier valor de x .

De aquí que las ramas de la hipérbola, que es la representación gráfica de expresiones del tipo $y = \frac{k}{x}$, con k constante, nunca tocan o cruzan a los ejes de las abscisas y ordenadas, dado que x y y no pueden tomar el valor de 0.

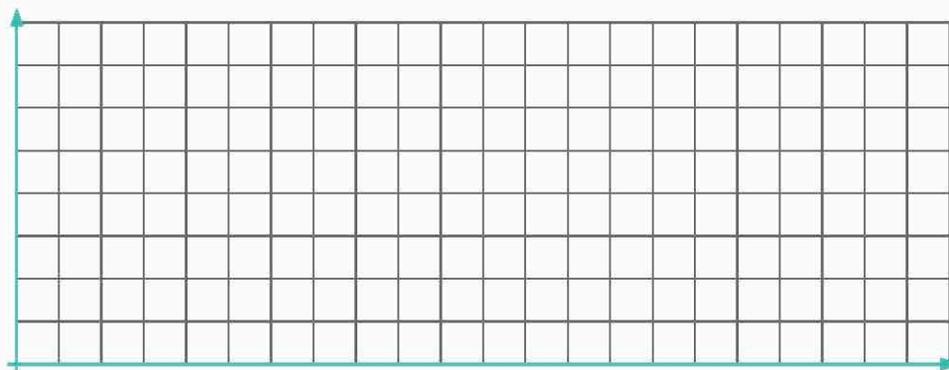


Integración

- Con base en la información anterior, construye una tabla y una gráfica para argumentar que en la expresión $y = \frac{1}{x}$ no existe un valor para y si $x = 0$. Elige una escala adecuada para los ejes de la gráfica de modo que puedas ubicar los números de las tablas.

x	y
-0.1	
-0.01	
-0.001	

x	y
0.001	
0.01	
0.1	



1. Observa nuevamente la imagen sobre la densidad de distintos materiales que está al inicio de la secuencia.

a) Completa en la tabla la variación del volumen con respecto a los valores de densidad y masa.

Densidad (g/cm^3)	Volumen (cm^3)
0.5	
1	
2.7	
7.8	
19.3	

b) ¿Qué volumen ocupa 1 kg de madera?

c) ¿Qué volumen ocupa 1 kg de aire si tiene una densidad de 0.0012 g/cm^3 ?

d) La densidad aparente de las plumas de pollo es de 0.054 g/cm^3 . Determina qué ocupa más volumen, ¿1 kg de plumas de pollo o 1 kg de hierro? Explica tu respuesta.

e) ¿Qué sucede con el volumen cuando la densidad de los materiales se acerca a cero?

2. Resuelve el siguiente problema.

La segunda ley de Newton establece que la fuerza neta que actúa sobre un cuerpo es igual al producto de su masa por la aceleración y se resume en la siguiente expresión algebraica: $F = ma$.

a) Escribe una expresión algebraica que muestre la variación en la aceleración de un cuerpo cuando varía su masa bajo una fuerza constante.

b) Completa la tabla para mostrar la variación en la aceleración cuando aumenta la masa de un cuerpo.

Masa (kg)	Aceleración (m/s^2)
1	
20	200
50	
100	40
200	

c) ¿A cuánto equivale la fuerza aplicada? Expliquen su respuesta.

d) ¿Qué valor tendrá la aceleración si la fuerza se aplica a una masa de 0.001 gramos? ¿Y si la fuerza se aplica a una masa de 1000 000 gramos?

✚ Reúnete con tus compañeros y explica cómo determinaste los datos de cada tabla. Construyan las gráficas y analicen qué otra información pueden obtener de ellas.



Conviuimos

Al trabajar en equipo es importante identificar las fortalezas y debilidades de cada integrante para saber en qué aspectos se requiere apoyo y quién de los miembros puede auxiliar a otro. Reflexiona y conversa: ¿reconoces y aprecias tus capacidades y las de los demás?

Construcción de polígonos regulares y teselados

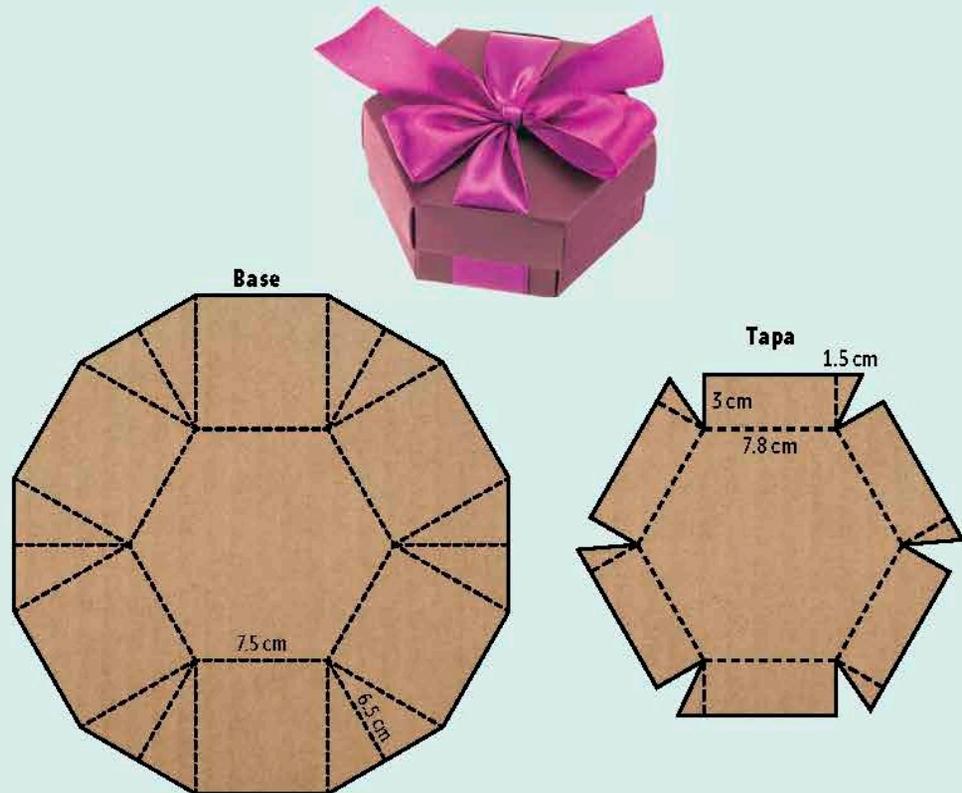
Deduce y usa las relaciones entre los ángulos de polígonos en la construcción de polígonos regulares.

En el bloque 1 dedujiste y analizaste algunas propiedades de los polígonos como su número de diagonales, la suma de sus ángulos interiores y, en particular, las relaciones que están presentes en las medidas de los ángulos de los polígonos regulares. En esta secuencia utilizarás esa información para construir polígonos regulares a partir de varios datos empleando los instrumentos de tu juego de geometría.

Partimos

1. Lee la situación y contesta.

Claudia quiere construir cajas hexagonales de distintos tamaños para entregar sus regalos en Navidad. Encontró en internet plantillas cuyas medidas se presentan en centímetros y quiere reproducirlas en papel estampado.



- ¿Qué figuras geométricas forman la base de la plantilla y cuáles la tapa?
- Describe los pasos que debe seguir Claudia para reproducir tanto la base como la tapa de la caja.
- Explica qué debe hacer Claudia para obtener, a partir del dodecágono de la plantilla, la base hexagonal de la caja.

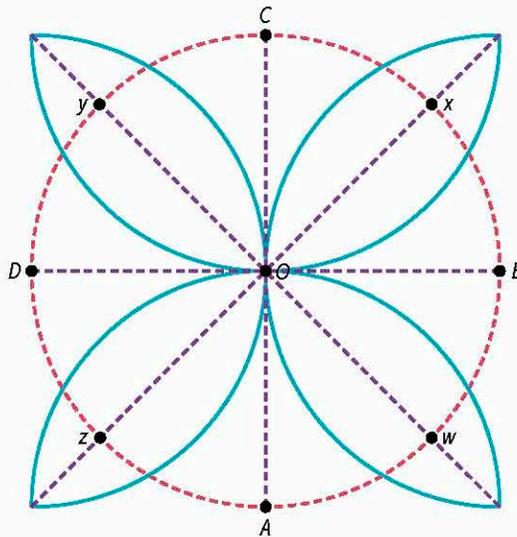
✚ En equipo con tus compañeros intercambien las descripciones que hicieron en el inciso b) y verifiquen si con ellas es posible hacer los trazos de las plantillas para la base y la tapa. ¿Qué medidas necesitan conocer para realizar los trazos?

Construcción de polígonos

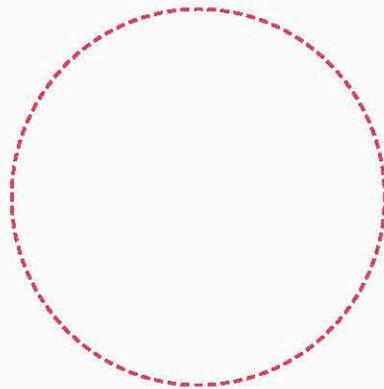
1. Resuelvan en parejas el siguiente problema.

La rosa de cuatro pétalos que se muestra a continuación se construyó de la siguiente manera:

- Se trazó una circunferencia de 3 cm de radio y dos diámetros perpendiculares que la intersecan en A , B , C y D .
- Se trazaron cuatro medias circunferencias: una con centro en A y radio \overline{OA} , otra con centro en B y radio \overline{OB} , la tercera con centro en C y radio \overline{OC} , y la última con centro en D y radio \overline{OD} .
- Se trazaron las dos rectas que unen los extremos de dos pétalos opuestos y se denotó con las letras x , y , z y w los puntos de intersección de las rectas con la circunferencia.



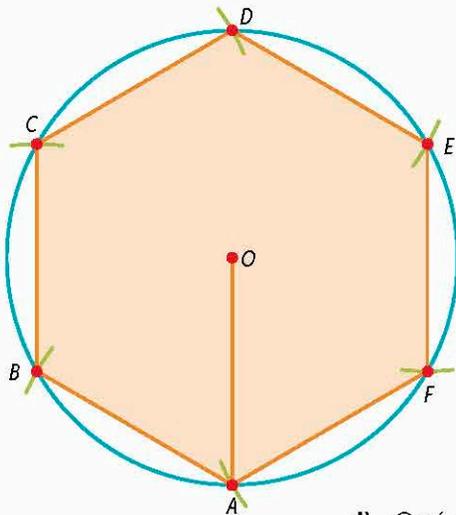
- Unan con segmentos de recta de color naranja los puntos x , y , z y w . ¿Qué polígono se formó? ¿Cuánto miden sus lados? _____
- Unan con segmentos de recta de color verde los puntos A , w , B , x , C , y , D y z . ¿Qué polígono se formó? ¿Cuánto miden sus lados? _____
- Construyan otra rosa de cuatro pétalos a partir de una circunferencia de 5 cm de diámetro.



- d) Busquen otros puntos de intersección entre los pétalos y la circunferencia para trazar con color rojo un triángulo equilátero, con azul un hexágono regular y con amarillo un dodecágono regular. ¿Cuánto miden los lados de cada uno?
 Triángulo: _____ Hexágono: _____ Dodecágono: _____

❖ Comparen sus polígonos con los de otras parejas. Si hay diferencias, comprueben las propiedades de cada uno midiendo sus lados o sus ángulos.

2. Analiza la información y resuelve.



Juan quiere hacer un móvil con figuras geométricas. Para construir un hexágono regular de 3 cm de lado dibujó una circunferencia como se muestra en la figura de la izquierda y realizó algunos trazos.

- a) ¿Qué apertura de compás utilizó Juan para trazar el arco del punto B y en dónde colocó la punta metálica del compás?

- b) ¿Cómo ubicó el punto C? _____

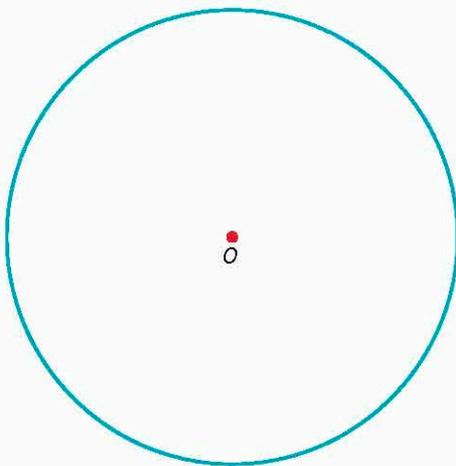
- c) ¿Para trazar el hexágono calculó el ángulo central? _____

Explica. _____

- d) ¿Qué tipo de triángulos se forman si unes el centro O con cada vértice del hexágono? Argumenta.

- e) ¿Cómo supo Juan el radio del círculo que debía trazar?

- f) Redacta un procedimiento para construir un hexágono regular a partir de la longitud de uno de sus lados.



❖ Compara tus respuestas y procedimientos con tus compañeros: ¿hicieron las mismas descripciones? Consideren la del inciso f) y construyan, utilizando el juego de geometría, un hexágono regular de 4 cm de lado. ¿Fue posible?

3. Analiza con un compañero la forma en que pueden construir, usando su juego geométrico, un pentágono regular inscrito en la circunferencia de la izquierda.

a) Describan su procedimiento. _____

❖ Comparen sus procedimientos con los de sus compañeros. ¿Para construir el pentágono regular utilizaron el valor del ángulo central? ¿Basta con ese dato para construirlo?

4. Trabaja con un compañero. Cada uno trace un cuadrado utilizando métodos distintos. Reflexionen acerca del método que cada uno utilizó.

a) Escriban en la tabla los dos procedimientos que utilizaron.

Procedimiento 1	Procedimiento 2

b) ¿Las longitudes de los lados de todos los cuadrados que trazaron son iguales?

c) ¿Alguno de los métodos que utilizaron les sirve para trazar un cuadrado de 4 cm de lado? Expliquen su respuesta. _____

❖ Comparen sus procedimientos y trazos con sus compañeros. ¿Utilizaron alguno diferente? ¿Cuál de los métodos utilizados garantiza que los ángulos interiores midan 90° ?

5. Resuelvan en equipos.

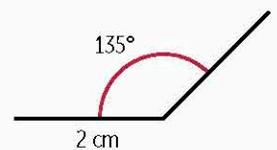
Isabel también está haciendo un móvil de figuras geométricas. Terminen de construir en la figura de la derecha el polígono que empezó.

a) ¿Cómo se llama el polígono que trazaste? _____

b) ¿Cuánto mide el ángulo central del polígono? _____

c) ¿Es posible garantizar que el lado mida 2 cm si se utiliza el ángulo central para trazar el polígono anterior? Expliquen su respuesta. _____

❖ Comparen sus trazos y procedimientos con el resto del grupo. ¿Construyeron la misma figura? ¿Qué instrumentos de su juego de geometría utilizaron para trazarla?



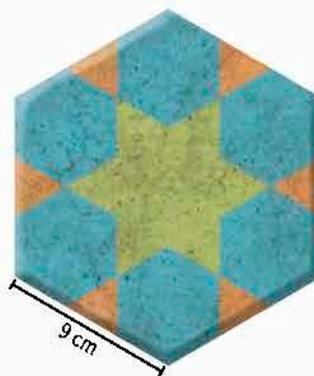


El trazado de figuras con regla y compás se remonta a la época de los griegos. Los trazos de ángulos, rectas paralelas y polígonos, entre otros, los hacían utilizando únicamente una regla no graduada y un compás. En la construcción de polígonos regulares, basta con conocer una de las características del polígono como su número de lados, medida del ángulo central, medida del ángulo interior, etcétera, para deducir las demás características de éste y así realizar el trazo.



Integración

- En equipos describan las instrucciones para trazar el siguiente diseño.



- Intercambien instrucciones y con ellas tracen el diseño. ¿Es igual al de sus compañeros? ¿Las instrucciones que escribieron son correctas o necesitan ajustarlas? ¿Qué figuras forman el diseño? ¿Cuáles son sus características?

Teselados

6. Analicen en equipos y contesten.

Se desea cubrir una superficie plana con losetas de mármol idénticas. Las figuras A y B muestran dos arreglos que se han hecho para este fin. La figura A tiene seis losetas en forma de triángulos equiláteros y la figura B tiene losetas cuadradas que concurren en un mismo vértice.

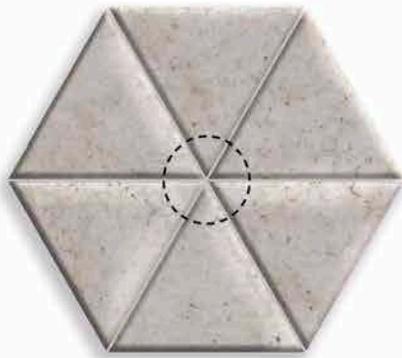


Figura A

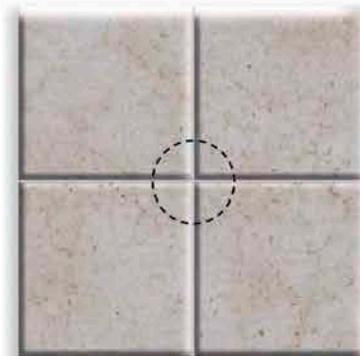


Figura B

- a) ¿Cuántos triángulos concurrentes tienen como vértice común el punto marcado de la figura A? _____
- b) ¿Cuánto mide el ángulo central de la figura A? _____
- c) ¿Cuánto mide el ángulo interior de cada cuadrado que concurre en el vértice marcado en la figura B? _____
- d) ¿Cuánto mide el ángulo central de la figura B? _____
- e) ¿Habrá algún otro polígono regular con el que también se puedan acomodar losetas iguales que formen un ángulo de 360° al concurrir en un mismo vértice? ¿Cuál? _____
- f) Muestren por medio de un dibujo la comprobación de su respuesta anterior.

- ¿Cuánto miden los ángulos interiores que concurren en el mismo vértice de cada uno de los polígonos que acaban de dibujar? _____

✚ Comparen sus respuestas con las de otro equipo. Discutan qué características tienen los polígonos regulares con los que es posible cubrir una superficie.



Un teselado es un patrón de figuras que cubre completamente una superficie plana, de manera que no queden huecos ni que se superpongan o se encimen las figuras.

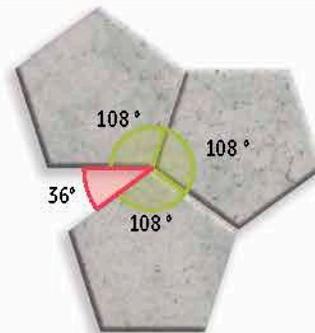
Para hacer un teselado con polígonos es necesario que la suma de los ángulos interiores de los polígonos que concurren en un mismo vértice sea 360° .

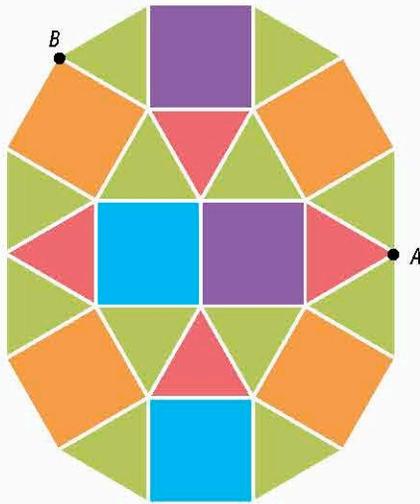
Si el teselado utiliza polígonos regulares iguales se llama teselado regular.



Integración

- Explica con tus palabras qué ocurre en el arreglo de losetas de la imagen.





7. Considera con un compañero la siguiente figura.
- a) Para continuar el teselado, ¿qué polígonos regulares pueden colocar en el vértice A? ¿Y en el vértice B?

- b) ¿Cuántos polígonos de cada tipo pueden poner en el vértice A? Argumenten.

- c) ¿Cuántos polígonos de cada tipo pueden poner en el punto B? Expliquen.

Explora



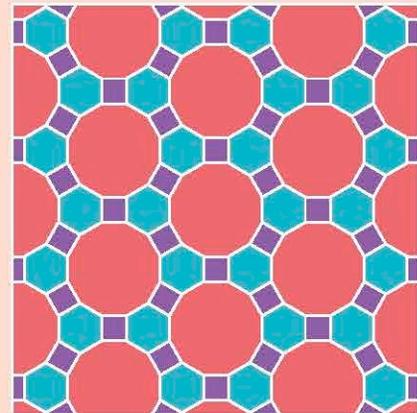
Entra en la página www.edutics.mx/UXi y podrás crear teselados con polígonos regulares.

- ❖ Comparen sus respuestas y sus argumentos con los de otra pareja. Discutan cuál de los procedimientos que utilizaron para determinar el número de polígonos de cada tipo que se pueden colocar en cada vértice les parece más sencillo.



Los teselados que están formados por dos o más polígonos regulares y cumplen que siempre concurren los mismos polígonos en cada uno de los vértices, se llaman semirregulares.

Existen ocho teselados semirregulares. La notación para identificarlos hace referencia al número de lados de cada uno de los polígonos que concurren en un mismo vértice. Así, el teselado de la figura de la derecha se denota por (4, 6, 12), ya que en el mismo vértice concurren un cuadrado, un hexágono y un dodecágono.



Explora



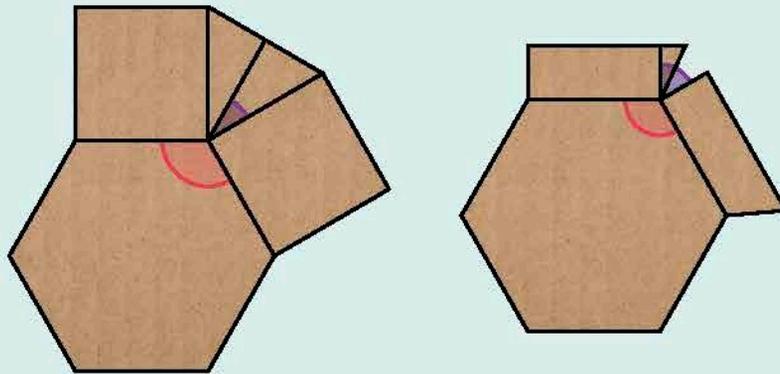
En la página www.edutics.mx/UX5 podrás ver una animación basada en el teselado de Penrose.

8. Encuentren en grupo otro teselado semirregular diferente al (4, 6, 12) formado por tres polígonos regulares distintos y dibújenlo.

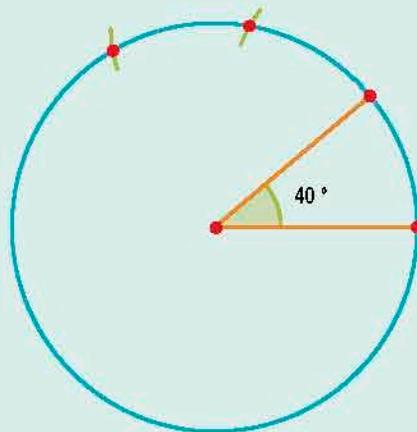
- a) Indiquen cuál es (usen la notación para teselados semirregulares) y descríbanlo.

Arribamos

1. Analiza de nuevo el problema planteado al inicio de la secuencia.
 - a) ¿Cuánto mide cada uno de los siguientes ángulos marcados en las plantillas de la base y la tapa de la caja hexagonal?



2. Identifica el error en la construcción. Luis empezó a trazar un decágono inscrito en una circunferencia, como se muestra en la figura.



- a) ¿Qué error cometió?
 - b) ¿Qué debe hacer para construir correctamente el decágono?
3. Construye los siguientes polígonos.
 - a) Un polígono cuyo ángulo exterior mida 40° .
 - b) Un pentágono cuyo lado mida 3 cm.
 - c) Un polígono cuyo ángulo central mida 30° .
 - d) Un polígono cuyo ángulo exterior mida 45° .
 4. ¿Qué polígonos regulares tiene un teselado semirregular (3, 6, 3, 6)? Explica y constrúyelo.
- ♦ Reúnete con tus compañeros, comparen respuestas y los teselados construidos. Organícense para construir los 8 teselados semirregulares.

Explora

En la siguiente página www.edutics.mx/UXq podrás ver algunas obras artísticas del siglo XX creadas con teselados con diseños concretos como estrellas de mar, aves, peces, o reptiles entre otros.

Hacemos

Organízate con tus compañeros y hagan algunos diseños con teselados regulares, semirregulares o con otras figuras, como las obras de las secciones "Explora" de esta página y la anterior. Presenten una exposición para compartir sus diseños con su comunidad.

Calcula el perímetro y el área de polígonos regulares a partir de diferentes datos.

Partimos

En primer grado de secundaria desarrollaste y aplicaste fórmulas para calcular el área de triángulos y cuadriláteros. En esta secuencia utilizarás lo anterior en el cálculo de áreas de polígonos regulares e irregulares. En particular desarrollarás una fórmula para calcular el área de polígonos regulares.

1. Analiza la situación y resuelve el problema que se plantea.

Don Neto quiere construir en una sola pieza la cubierta de una pequeña caja en forma de pentágono regular, como la que se muestra en la figura la cual es una reducción de 1:5 de la cubierta original. Tiene tres pedazos de madera en forma de pentágono regular: uno de caoba de 450 cm^2 de superficie, uno de pino de 350 cm^2 y otro de cedro de 400 cm^2 .



- ¿Qué procedimiento utilizarías para encontrar el área de la cubierta?
- Si quiere desperdiciar la menor cantidad de madera posible, ¿en qué tipo de madera debe construir la cubierta?

✦ Compara tus respuestas y tus procedimientos con los de algún compañero. ¿Utilizaron distintos procedimientos? ¿Cuáles? ¿Cuál es el área del pentágono en medidas reales? ¿Cuántos centímetros cuadrados de madera se desperdiciarían con cada tipo de madera disponible?

Recorremos

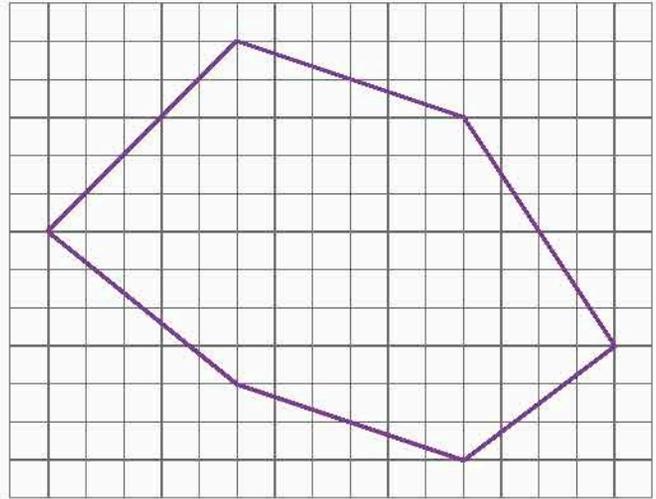
Polígonos irregulares

1. Analiza y contesta.

Enrique le pidió ayuda a su hijo Claudio para calcular el área de un terreno que piensa adquirir. Claudio trazó en una hoja cuadrículada el terreno a escala, de manera que cada cuadradito corresponda a 1 m^2 , como se muestra en la figura de la siguiente página.

- ¿Qué procedimiento utilizarías para calcular el área del terreno?

b) Claudio observó que si cuenta los cuadrados de la cuadrícula que cubren la figura, sólo obtendrá una aproximación del área.
Explica por qué: _____



c) Al observar el dibujo, Enrique se percató de que una parte de su terreno tiene forma de paralelogramo. Traza con color rojo las rectas que permiten distinguirlo.

d) El terreno quedó dividido en tres figuras. ¿Cuáles son? _____

e) Denota con A, B y C cada figura. A partir de los cuadrados de la cuadrícula, calcula cada área.

Figura A: _____ Figura B: _____ Figura C: _____

f) ¿Cuál es el área del terreno de Enrique? _____

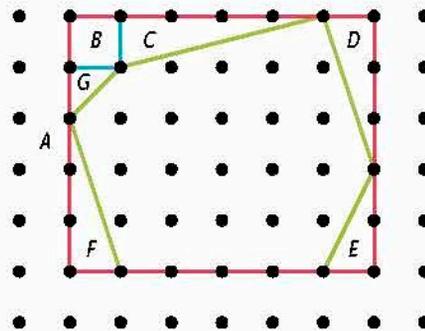
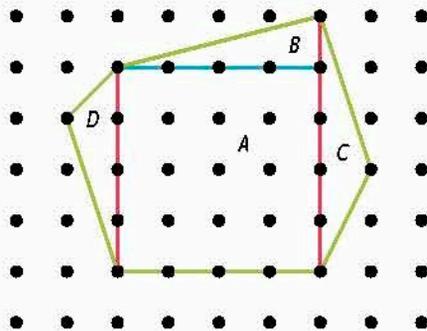
2. Resuelvan en equipos.

En clase de Matemáticas, Juan Carlos y sus compañeros están trabajando con el **geoplano**. La maestra les pidió que determinaran el área del polígono que formó con las ligas verdes. La figura muestra los geoplanos de Citlalli y Juan Carlos, las ligas que puso cada uno para determinar el área y el razonamiento que utilizaron para calcularla.



Glosario

geoplano. Tablero cuadrado con una cuadrícula formada por clavos que sobresalen y que permite colocar ligas para formar figuras geométricas.



$$\begin{aligned} \text{Área} &= A + B + C + D \\ \text{Área} &= 16 + 2 + 2.5 + 2 \\ \text{Área} &= 22.5 \text{ u}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Área} &= A - B - C - D - E - F - G \\ \text{Área} &= 30 - 1 - 2 - 1 - 1 - 1.5 - 0.5 \\ \text{Área} &= 23 \text{ u}^2 \end{aligned}$$

a) Dado que los resultados son distintos, ¿cuál de los dos creen que haya cometido un error? ¿Por qué? _____

b) Expliquen el procedimiento de Citlalli. _____

c) ¿Las áreas de los polígonos que consideró Citlalli son correctas? Argumenten. _____



En la página www.edutics.mx/U2G puedes encontrar otros ejemplos de cálculo de áreas de polígonos irregulares.

d) Expliquen el razonamiento de Juan Carlos.

e) ¿Las áreas de los polígonos que consideró Juan Carlos son correctas?

Argumenten su respuesta. _____

f) ¿Cuál es el área del polígono verde que formó la maestra?

❖ Comparen sus respuestas y procedimientos con el resto del grupo. Discutan: ¿hay maneras distintas para determinar el área de un polígono irregular? ¿Cuáles?

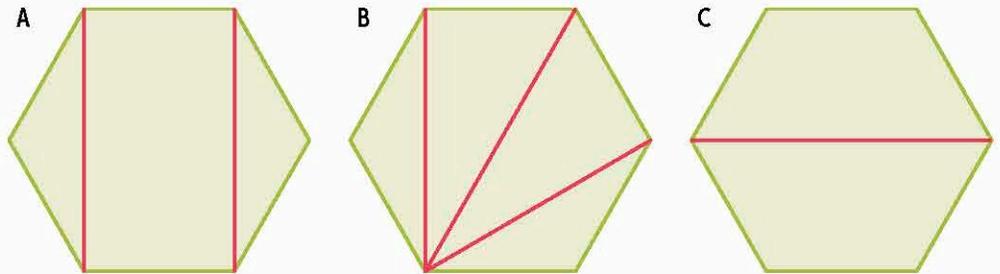


Para calcular el área de un polígono irregular es posible dividir en triángulos u otras figuras cuyas áreas se puedan calcular con fórmulas ya conocidas.

Polígonos regulares

3. Lean en parejas y contesten.

Al trazar algunas de las diagonales de un hexágono regular de 2 cm de lado, éste se divide en otras figuras, como se muestra en la imagen.



a) ¿Cuál es el área del hexágono A? ¿Cómo la calcularon?

b) ¿Cuál es el área del hexágono B? Expliquen su procedimiento.

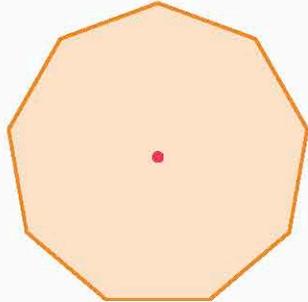
c) ¿Y el área del hexágono C? _____

d) ¿El área depende de cómo se divida una figura en otras? Argumenten.

❖ Comparen sus respuestas y sus procedimientos con los de otra pareja. ¿Obtuvieron los mismos resultados al calcular el área de las figuras que conforman cada hexágono? ¿Consideran que el área del hexágono depende de cómo se divide en otras figuras? ¿Conocen alguna otra manera de dividir al hexágono en triángulos?

4. Hagan lo que se pide en parejas.

- a) Dividan el eneágono en triángulos iguales de manera que el centro del polígono sea el vértice común de los triángulos y que quede dividido en tantos triángulos como lados tenga.



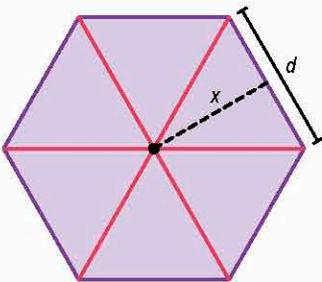
- Expliquen cómo calcularían el área del polígono. _____

- Tracen la altura de uno de los triángulos del eneágono y exprésenla con a . Si denotan por b el lado del polígono, ¿cómo expresarían el área del triángulo?

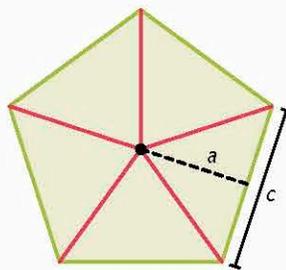
- Con base en la pregunta anterior, escriban una expresión algebraica para el área del eneágono.

- ❖ Reúnanse con otras parejas y reflexionen: ¿los triángulos tienen la misma área? ¿Encontraron la misma expresión algebraica? ¿Cuál es la fórmula para calcular el perímetro del eneágono? ¿La expresión que escribieron se puede escribir en términos del perímetro del eneágono?

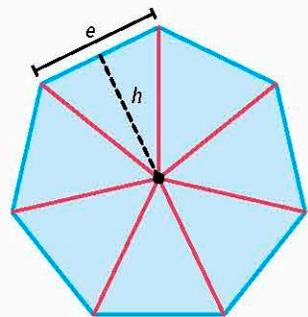
5. Analicen en equipos las siguientes figuras y respondan.



$A_{\text{Triángulo}} = \underline{\hspace{2cm}}$
 $A_{\text{Hexágono}} = \underline{\hspace{2cm}}$
 $A_{\text{Hexágono}} = \underline{\hspace{2cm}}$



$A_{\text{Triángulo}} = \underline{\hspace{2cm}}$
 $A_{\text{Pentágono}} = \underline{\hspace{2cm}}$
 $A_{\text{Pentágono}} = \underline{\hspace{2cm}}$



$A_{\text{Triángulo}} = \underline{\hspace{2cm}}$
 $A_{\text{Heptágono}} = \underline{\hspace{2cm}}$
 $A_{\text{Heptágono}} = \underline{\hspace{2cm}}$

- a) Cada polígono se ha dividido en triángulos. ¿Cuál es el área de cada triángulo? Escriban la expresión correspondiente en $A_{\text{Triángulo}}$.

b) ¿Cómo pueden calcular el área de cada polígono?

c) ¿Cuál es el área de cada polígono? Escriban la expresión en las figuras anteriores.

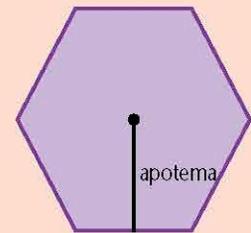
d) Utilicen la fórmula para calcular el perímetro, para escribir en cada polígono una expresión para el área que simplifique la primera.

❖ Comparen sus respuestas con el resto del grupo. ¿Cuál es la fórmula para calcular el perímetro de un polígono regular cualquiera? Determinen la fórmula para calcular el área de un polígono regular de n lados.



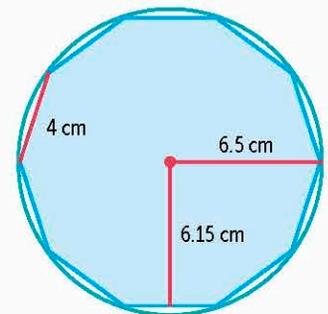
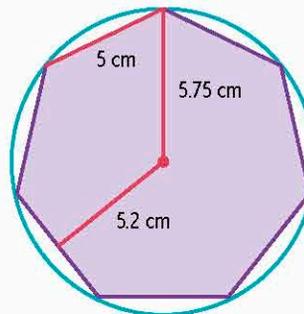
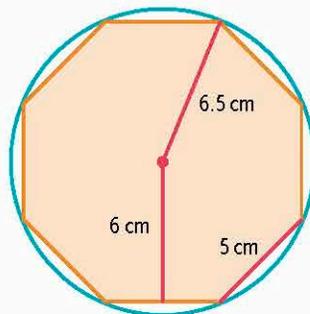
La apotema es el segmento perpendicular a cualquiera de los lados de un polígono regular desde el centro de éste. En todos los casos coincide con la altura de los triángulos que tienen como vértice común el centro del polígono.

La fórmula para calcular el área de un polígono regular cualquiera es $A = \frac{P \times a}{2}$, donde P es el perímetro y a es la apotema.



6. Resuelve los siguientes problemas.

a) Calcula el área de cada polígono que está inscrito en una circunferencia.



Octágono: _____

Heptágono: _____

Decágono: _____

• En cada polígono se trazaron dos segmentos de recta desde el centro del mismo, ¿cuál es la diferencia entre ellas? _____

• ¿En un polígono inscrito, es mayor la apotema o el radio? _____

b) Si el lado de un polígono de 11 lados mide 8 in y su apotema 13.6 in, ¿cuánto mide su área? _____

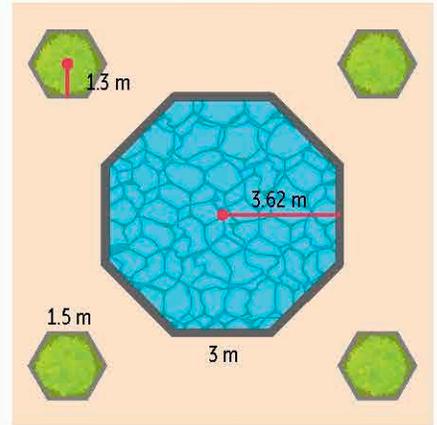
c) Para hacer la cubierta de vidrio de una mesa en forma de heptágono regular se utilizó un vidrio de 91 cm² de superficie. Si la apotema mide 5.2 cm, ¿cuánto mide su lado? _____

d) Para cercar un terreno en forma de polígono regular se utilizaron 42 m de alambre de púas. Si la superficie del terreno mide 137.15 m², ¿cuánto mide la apotema? _____

- ❖ Compara tus resultados y tus procedimientos con los de algún compañero. ¿Las diferencias que encontraron son de razonamiento o son errores numéricos? Corrijan en caso necesario.

7. Resuelvan en equipo los siguientes problemas.

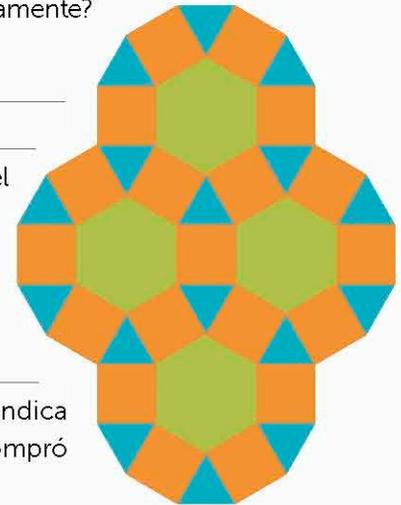
a) En un terreno cuadrado de 144 m^2 de área se construyó una fuente octagonal regular y cuatro jardineras iguales con forma de hexágono regular. Se colocó pasto en las jardineras y cemento en el resto del terreno, como se muestra en la figura de la derecha.



- Si los rollos de pasto se venden por metro cuadrado, ¿cuántos rollos se utilizaron para cada jardinera?

- ¿Cuántos metros cuadrados están cubiertos por cemento, aproximadamente? Expliquen detalladamente.

b) Carolina quiere pintar en la ventana de su recámara un vitral, como el que se muestra en la figura de la derecha. Los lados de cada uno de los hexágonos, cuadrados y triángulos miden 6 cm y la altura del triángulo mide $5,2 \text{ cm}$.



- Para cada color calcula el área que se pintará.

Verde: _____ Naranja: _____ Azul: _____

- Carolina compró una pintura especial y la etiqueta de los frascos indica que cada uno cubre una superficie de 50 cm^2 . ¿Cuántos frascos compró de cada color?

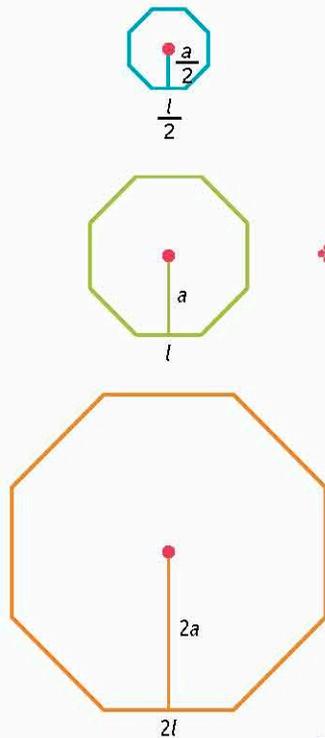
Verde: _____ Naranja: _____ Azul: _____

- ❖ Concluyan en grupo cómo pueden utilizar la descomposición de figuras para calcular el área.

Variación en el área de un polígono regular al variar de manera proporcional sus dimensiones

8. Completa la tabla y contesta con la información que contiene.

Polígono regular	Lado (cm)	Apotema (cm)	Perímetro (cm)	Área (cm ²)
Pentágono A		1.38	10	
Pentágono B	4	2.76		
Octágono C		6	40	
Octágono D	15	18		



- a) ¿Qué relación existe entre las medidas del lado, de la apotema y del perímetro del pentágono B con las medidas correspondientes del pentágono A?
- b) ¿Cómo obtienes el área del pentágono B a partir del área del pentágono A?
- c) Explica qué relación existe entre todas las dimensiones del octágono C y el D.

❖ Analiza con un compañero: ¿el perímetro de un polígono varía en la misma proporción que la longitud de sus lados? ¿Cómo cambia el área de un polígono si sus lados se cuadruplican?

9. Consideren en parejas las figuras de la izquierda y contesten.

- a) ¿Cuál es el factor de proporcionalidad entre la longitud de los lados de los hexágonos azul y verde? ¿Y entre la longitud de las apotemas?
- b) ¿Cuál es el factor de proporcionalidad entre la longitud de los lados y las apotemas, respectivamente, de los hexágonos naranja y verde?
- c) Encuentren una expresión para el perímetro y el área de cada hexágono.

Azul
Perímetro: _____
Área: _____

Verde
Perímetro: _____
Área: _____

Naranja
Perímetro: _____
Área: _____

- d) ¿Cuál es el factor de proporcionalidad entre los perímetros de los hexágonos verde y azul? ¿Y cuál entre sus áreas?
- e) ¿Cuál es el factor de proporcionalidad entre los perímetros de los hexágonos azul y naranja? ¿Y cuál entre sus áreas?

Aprendemos

Reflexiona: ¿cómo ayuda a tu aprendizaje el que expreses un concepto con tus palabras?

Integración

- En parejas, a partir de lo que hicieron en la actividad anterior, expliquen la siguiente información.



Si la razón de proporcionalidad entre las longitudes de dos polígonos A y B es r , entonces la razón entre sus perímetros es r y la razón entre sus áreas es r^2 .

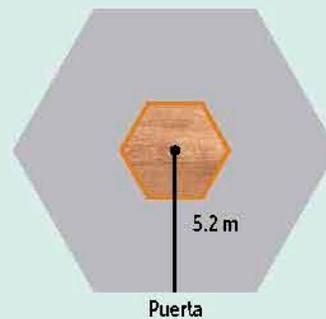
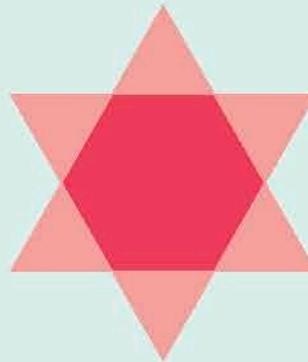


1. Lee nuevamente la situación planteada al inicio de la secuencia.
Don Neto quiere construir otras dos cubiertas con los pedazos de madera que le sobraron. Con la de mayor superficie quiere hacer una circular y con la de menor superficie, una de forma pentagonal, cuya área sea la cuarta parte del área de la cubierta que ya elaboró.
 - a) Explica cómo es posible que construya la cubierta circular desperdiciando la menor cantidad de madera.
 - b) ¿La apotema del pedazo de madera es mayor o menor que el radio del círculo?
 - c) ¿Cuánto mide el lado y la apotema de la nueva cubierta pentagonal que elaboró? Explica tu respuesta.

2. Analiza y contesta.
 - a) ¿Cuál es el área de un pentágono si su lado mide 10 cm y su apotema, 6.9 cm?
 - b) ¿Cuánto mide el perímetro de un polígono si su área mide 480 mm^2 y su apotema, 12 mm?
 - c) ¿Cuánto mide la apotema de un heptágono si su lado mide 7.5 ft y su área, 204.75 ft^2 ?

3. Resuelve los siguientes problemas.
 - a) Jacinta dibujó una estrella con polígonos regulares como se muestra en la figura. El área de la estrella mide 20.76 cm^2 y la apotema del hexágono mide 1.73 cm. ¿Cuánto mide el lado del hexágono?

 - b) La sala hexagonal del Museo de Arte Contemporáneo tiene una superficie de 93.6 m^2 y la distancia de la puerta de entrada al centro de la sala mide 5.2 m. Al centro se quiere construir una tarima de madera hexagonal que ocupe la novena parte de la superficie de la sala como se muestra en la figura. ¿Cuánto medirá cada uno de los lados de la tarima?



En la siguiente página www.edutics.mx/U2p puedes realizar algunos ejercicios de cálculo de áreas de polígonos regulares.

❖ En equipo expongan al grupo la forma en que interpretaron cada problema para resolverlo.

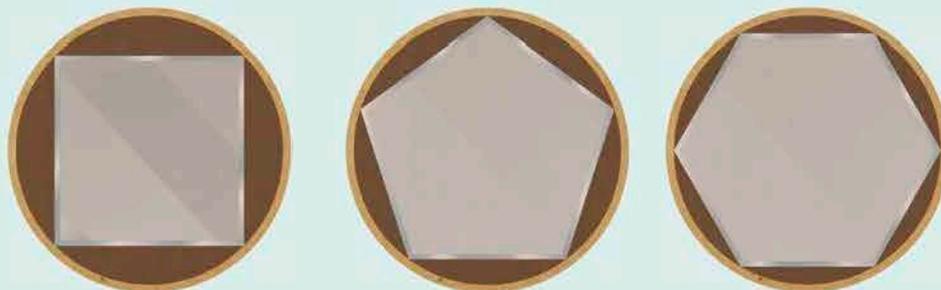
Calcula el perímetro y el área de polígonos regulares y del círculo a partir de diferentes datos.

El estudio del círculo en secundaria lo comenzaste en primer grado al desarrollar y aplicar la fórmula para calcular su perímetro. Sabes cómo calcular el área de triángulos, cuadriláteros y diversos polígonos. Además has aprendido que algunas fórmulas se deducen de otras. En esta secuencia desarrollarás la fórmula para calcular el área del círculo y la utilizarás para resolver diversos problemas.

Partimos

1. Observa las imágenes y contesta.

Para guardar varios cristales de formas poligonales se han utilizado cajas circulares. Las siguientes imágenes muestran las cajas con los cristales vistos desde arriba. Los espacios vacíos deben llenarse con algodón.



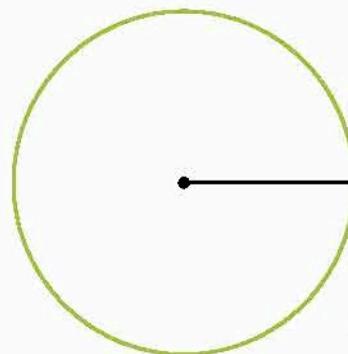
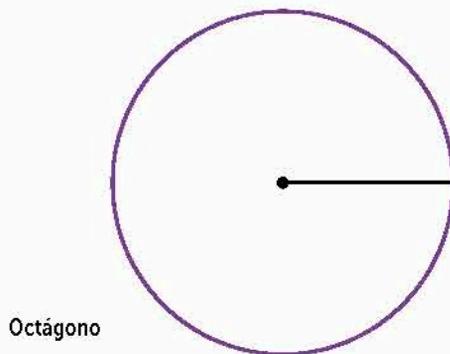
- a) ¿Para cuál cristal se requiere utilizar más algodón y con cuál, menos algodón? Da tu respuesta en términos de la superficie que ocupa cada uno dentro de la caja.
- b) ¿Cuál de los tres polígonos te sería más útil para aproximar el área de la tapa de la caja circular?

✦ Compara tus respuestas con las de algún compañero. Al aumentar el número de lados de los polígonos regulares, ¿su superficie se asemeja más a la superficie del círculo?

Recorremos

Fórmula para calcular el área

1. Dibuja en cada círculo cómo se verían dentro de la caja los cristales con las formas que se indican.



a) ¿El perímetro del dodecágono se asemeja más al perímetro del círculo que el perímetro del octágono? ¿Por qué? _____

b) Supón que el perímetro de uno de los cristales con forma de polígono regular se asemeja más al perímetro del círculo que el perímetro del dodecágono. ¿Cuántos lados puede tener dicho cristal? Explica tu respuesta.

c) El dueño de la cristalería está seguro de que sin importar el número de lados con que haga los cristales siempre podrá guardarlos en cajas circulares. ¿Estás de acuerdo con la afirmación? Argumenta. _____

❖ Con ayuda del grupo responde: ¿qué ocurre con el perímetro y el área de un polígono regular, al aumentar sus lados, respecto del área y perímetro de un círculo? ¿Qué ocurre con la longitud de la apotema del polígono respecto del radio del círculo?



Integración

- Completa la frase con las palabras circunferencia y radio. Mientras más lados tiene un polígono regular, su perímetro se parece más a la longitud de la _____ que lo rodea y su apotema se aproxima más al _____ de dicha _____.

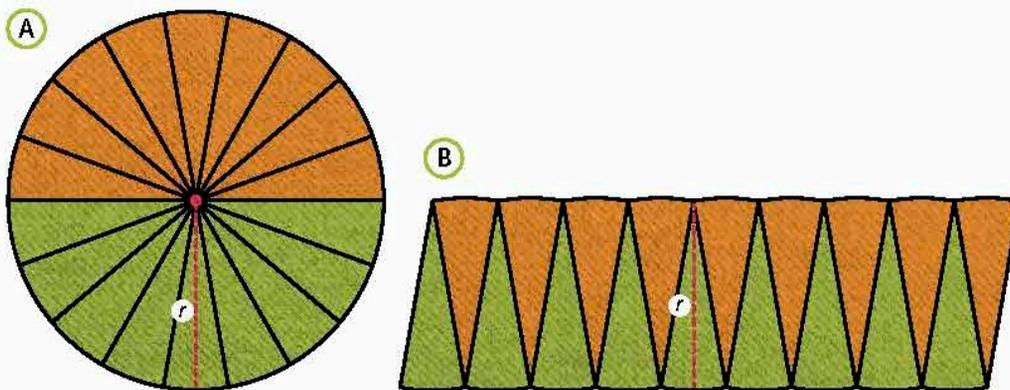


Aprendemos

Reflexiona: ¿de qué manera ayuda a tu aprendizaje la elaboración de pequeñas notas durante la clase?

2. Analiza las figuras, reúnete con un compañero y respondan.

a) De una pieza de tela circular de dos colores se formó un banderín como se muestra en las figuras.



• Expliquen cómo se obtuvo el banderín de la figura B a partir de la tela circular de la figura A. _____



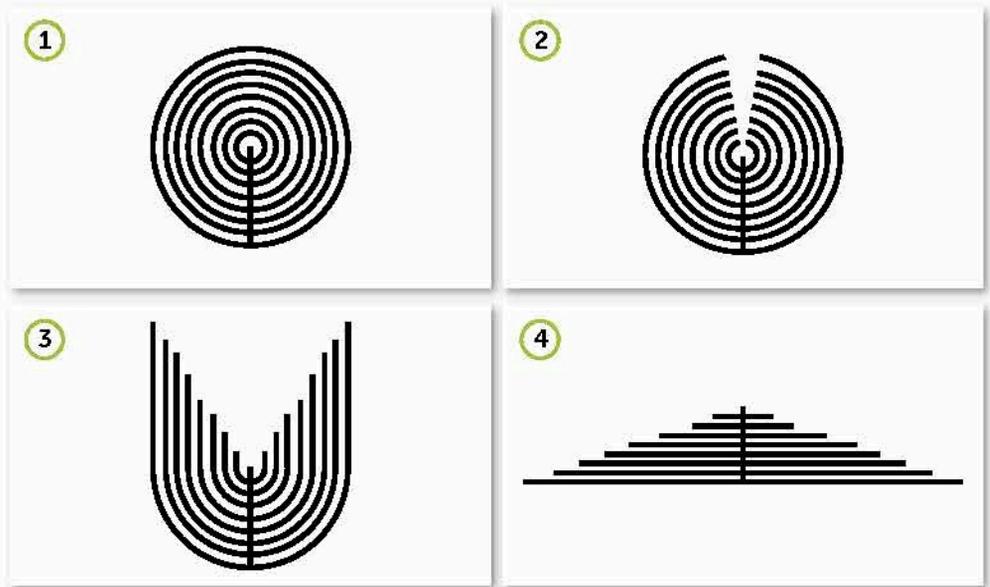
En el interactivo de la siguiente página www.edutics.mx/U2K podrás observar varias particiones del círculo.

- Si expresamos con la letra r al radio del círculo de la figura A, ¿cuál es su perímetro? _____
- Si se considera que la figura B es un paralelogramo, ¿qué relación existe entre el perímetro del círculo y la base del paralelogramo?

- ¿Qué relación existe entre el radio del círculo y la altura del paralelogramo?

- Escriban una expresión algebraica que represente el área paralelogramo de la figura B. _____

b) Observen las imágenes en el orden que se indica.



- Expliquen cómo se obtuvo la figura 4 a partir de la figura 1. _____

- Si representan con R al radio de la circunferencia más grande de la figura 1, ¿cuál será su perímetro? _____
- Si se considera que la figura 4 es un triángulo, ¿cuál es la relación entre la base del triángulo y el perímetro de la circunferencia exterior?

- ¿Cuál es la relación entre R y la altura del triángulo? _____
- Escriban una expresión algebraica que represente el área del triángulo de la figura 4. _____

❖ Comparen sus respuestas y sus razonamientos con los de otra pareja. Discutan lo que sucede en el inciso a) cuando el número de lados del polígono es cada vez mayor y lo que sucede en el inciso b) si el número de círculos concéntricos es cada vez mayor. ¿Es posible calcular el área del círculo con las expresiones que encontraron?

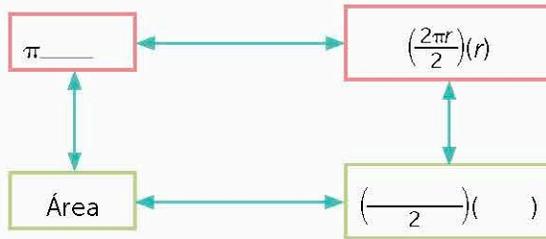


La fórmula para calcular el área de un círculo de radio r es $A = (\pi)r^2$. Recuerda que para hacer cálculos el valor de pi (π) puede considerarse como 3.14.

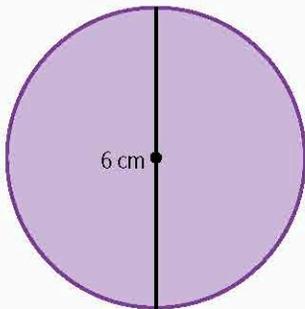


Integración

El siguiente diagrama muestra la relación entre el área y el perímetro de un círculo. Complétalo con las palabras perímetro, radio y la expresión r^2 .

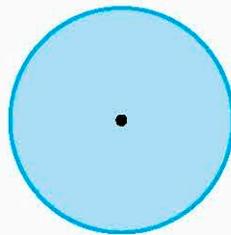


3. Calcula las áreas a partir de los datos que se dan. Escribe la respuesta en términos de π , es decir, 2π , $\frac{1}{2}\pi$, etcétera.

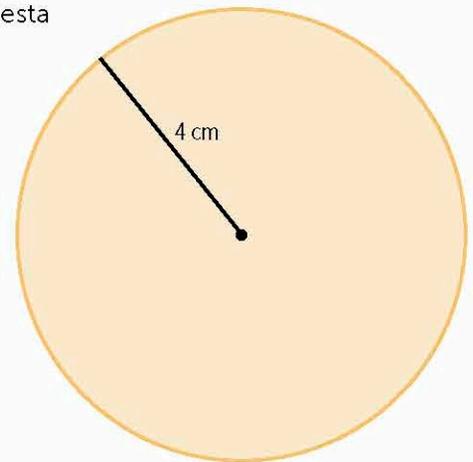


Área = _____

Perímetro = π cm



Área = _____



Área = _____

4. Resuelve los siguientes problemas. Si te parece conveniente, puedes dar tu respuesta en términos de π . En cada caso justifica ampliamente tu respuesta.

a) ¿Cuál es el área de un círculo cuyo diámetro mide 9 cm?

b) ¿Cuánto mide el radio de un círculo si su área es de 78.5 m²?

c) Si la circunferencia de un círculo es 25.13 cm y su radio tiene 4 cm de longitud, ¿cuál es su área?

d) Si el área de un círculo mide 314 in², ¿cuánto mide su perímetro?

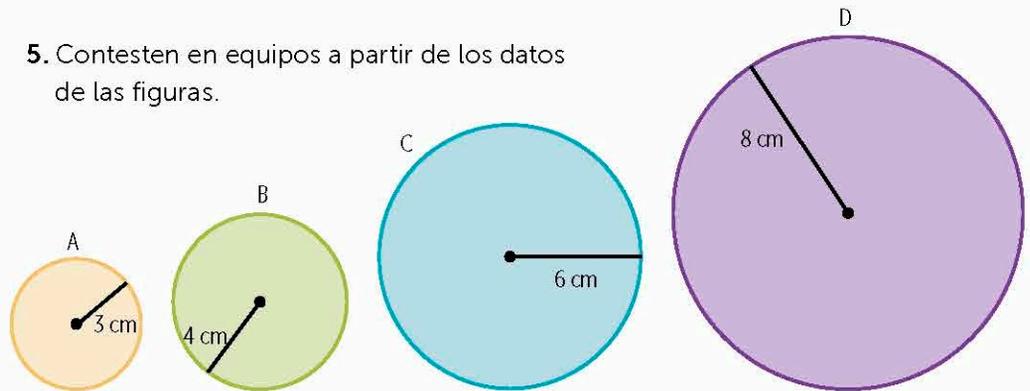


- e) Si el perímetro de un círculo mide 12π cm, ¿cuánto mide su área? Explica.

- ❖ Compara tus resultados y tus procedimientos con algún compañero. Discutan si los resultados expresados en función de π son más exactos que los resultados numéricos.

Relaciones entre áreas

5. Contesten en equipos a partir de los datos de las figuras.



- a) Expresen el área de cada círculo en términos de π .
- A: _____ cm^2 C: _____ cm^2
 B: _____ cm^2 D: _____ cm^2
- b) ¿Cuál es la razón entre los radios y las áreas, respectivamente, de los círculos C y A? _____
- c) ¿Cuál es la razón entre los radios de los círculos B y D? ¿Y entre sus áreas? _____
- d) ¿Cuál es la razón entre los radios y las áreas, respectivamente, de los círculos B y A? _____
- e) Calculen la razón entre los radios y las áreas de los círculos C y D. _____
- f) Considerando sus respuestas anteriores, reflexionen: si el radio de un círculo M es cinco veces más grande que el radio del círculo N, ¿cuál será la relación entre sus áreas? _____

- ❖ Compartan sus respuestas y reflexiones en grupo. Observen si existe alguna semejanza con las relaciones que estudiaron entre el área de polígonos. Comparen sus conclusiones con la información siguiente.



Si la razón de proporcionalidad entre los radios de dos círculos A y B es a , entonces la razón entre sus áreas es a^2 .

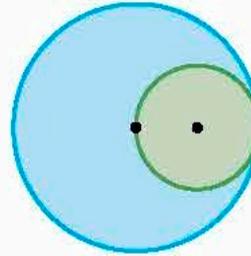


Integración

- Analiza la figura y resuelve.

El círculo verde, cuya área es 16 u^2 , tiene un diámetro igual a la mitad del diámetro del círculo azul y es interior a éste, como se observa en la figura.

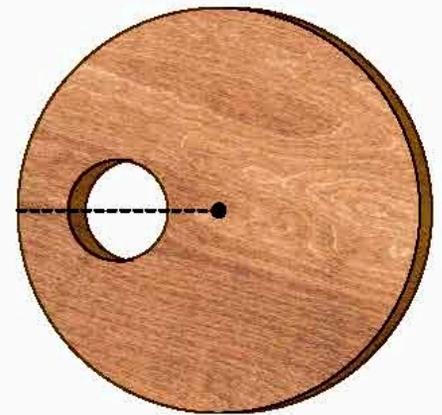
- a) ¿Cuál es el área del círculo azul? Explica tu respuesta.



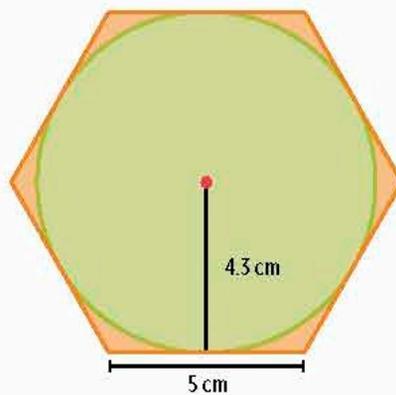
6. Resuelve con un compañero los siguientes problemas.

- a) En un pedazo redondo de madera de 1,6 m de diámetro se hará un agujero de modo que su centro se ubique exactamente entre el centro y el borde de la madera, como se muestra en la figura, y su diámetro sea la mitad del radio del círculo mayor.

- ¿A cuántos centímetros del centro de la madera estará el centro del agujero? _____
- ¿Cuántos centímetros mide el diámetro del agujero? _____
- ¿Cuál es la superficie aproximada de madera que se va a quitar al hacer el agujero? _____
- ¿Cuántos metros cuadrados aproximadamente quedarán de madera después de hacer el agujero? _____



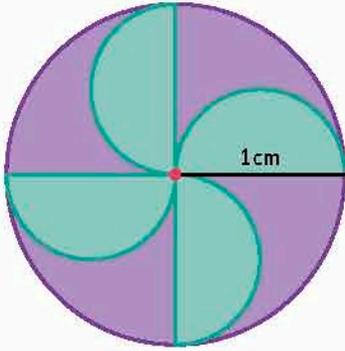
- b) Consideren la siguiente figura.



- ¿Cuánto mide el radio del círculo y la apotema del hexágono?

- ¿Qué procedimiento utilizarían para calcular el área de la región anaranjada?

- ¿Cuál es el área de la región anaranjada de la figura anterior? Expliquen su respuesta. _____



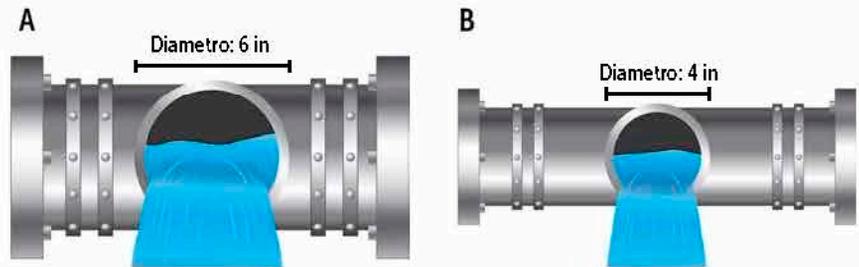
c) Considerando la figura de la izquierda, ¿cuál es el área de la parte morada?

Argumenten. _____

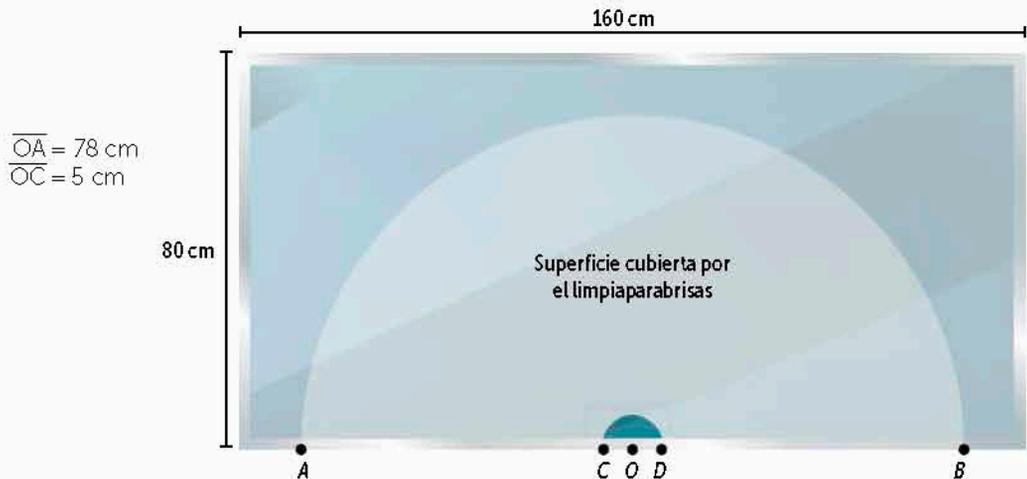
❖ Compartan respuestas y procedimientos con otra pareja. Si hay diferencias, identifiquen en qué consisten y lleguen a acuerdos. En caso de dudas pregunten a su profesor.

7. Resuelvan en equipo los siguientes problemas. Argumenten su respuesta.

a) ¿Cuántas veces es mayor la cantidad de agua conducida por la tubería A que la que lleva la tubería B? Expliquen. _____



b) Para un automóvil todo terreno, el fabricante quiere que el limpiaparabrisas cubra entre 70% y 80% de la superficie rectangular del parabrisas.



• ¿Cuál es el área de la región cubierta por el limpiaparabrisas?

• ¿Qué porcentaje del total del parabrisas cubre el limpiaparabrisas?

• ¿El fabricante obtuvo los resultados que quería? _____

Arribamos

Explora

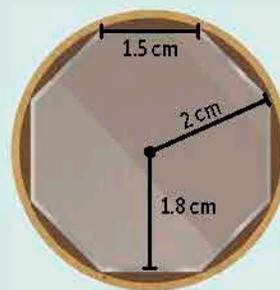
En las páginas www.edutics.mx/U2D y www.edutics.mx/U2z puedes realizar algunos ejercicios para calcular áreas de círculos.

Glosario

círculos tangentes. Se dice que dos círculos son tangentes cuando tienen un único punto de contacto. Además el punto de tangencia y los centros de las circunferencias están sobre una misma línea.

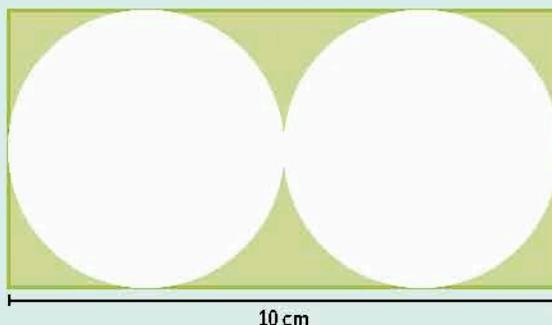
1. Considera nuevamente la situación presentada al inicio de la secuencia.

La caja circular en la que se guardó el cristal octagonal tiene un radio de 2 cm, como se muestra en la figura. ¿Cuántos centímetros cuadrados hay de diferencia entre el área del círculo y el área del polígono?

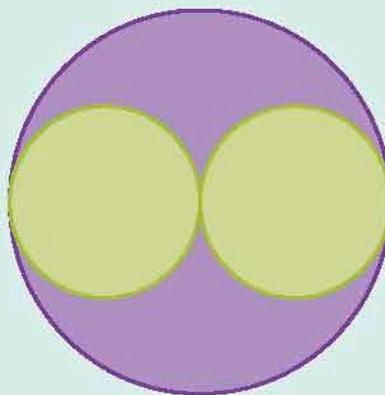


2. Resuelve los siguientes problemas.

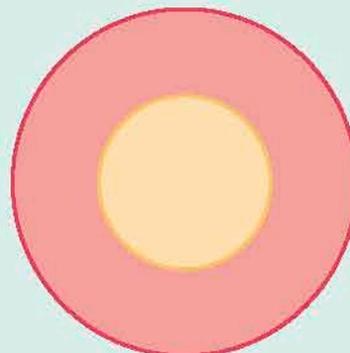
a) ¿Cuál es el área de la región sombreada?



b) Dos **círculos tangentes** e iguales son tangentes con respecto al círculo grande de radio $R = 7$ cm, como se muestra en la figura. ¿Qué región tiene mayor área, la morada o la verde? Explica tu respuesta.



c) Si el radio del círculo rojo es de 4.6 cm y el del círculo amarillo es de 2.3 cm, ¿qué porcentaje del total de la superficie le corresponde a este último?



◆ Explica a tus compañeros cómo analizaste cada figura para resolver los problemas.

Recolecta, registra y lee datos en histogramas, polígonos de frecuencia y gráficas de línea.

Partimos



Figura 20.1 Los aerogeneradores pueden transformar la fuerza del viento en electricidad.

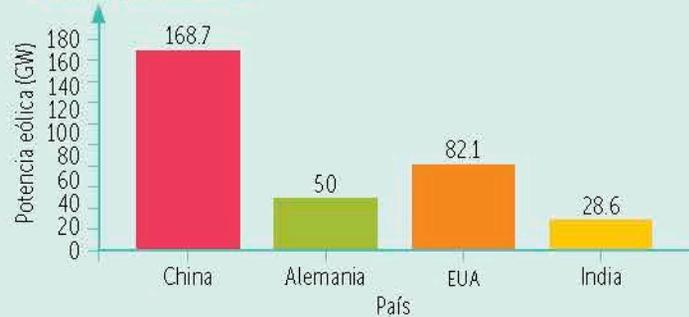
Glosario

energía eólica. Forma de energía renovable que se obtiene al explotar la fuerza del viento a través de un equipo comúnmente llamado aerogenerador (figura 20.1).

En el bloque anterior aprendiste a leer y a registrar datos en dos tipos de gráficas, a saber, los histogramas y polígonos de frecuencia. En esta secuencia, para ampliar tu conocimiento acerca de las herramientas que te permiten comunicar información, aprenderás a graficar e interpretar datos que cambian con el tiempo.

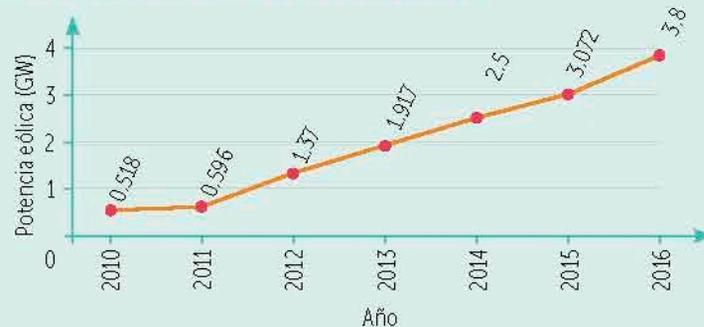
1. Observa las siguientes gráficas y contesta.

A Potencia eólica total instalada en los principales países productores



Fuente: "Global Statistics", Global Wind Energy Council (GWEC), www.gwec.net/global-figures/graphs/ (consulta: 06 de junio de 2018).

B Potencia eólica total instalada en México



Fuente: "Evolución de la capacidad instalada en México 2007-2022", Asociación Mexicana de Energía Eólica (AMDEE), www.amdee.org/FAQRetrieve.aspx?ID=51455 (consulta: 06 de junio de 2018).

- ¿Qué país es el mayor productor de **energía eólica** en el mundo?
- ¿Entre qué años se dio el mayor crecimiento en México?
- ¿Cuál fue la potencia eólica instalada en México en enero de 2012?
- ¿Cuál es la diferencia de potencia eólica instalada entre México, en 2016, y el cuarto país productor en el mundo?

✦ Compara con algún compañero tus respuestas. Discutan las diferencias que encontraron entre la gráfica A y la B. ¿Cómo describirían el crecimiento de la energía eólica en México?

1. Analiza la gráfica y responde.

De acuerdo con los datos recabados por el INAH, el Museo Nacional de Antropología de la Ciudad de México fue uno de los museos más visitados en el año 2017. En la siguiente gráfica se muestra el número de visitantes por mes para este museo.

Visitantes por mes (2017)



Fuente: "Museos y monumentos históricos más visitados", Sistema Institucional, Estadística de visitantes, www.estadisticas.inah.gob.mx/ (consulta: 06 de junio de 2018).

- a) ¿Qué datos están representados en el eje de las abscisas?

- b) ¿Y en el eje de las ordenadas?

- c) ¿En qué mes recibe más visitas el museo? _____
- d) ¿Cuáles son los 3 meses consecutivos en que recibe menos visitas?

- e) ¿En qué meses coincide el número de visitantes?

- f) ¿En qué periodos hubo incrementos y en cuáles hubo descenso en el número de visitantes? _____

❖ Reúnete con un compañero y compara tus respuestas. Discutan de manera general qué representa la gráfica anterior. ¿Qué otra información pueden obtener de la gráfica? ¿Se les ocurre alguna razón de por qué hay un periodo en el que se reduce el número de visitas considerablemente?

✓ Una gráfica de línea es un conjunto de puntos unidos por segmentos de línea. Sirve para representar datos o información que cambia de manera continua en un lapso, por lo que en su eje horizontal la variable siempre se refiere al tiempo.

2. Lean la información en parejas y construyan una gráfica de línea usando los datos que se muestran.

El Popocatepetl (figura 20.2) es uno de los volcanes más activos del país, el cual después de 70 años de no dar motivos de alerta comenzó a tener otra vez una intensa actividad a partir de 1993. La siguiente tabla muestra las erupciones del volcán durante 16 años.



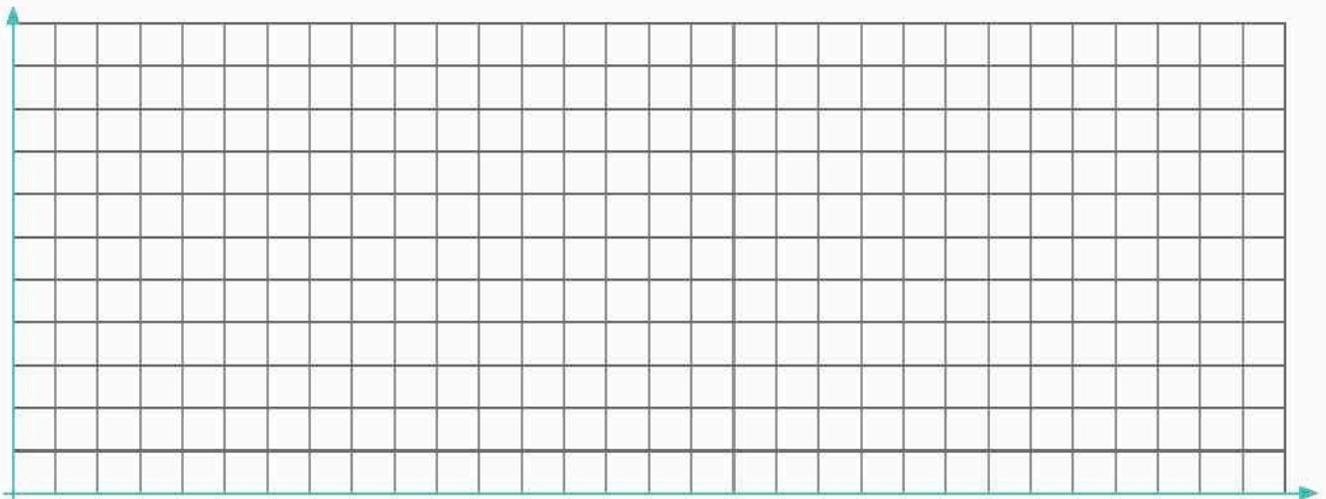
Figura 20.2 El Popocatepetl es el segundo volcán más alto de México, 5 500 metros sobre el nivel del mar, se ubica en los límites territoriales de los estados de Morelos, Puebla y México.

Año	Erupciones	Año	Erupciones
1996	9	2004	0
1997	3	2005	2
1998	4	2006	0
1999	2	2007	3
2000	8	2008	0
2001	4	2009	2
2002	9	2010	2
2003	5	2011	6

Centro Nacional de Prevención de Desastres, *Historia de la actividad del volcán Popocatepetl, 17 años de erupciones*, México, Cenapred, 2012.

a) Consideren las parejas de cada fila como un par ordenado (año, erupciones) y marquen las coordenadas correspondientes en el siguiente plano.

- ¿Cuál eje utilizarás para los años? _____
- ¿Cuál para la cantidad de erupciones? _____



- ¿Cuál es la escala que utilizaron en el eje de las ordenadas?

b) Unan los puntos con segmentos de línea y analicen la gráfica obtenida.

- ¿En qué años hubo mayor número de erupciones?

- ¿En qué años no hubo cambios en cuanto al número de erupciones?

- ❖ Comparen su gráfica con la de otra pareja. ¿Eligieron los mismos ejes para ubicar los datos? ¿De qué forma la unión de los puntos con líneas facilita la lectura de los datos? ¿Se puede obtener información de lo que sucede entre dos años seguidos, por ejemplo 2005 y 2006?



Para construir una gráfica de línea traza dos ejes perpendiculares. En el eje horizontal (abscisas) se colocan las unidades de tiempo correspondientes (horas, días, meses o años) y en el eje vertical (ordenadas), la frecuencia con la que varía el fenómeno durante el tiempo en que se analiza y siempre empezando con 0. Localiza y marca en el plano, con una cruz o un punto, cada coordenada formada por el tiempo y la frecuencia de la información dada. Finalmente une las marcas con segmentos de línea.



Hacemos

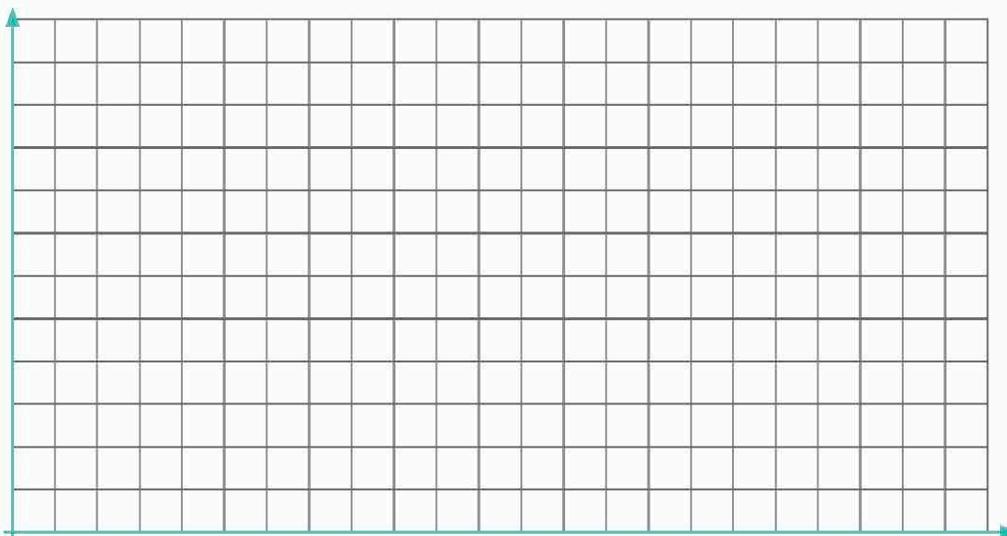
Investiga con tus compañeros las erupciones que ha tenido el volcán Popocatepetl y completa la gráfica. Preparen una exposición en la que interpreten el comportamiento de los datos de la gráfica. Pueden complementar su trabajo buscando información de otros volcanes de nuestro país.

3. Lee la información y realiza lo que se solicita.

Durante una semana, en una tortillería se registró el número de kilogramos vendidos para saber qué días deben de comprar menos masa. La información se muestra en la tabla.

- a) Construye una gráfica de línea para representar la información anterior. Usa escalas adecuadas fijándote en los valores mínimo y máximo de los kilogramos vendidos. Escoge un título adecuado para la gráfica y para los ejes.

Día	Venta (kg)
Lunes	195
Martes	270
Miércoles	260
Jueves	350
Viernes	295
Sábado	175
Domingo	160



b) ¿Qué día tuvieron la venta más baja? _____

c) ¿Qué día tuvieron la mejor venta? _____

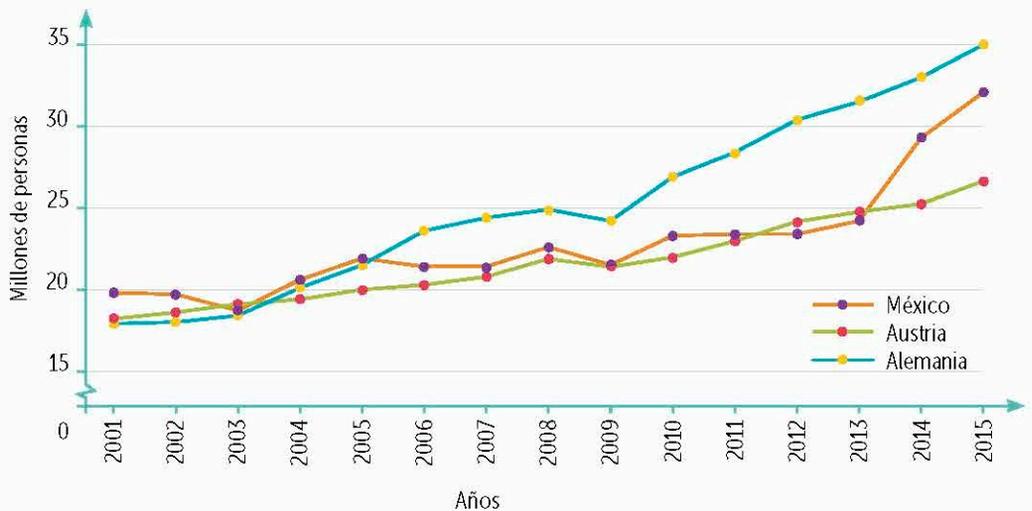
d) La dueña de la tortillería comenta que si vende más de 200 kg al día sus ganancias incrementan 25 % a las de los otros días. Describe cómo fueron sus ganancias en esa semana. _____

❖ Compara tu gráfica y tus respuestas con el resto del grupo. Comenten qué otra utilidad, dentro del contexto, le pueden dar a la información obtenida de la gráfica.

Comparación

4. Observa la gráfica y contesta.

Turismo extranjero



Fuente: "Ranking mundial de turismo internacional", Secretaría de Turismo (Sectur), www.datatur.sectur.gob.mx/SitePages/RankingOMT.aspx (consulta: 06 de junio de 2018).

- ¿De cuántos países se da información? _____
- ¿En qué años México tuvo el mayor número de turistas extranjeros?

- ¿Qué país tuvo el mayor número de visitantes en el 2015? _____
- ¿A partir de qué año Alemania ha sido más visitado que Austria y México?

- En el 2001, México fue el país más visitado, ¿en qué otros años se encontró en la misma situación? _____
- ¿En qué años Austria ha sido el país menos visitado?

- Describe qué tendencia observas con respecto al turismo extranjero en los tres países. _____

❖ Reúnete con tus compañeros y obtengan más información de las gráficas.

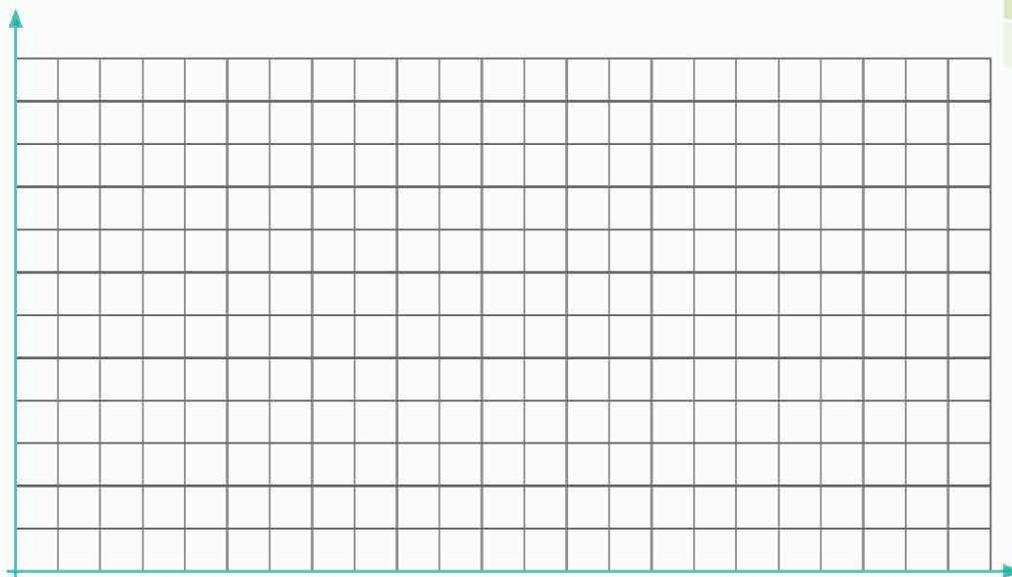


Trazar en un mismo plano dos o más gráficas de línea, que representen datos sobre la misma situación y en el mismo periodo, nos permite hacer comparaciones entre ellas.

5. Analicen en equipos cada situación y respondan.

a) La tabla de la derecha muestra el número de horas que, en promedio, niños y niñas de 8 años ven la televisión a la semana durante un mes. Usa los datos para construir una gráfica de línea.

	Niñas	Niños
Semana 1	5	9
Semana 2	4	5
Semana 3	12	11
Semana 4	9	11

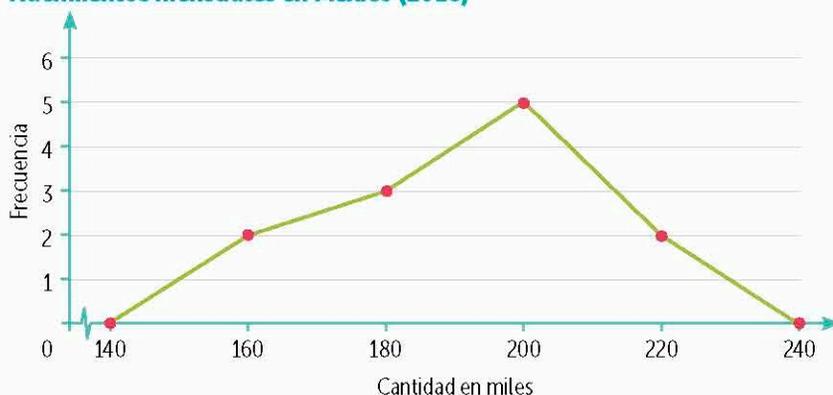


- ¿En qué semanas las niñas ven televisión más horas que los niños?

- ¿Quién ve la televisión menos horas en una semana? _____
- ¿En qué semana la diferencia de horas es mayor? _____

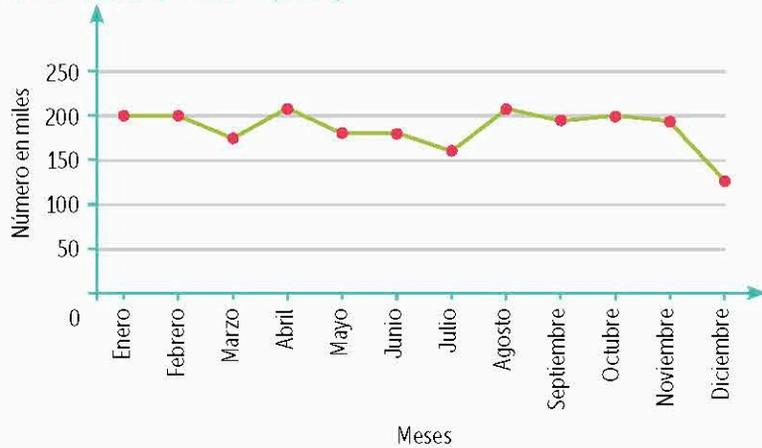
b) Observa las gráficas y contesta.

A Nacimientos mensuales en México (2016)



Fuente: "Natalidad: nacimientos por mes de registro", Inegi, www.inegi.org.mx/sistemas/olap/Proyectos/bd/continuas/natalidad/nacimientos.asp (consulta: 06 de junio de 2018).

B Nacimientos en México (2016)



Fuente: "Natalidad: nacimientos por mes de registro", Inegi, www.inegi.org.mx/sistemas/olap/Proyectos/bd/continuas/natalidad/nacimientos.asp (consulta: 06 de junio de 2018).

- ¿Qué tipos de gráfica son? _____
- ¿Qué variables están representadas en el eje de las abscisas en cada una de las gráficas? _____
- ¿Qué variables están representadas en el eje de las ordenadas en cada una de las gráficas? _____
- ¿En qué punto inicia y termina la gráfica A? ¿Y la gráfica B? _____

❖ Reúnete en equipo y escriban las diferencias entre la gráfica de polígono y la gráfica de línea. Utilicen esa información para la siguiente actividad.



Integración

- Copien el siguiente mapa conceptual y complétenlo con las características de los tres tipos de gráficas con las que han trabajado en este grado escolar.



1. Considera nuevamente la información de la gráfica B que se encuentra en la actividad con la que inició esta secuencia.
- a) Construye en un mismo plano las gráficas de línea correspondientes a la información de Brasil y México, y contesta.

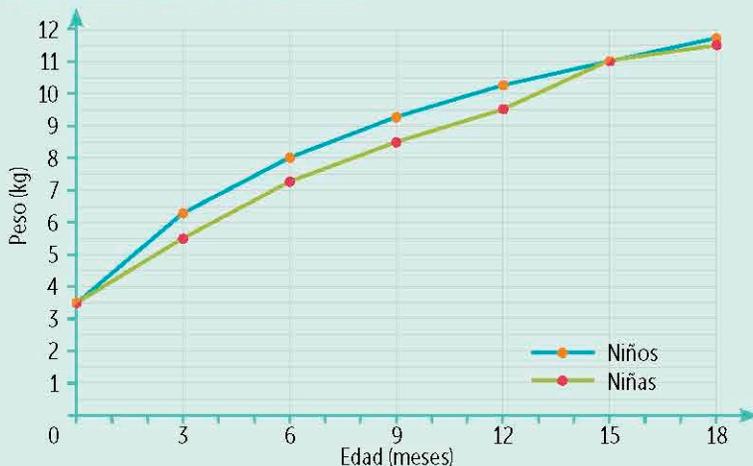
Potencia eólica instalada en Brasil						
Año	2011	2012	2013	2014	2015	2016
GW	1	1.7	2.14	4.88	8.14	10.7

Fuente: "Brasil, líder de energía eólica en Latinoamérica", REVE, www.evwind.com/2018/02/15/brasil-se-consolida-como-pais-con-mayor-capacidad-de-energia-eolica-en-latinoamerica/ (consulta: 06 de junio de 2018).

- ¿A partir de qué año Brasil incrementó, en cantidades muy superiores a las de México, su producción de energía eólica?
- ¿En algún año México ha tenido mayor producción de energía eólica que Brasil?
- ¿Qué país ha invertido más tiempo y dinero en el desarrollo de la energía eólica? Explica tu respuesta.

2. Observa la gráfica y contesta.

Peso de un bebe de 0 a 18 meses



Fuente: "Peso y estatura del bebé, niño y niña", *Guía infantil*, www.guiainfantil.com/salud/embarazo/tabla_pesos.htm (consulta: 06 de junio de 2018).

- a) ¿A qué edad coinciden los pesos de los niños y niñas?
- b) ¿En algún momento el peso de las niñas es mayor al de los niños?
- c) ¿A qué edad se registra la mayor diferencia entre el peso de niñas y niños?

- ❖ Compara tus respuestas y gráficas con el resto del grupo. Recuerda elegir una escala adecuada, así como poner títulos y unidades en los ejes. Discutan acerca de la utilidad de las tablas y gráficas para organizar y comunicar información.



Explora

Busca en las siguientes páginas www.edutics.mx/U6Y y www.edutics.mx/U6g o en otras fuentes información para comunicarla por medio de gráficas de línea.

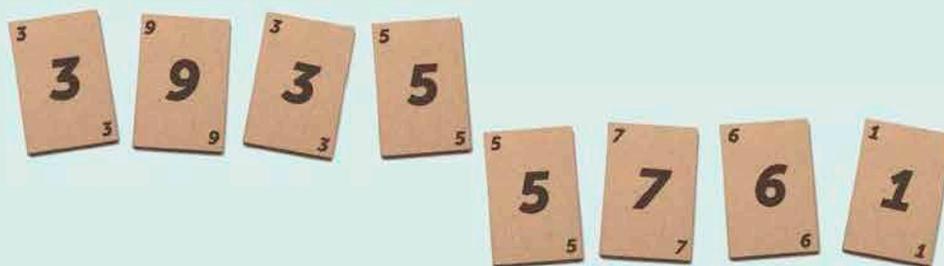
Desviación media

Usa e interpreta las medidas de tendencia central (moda, media aritmética y mediana), el rango y la desviación media de un conjunto de datos y decide cuál de ellas conviene más en el análisis de los datos en cuestión.

Partimos

En primero de secundaria aprendiste a calcular las medidas de tendencia central (moda, media y mediana) de un conjunto de datos y a decidir, de acuerdo al problema, cuál de ellas usar como representante de éstos. Asimismo aprendiste a analizar la dispersión por medio del rango. En esta secuencia estudiarás nuevas formas de medir qué tan dispersos están los datos de un conjunto determinado y con ello poder tomar decisiones de acuerdo con el contexto del problema.

1. Analiza el siguiente problema y resuelve.
Roberto y Matilde tienen 8 cartas con diferentes números como se muestra en la imagen.



- a) Jugarán con sus amigos a que usando 3 cartas deben encontrar una combinación para cada una de las siguientes condiciones.
- Para que la media sea 6.
 - Para que la media sea 5 y la mediana, 3.
 - Para que la moda sea 5 y el rango, 4.
- b) Matilde asegura que la cantidad de tiempo en que las niñas encuentran las combinaciones anteriores es menor que la cantidad de tiempo que tardan los niños, y Roberto opina lo contrario. Ambos toman el tiempo en segundos y lo registran en la siguiente tabla.

Niñas							
42	43	45	48	43	46	50	56
Niños							
49	45	48	50	48	49	36	48

- Calcula las medidas de tendencia central y el rango para el tiempo de las niñas y de los niños.
 - ¿Quién tenía razón, Matilde o Roberto?
- ❖ Compara tus respuestas con las de algún compañero y comenten si con las medidas de tendencia central y el rango que ya calcularon es posible confirmar una segunda afirmación de Matilde, acerca de que los tiempos que tardaron las niñas en contestar las preguntas resultaron más parecidos entre sí que los tiempos que tardaron los niños.

Analizando datos

1. Lee la situación y responde.

Dos inspectores de calidad deben revisar que no haya mucha variación en el contenido de café en una presentación, como la que se observa en la imagen de la derecha. Para ello, analizaron diferentes frascos, el registro que obtuvo cada inspector se muestra en la siguiente tabla.



	Contenido (g)				
Inspector A	99	102	98	108	100
Inspector B	93	103	95	101	97

- a) Calcula el rango de los datos de cada inspector. _____
- b) ¿Conocer el rango, te permite saber en cuál muestra hay mayor variación, es decir, te permite saber si la muestra de frascos del inspector A tienen un peso más cercano al que indica la etiqueta? Explica. _____
- c) En la siguiente recta numérica representa con puntos rojos los datos del inspector A y con azul los del inspector B.



d) Observa la ubicación de los puntos en la recta numérica y explica cuál de los inspectores tiene muestras con pesos muy cercanos entre sí.



Recuerda

En la secuencia 22 de primer grado aprendiste a calcular el rango de un conjunto, definido como la diferencia entre los valores mayor y menor de dicho conjunto.

❖ Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Discutan si es acertado decir que el contenido de los frascos del inspector A están menos alejados unos de otros que los del inspector B.



Integración

• Considera los siguientes conjuntos de datos.

A: 3, 4, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 9, 10

B: 5, 6, 6, 6, 12, 6, 6, 6, 6, 6

- a) Calcula el rango para cada conjunto. _____
- b) ¿En cuál de los dos conjuntos consideras que hay menor variación de datos? Explica tu respuesta. _____

Glosario



dispersión. En estadística, es la medida que indica el grado de separación de los datos medidos en torno de su valor medio.

El rango es considerado una medida de dispersión importante aunque a veces no es suficiente para medir la variabilidad de los datos, ya que sólo toma en cuenta los valores extremos y no considera los valores intermedios. No siempre se puede usar la recta numérica para determinar la variación de los datos de un conjunto, por lo que es recomendable encontrar otras medidas de **dispersión** que den un resultado más preciso.

Prueba A	Prueba B
110	112
120	101
111	104
109	121
116	117
130	97
96	129
106	114
104	95
108	120

2. Resuelvan en equipos el siguiente problema.

En una clínica se realizaron dos tipos de pruebas para medir el coeficiente intelectual de 20 personas; los resultados se muestran en la tabla de la izquierda. Los doctores quieren determinar en cuál de ellas los resultados están menos dispersos.

- ¿Cuál es el rango de los datos de cada prueba? _____
- ¿Y la media de los datos de cada prueba? _____
- ¿Cómo son el rango y la media de los datos de la prueba A y de la prueba B?

- A partir de la información anterior, ¿es posible determinar en cuál prueba los datos están menos dispersos? Argumenten. _____
- Completen la siguiente tabla calculando la distancia de cada dato a la media. Observen el ejemplo.

Prueba A		
Dato	Media \bar{x}	Distancia a la media $ x - \bar{x} $
96	111	$ 96 - 111 = 15$
104	111	$ 104 - 111 = 7$
106	111	
108	111	
109	111	
110	111	
111	111	
116	111	
120	111	
130	111	

Prueba B		
Dato	Media \bar{x}	Distancia a la media $ x - \bar{x} $
95	111	
97	111	
101	111	
104	111	
112	111	
114	111	
117	111	
120	111	
121	111	
129	111	

Notación



Para representar la media de un conjunto de datos se utiliza la letra x con una barra horizontal sobre ella: \bar{x} .

Recuerda



El valor absoluto es la distancia que hay entre un número y el cero. Por lo que siempre será positivo, y se representará al escribir el número entre dos barras verticales. Por ejemplo: $|-15| = 15$.

- ¿Por qué para calcular la distancia a la media se calcula el valor absoluto?

- Observen los resultados de la tercera columna de cada tabla. ¿Cuál prueba consideran que es mejor para los doctores? Expliquen. _____

- Debido a que no es posible determinar con el rango y la media qué tan dispersos están los datos, entonces se puede calcular el promedio de las distancias de cada dato a su media. Completen la siguiente expresión usando los datos de la tercera columna de la prueba A.

$$\text{Promedio de las distancias} = \frac{15+7+ \quad + \quad +2+ \quad +0+ \quad + \quad +19}{10}$$

Promedio de las distancias = _____

- Ahora calculen el promedio de las distancias de cada dato a su media para la prueba B.

$$\text{Promedio de las distancias} = \frac{16+7+ \quad + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad +18}{\quad}$$

Promedio de las distancias = _____

- Si comparan los promedios anteriores, ¿qué pueden concluir sobre la dispersión de los datos de ambas pruebas? _____

- ❖ Comparen sus respuestas y cálculos con el resto del grupo y lleguen a una decisión común sobre si la prueba A o la B, cumple mejor con las necesidades de los doctores.



Cuando la media y el rango de dos conjuntos son iguales es necesario encontrar otra manera que permita analizar los datos, para poder determinar la dispersión que existe entre ellos.

La desviación media ($D\bar{x}$) es una medida de dispersión que sirve para calcular cuánto se desvían en promedio los datos de la media aritmética e indica qué tan agrupados o alejados están con respecto de la misma. El cálculo de la desviación media se puede representar con la siguiente fórmula:

$$D\bar{x} = \frac{|x_1-\bar{x}| + |x_2-\bar{x}| + |x_3-\bar{x}| + \dots + |x_n-\bar{x}|}{n}, \text{ donde } n \text{ es el número de datos.}$$

3. Resuelve con un compañero los siguientes problemas.

- a) Para elegir qué jugador será el titular del siguiente torneo, el entrenador desea saber cuál ha sido más constante en anotar la misma cantidad de puntos. La tabla muestra el número de puntos que anotaron Pedro y Emilio en ocho partidos de basquetbol.

	Puntos por partido							
Pedro	23	17	31	25	25	19	28	32
Emilio	9	29	41	26	14	44	38	43

- Calculen la media de los puntos de cada jugador.

Pedro: _____ Emilio: _____



- Completen las siguientes tablas para calcular la desviación media de los puntos anotados por cada jugador.

Pedro		
Dato x	Media \bar{x}	Distancia a la media $ x - \bar{x} $
23		$ 23 - 25 = 2$

Emilio		
Dato x	Media \bar{x}	Distancia a la media $ x - \bar{x} $
9		$ 9 - 30.5 = 21.5$

- Completen la siguiente expresión para calcular la desviación media de los puntos que anotó Pedro.

$$D\bar{x} = \frac{2 + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad +}{\quad}$$

$$D\bar{x} = \quad$$
- Ahora calculen la desviación media de los puntos que anotó Emilio.

$$D\bar{x} = \frac{21.5 + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad +}{\quad}$$

$$D\bar{x} = \quad$$
- Comparen los resultados que obtuvieron y concluyan qué jugador es más consistente. Argumenten. _____

- b) La siguiente tabla muestra el registro de edad de las personas que acuden a un centro de asesorías, para presentar su examen de certificación de preparatoria en dos turnos. El profesor que imparte la clase a ambos turnos comenta que la **homogeneidad** de la edad de los asistentes le permite tener una clase más eficiente. ¿En cuál de los dos grupos puede dar mejor su clase?

Matutino	25	29	27	28	31	30	28	26	27	29
Vespertino	25	26	30	27	28	28	31	29	25	31

- Calculen las desviaciones media para ambos turnos.
 Matutino: _____
 Vespertino: _____

Glosario



homogeneidad. Hace referencia a la igualdad entre los valores o características de un conjunto.

- Usando los resultados de las desviaciones medias, ¿a cuál de los dos grupos le es más fácil al profesor impartir su clase? Expliquen.

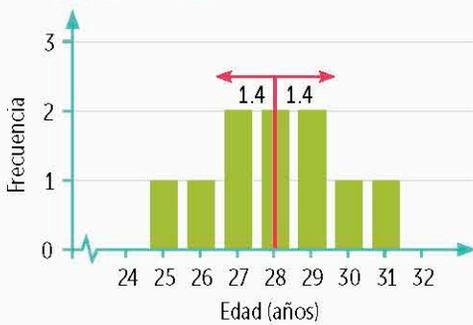
❖ Al trabajar con muchos datos es importante hacer los cálculos con cuidado ya que uno solo puede cambiar el resultado. Revisen en equipo sus cálculos e interpretaciones de cada problema. Corrijan en caso necesario. Pueden utilizar su calculadora.



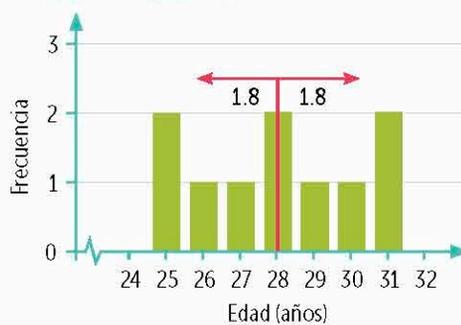
Integración

- Observa las gráficas y completa los incisos a) y b).
Las siguientes gráficas representan las edades de las personas en el problema del inciso b) anterior. La línea naranja representa el valor de la media, y las flechas, la desviación media.

Turno matutino



Turno vespertino



a) Si la desviación media es mayor implica que los datos están muy _____ y si es menor implica que los datos son muy _____.

b) Imagina una gráfica como cualquiera de las anteriores pero con un solo dato y sin importar su frecuencia. El valor de la desviación media sería _____.

4. Resuelvan en parejas y al término, comparen sus respuestas con el resto del grupo.

- a) Aurora utiliza dos máquinas distintas para fabricar brochas. Los datos de la tabla son los tamaños en centímetros de una muestra de la producción de brochas.

Máquina 1	11.2	12.9	11.5	12.8	11.2	12.7	11.8	12.3
Máquina 2	12.1	11.1	11.8	12.9	11.5	11.7	11.6	12.2

Aurora debe de utilizar la máquina con la mayor consistencia en el tamaño de las brochas.

Glosario



clinómetro. Instrumento que mide el ángulo formado entre el suelo o el observador y un objeto alto.



Figura 21.1 Los monumentales atlantes de Tula se encuentran en la parte superior del Templo de Tlahuizcalpantecutli. En ellos se puede ver la vestimenta típica de un guerrero tolteca: casco o tocado, orejeras, pectorales, brazaletes, musleras, rodilleras y sandalias.

- ¿Qué máquina debe de escoger para lograr su propósito?

- b) Los alumnos de segundo grado de la secundaria Benito Juárez fueron de excursión a la zona arqueológica de Tula, en el estado de Hidalgo. Parte de la visita consistía en medir a los atlantes (figura 21.1) que representan a los guerreros toltecas. Los alumnos utilizaron dos formas para calcular la altura de uno de ellos con proporciones: una tomándose una fotografía al lado de él y otra usando un **clinómetro** casero. Obtuvieron los siguientes resultados.

Método	Altura obtenida (m)									
Fotografía	4.61	4.38	4.56	4.49	4.34	4.36	4.57	4.60	4.53	4.58
Clinómetro	4.55	4.59	4.49	4.47	4.38	4.53	4.31	4.42	4.54	4.61

- Calculen la desviación media de las alturas obtenidas con cada método.
Fotografía: _____ Clinómetro: _____
- Determinen qué método fue más preciso para calcular la altura de uno de los atlantes. _____

Con tus propios datos

5. Elijan en equipos alguna de las siguientes actividades.

Comparar el contenido de tres marcas de bebidas embotelladas de acuerdo con su etiqueta.	Verificar la longitud de tres marcas de lápices nuevos.
Verificar el peso correcto de un producto en dos o tres comercios de tu comunidad (tortillería, tienda, etcétera).	Otra: _____ _____

Hacemos



A partir de la información obtenida en la actividad, elaboren un periódico mural para comunicar sus conclusiones a la comunidad. Utilicen gráficas para hacerlo más llamativo.

- Organícense para conseguir varias muestras de acuerdo con la actividad que hayan elegido, de preferencia 10 como mínimo.
- Lleven a cabo las mediciones que sean necesarias utilizando los materiales que estén a su alcance. Por ejemplo, para medir el contenido de una botella pueden utilizar algún recipiente de cocina o un biberón graduado.
- Registren y ordenen en tablas los datos obtenidos.
- Realicen los cálculos necesarios para analizar los datos utilizando las medidas de tendencia central, el rango y la desviación media.
- A partir de su análisis hagan una interpretación de los datos obtenidos y expongan sus conclusiones al resto del grupo.

- Retoma el problema planteado al inicio de la secuencia.
 - Calcula la desviación media del tiempo de las niñas y de los niños.
 - Explica si Matilde tiene razón en su segunda afirmación.
- Resuelve los siguientes problemas.
 - La siguiente tabla muestra el tiempo de retraso entre semana y de fin de semana de varios vuelos de una compañía aérea. La aerolínea quiere saber si las distribuciones de retraso son parecidas, para determinar si es un comportamiento común en los vuelos.

Tiempo (min)	Entre semana														
	11	21	32	15	36	17	24	37	21	12	22	23	51	54	59
	19	44	11	16	21	45	15	48	19	25	21	11	54	16	27
Tiempo (min)	Fin de semana														
	10	17	23	32	45	24	34	19	28	11	57	21	34	11	17
	21	30	13	21	17	10	47	48	17	52	18	12	58	36	48

- ¿Cuál es la desviación media para los tiempos de retraso que hay entre semana y en fin de semana?
 - ¿Se parecen los retrasos? Explica.
- Georgina tiene una fábrica que produce hojas de vidrio de 3 mm, 6 mm y 12 mm de espesor, en lotes de 100 hojas de un mismo espesor. Tiene problemas con las hojas de 3 mm pues son más factibles de romperse, tanto en el proceso de producción como en el de transportación. Por experiencia, sabe que en el caso de estas hojas le conviene producirlas con un rango de ± 0.1 mm de error, es decir, que puede faltarle 0.1 mm o pasarse 0.1 mm en el grosor; pero sus clientes le aprueban un rango de error de ± 0.2 mm.
 - ¿Piensas que los clientes le devolverán al menos una hoja si envía un lote con una media de producción de 3.05 mm y una desviación media de 0.15 mm?
 - ¿Cuál de los siguientes dos lotes parece tener mejor calidad?
 - A: media de 3.15 mm y una desviación media de 0.05 mm.
 - B: media de 3.2 mm y una desviación media de 0.0 mm.
 - El gerente de un restaurante encarga panqués como los de la imagen de la derecha. Cuando los compra por caja, insiste a sus proveedores que la desviación media de la masa del producto no debe superar el 8% de la masa que desea en cada panqué. La siguiente lista muestra el registro en onzas de los panqués en una caja recibida: 5.4, 5.2, 8, 7.1, 5.8, 4.9, 5.7, 5.4, 6.6, 4.7, 5.8, 6.9, 7.5, 5.8, 5.5, 7.2, 5.7, 5, 5.6, 6.5, 5.2, 7.9, 5.4, 6
 - ¿El gerente aceptará la caja? Explica tu respuesta.

- Compara tus respuestas con las del resto del grupo. ¿Obtuvieron los mismos resultados en los cálculos? ¿Qué interpretaciones hicieron de los datos en cada problema?



Explora

En la siguiente página www.edutics.mx/U6E podrás realizar algunos ejercicios de cálculo de desviación media.





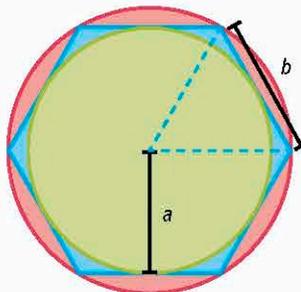
Autoevaluación

Analiza cada situación y subraya la respuesta correcta.

1. En la imagen se muestran las medidas de tres portaobjetos que se usan para analizar muestras de bacterias.

$$a = 1.7 \times 10^{-2} \text{ m}$$

$$b = 2 \times 10^{-2} \text{ m}$$



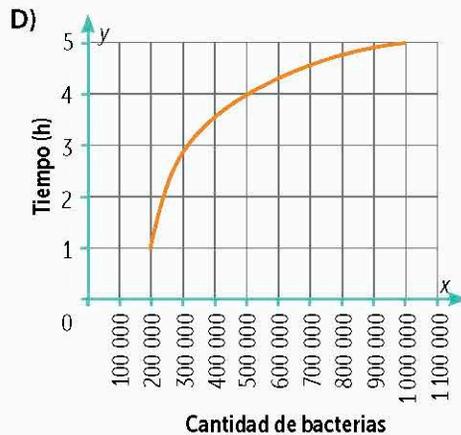
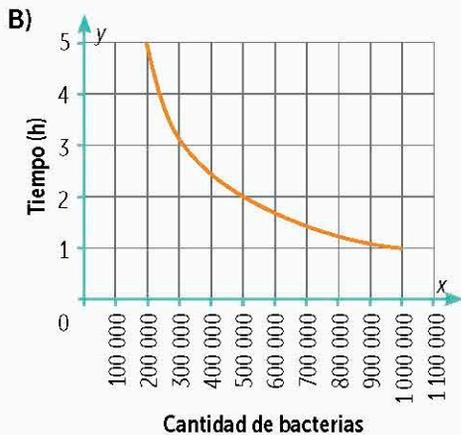
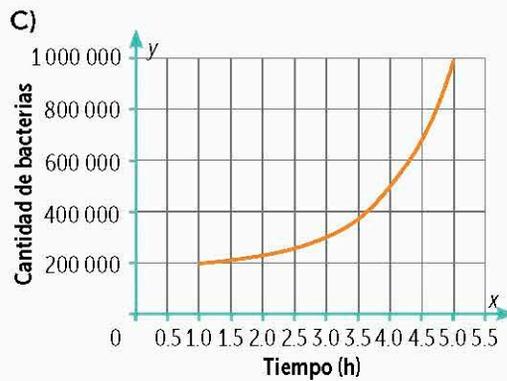
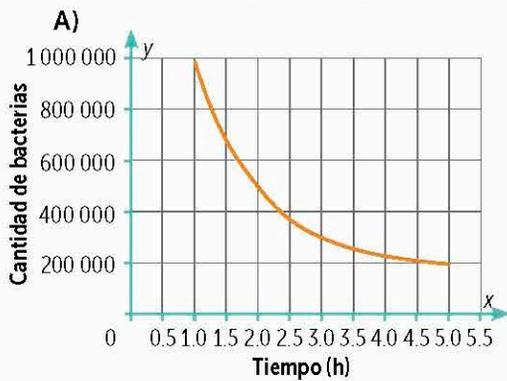
- Por cada metro cuadrado de área hay cerca de 5×10^6 bacterias, ¿cuántas hay aproximadamente en cada portaobjetos?
 - A) 10.2×10^{-4} bacterias, 35×10^{-4} bacterias y 30×10^{-4} bacterias
 - B) 1.76×10^{13} bacterias, 5.3×10^{10} bacterias y 3.4×10^{14} bacterias
 - C) 4.5×10^3 bacterias, 5.1×10^3 bacterias y 6.28×10^3 bacterias
 - D) 82×10^2 bacterias, 9×10^4 bacterias y 4×10^6 bacterias
 - Un portaobjetos cuadrado ocupa un área de 6 cm^2 , ¿cuál es la medida del lado del portaobjetos y cuántas bacterias tiene?
 - A) 4.1 cm y hay 30 bacterias
 - B) 3 cm y hay 5×10^6 bacterias
 - C) 2.4 cm y hay 30×10^6 bacterias
 - D) 2 cm y hay 6×10^6 bacterias
2. Las siguientes tablas muestran la cantidad de microorganismos que existen en dos portaobjetos bajo condiciones distintas.

Ⓘ	Horas sin antibiótico	Número de bacterias
	1	983 040
	2	1966 080
	3	2949 120
	4	3932 160
	5	4915 200

Ⓡ	Horas con antibiótico	Número de bacterias
	1	983 040
	2	491 520
	3	327 680
	4	245 760
	5	196 608

- ¿Qué tipo de relación proporcional corresponde en cada caso?
 - A) Proporcionalidad directa en ambos casos
 - B) Proporcionalidad inversa y directa, respectivamente
 - C) Proporcionalidad inversa en ambos casos
 - D) Proporcionalidad directa e inversa, respectivamente
- ¿Cuántas bacterias habrá en el portaobjetos I y II después de 8 horas?
 - A) 5 898 240 y 163 840 bacterias
 - B) 7 864 320 y 122 880 bacterias
 - C) 163 840 y 5 898 240 bacterias
 - D) 9 830 400 y 393 216 bacterias

- ¿Cuál de las siguientes gráficas representa los datos del portaobjetos II?



3. Raúl hizo 8 estudios de sangre, mientras que Daniel hizo 6. En total les pagaron \$910, ¿cuánto dinero le corresponde a cada uno de forma proporcional?

- A) \$455 para cada uno C) A Raúl, \$520 y a Daniel, \$390
 B) A Raúl, \$500 y a Daniel, \$410 D) A Raúl, \$590 y a Daniel, \$320

4. Se enlistan las edades de las personas que más se enferman de diarrea por causa de bacterias: 23, 26, 34, 28, 25, 25, 32, 27, 26, 26, 29.

- ¿Qué tan dispersos están los datos según el rango y la desviación media? ¿Cuál de estas dos medidas da información más precisa?

A) 11 y 2.4, respectivamente; el rango
 B) 2.4 y 11, respectivamente; la desviación media
 C) 11 y 2.4, respectivamente; la desviación media
 D) No es posible comparar dichos valores.
- ¿Es posible trazar una gráfica de línea con los datos anteriores?

A) Sí, son datos homogéneos. C) No, porque no dependen del tiempo.
 B) No, porque el rango es pequeño. D) Sí, porque la media es 28.

Reúnete en pareja con un compañero. Compáren sus respuestas, argumenten el porqué respondieron así. Corrijan lo que sea necesario.

Coevaluación

Revisa con tu profesor los resultados: ¿en qué necesitas mejorar? ¿Qué estrategias usarás?

Heteroevaluación



¡Teselados para todos!

Curiosidad e interés en la resolución de problemas

En la vida cotidiana puedes encontrar una gran variedad de modelos y ejemplos de las formas estudiadas por la geometría. En realidad las aplicaciones de esta rama de las matemáticas son tan extensas que las puedes observar en la naturaleza y hasta en el suelo por donde caminas.

La intervención de las musas

Los teselados también son llamados mosaicos, palabra cuyo significado hace referencia a las musas, pues los romanos creían que para crear diseños con los cuales se pudiera cubrir un plano con las mismas figuras y sin dejar huecos entre ellas era necesario que una musa inspirara o susurrara ideas al creador.

Sin embargo, es posible encontrar arreglos de teselados en todas partes, por ejemplo, en un panal de abejas, las escamas de un pez, el caparazón de una tortuga, el exterior de una piña, formaciones naturales de basalto, el revestimiento de paredes y pisos, etcétera.

“ Las abejas saben bien que al crear hexágonos pueden almacenar la mayor cantidad de miel con la menor cantidad de cera.”

August Wilhelm von Hofmann

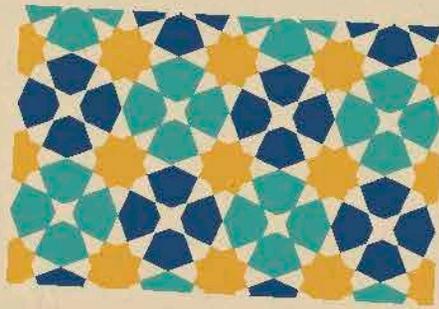
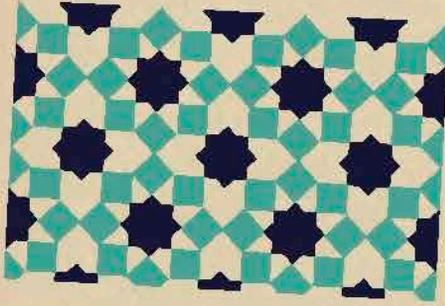


Figuras geométricas

Los polígonos regulares con los que es posible teselar o cubrir por completo una superficie plana son solamente tres.



Si se combinan varios polígonos regulares es posible formar ocho teselados semirregulares. También se pueden formar teselados por la repetición ordenada de figuras irregulares sin dejar huecos.



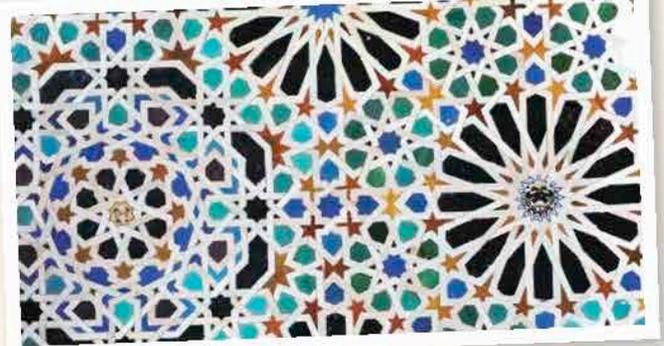
En 1975 una ama de casa cuyo pasatiempo era diseñar teselados descubrió cuatro pentágonos irregulares, con los que es posible cubrir el plano. A la fecha se pueden apreciar 15 teselados pentagonales, el último fue descubierto en 2015.

Los famosos y no tan famosos

Algunas evidencias del trabajo con teselados se encuentran en la pavimentación romana y griega; en la decoración de construcciones, como es el caso de la ciudad La Alhambra en Granada, España, entre otras. De hecho, Maurits Cornelis Escher, después de observar los motivos ornamentales de esa ciudad, desarrolló sus propios diseños plasmados en sus cuadros, los cuales son muestra representativa del arte moderno.



La intención práctica de cubrir un camino con losetas sin que haya huecos entre las piezas es evitar caídas y lesiones, tanto de personas como de animales, y así facilitar el paso.



Los artistas musulmanes tenían prohibido representar seres vivientes en sus creaciones. Esta limitación les sirvió para estimular sus mentes y generar diseños de gran belleza y originalidad.



Los azulejos y las losetas que cubren las paredes y los pisos de las habitaciones de muchos hogares son teselados que presentan diseños más complejos.

→ ¿Podrías identificar otros teselados en la naturaleza y en las construcciones que te rodean?



Número, álgebra y variación

- 22. Modelos geométricos y expresiones algebraicas
- 23. Sucesiones y expresiones algebraicas equivalentes
- 24. Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas
- 25. Método gráfico para resolver un sistema de ecuaciones
- 26. Métodos algebraicos para resolver un sistema de ecuaciones

Forma, espacio y medida

- 27. Desarrollos planos de prismas y cilindros
- 28. Volumen de prismas rectos
- 29. Volumen de cilindros

Análisis de datos

- 30. Probabilidad teórica

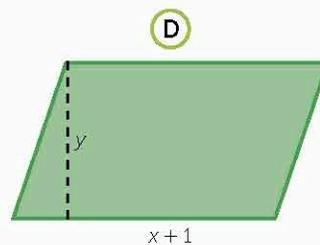
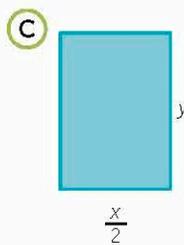
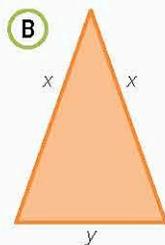
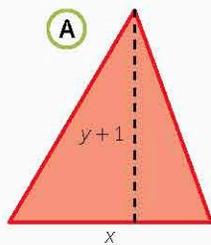


“Las preguntas más importantes de la vida, de hecho, no son en su mayoría más que problemas de probabilidad.”

Pierre Simon Laplace

Bloque **3**

1. Escribe la letra que relacione cada figura con la expresión de área o perímetro que le corresponde.



() A = $y(x + 1)$

() P = $x + 2y$

() A = $\frac{x(y+1)}{2}$

() P = $2x + y$

2. Subraya la opción que representa la regla algebraica de la sucesión: 2, 5, 8, 11, ...

A) $2x + 1$

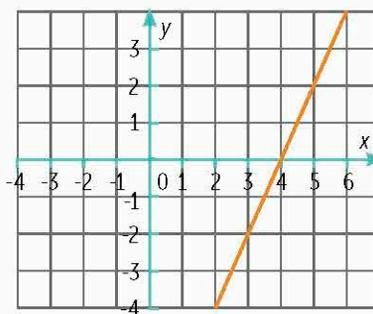
C) $3x - 1$

B) $6x - 4$

D) $x + 3$

3. Realiza las operaciones correspondientes y contesta: en un estacionamiento hay 12 vehículos motorizados. Si en total hay 38 llantas, ¿cuántas motocicletas y cuántos automóviles hay?

4. Subraya la ecuación que corresponde a la siguiente gráfica.



A) $2x + y = 4$

C) $-2x + y = 4$

B) $2x + y = 8$

D) $2x - y = 8$

5. Subraya la ecuación que modela la situación.

Javier tiene siete años más que Ana. Dentro de dos años la edad de Javier será el doble de la de Ana.

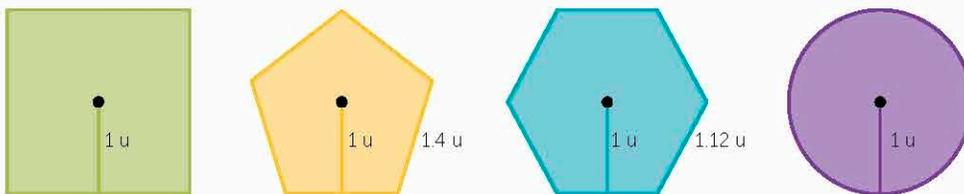
A) $a + 7 = 2a$

C) $a + 7 = a + 2$

B) $(a + 7) + 2 = 2(a + 2)$

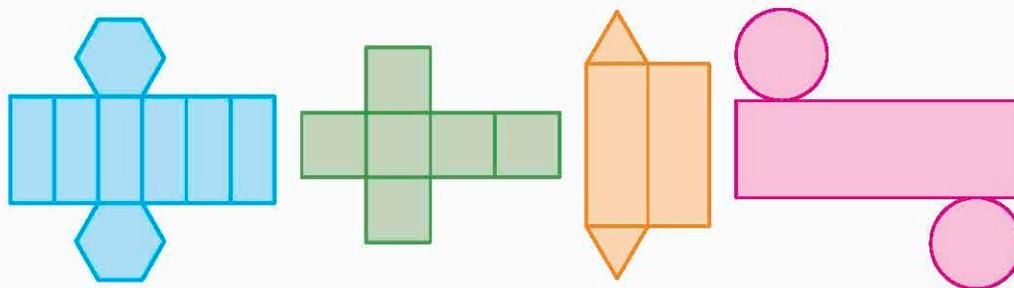
D) $(a + 7) + 2 = 2a$

6. Subraya la opción de la figura que tenga la mayor área.



- A) Cuadrado
 B) Pentágono
 C) Círculo
 D) Hexágono

7. Encierra la plantilla con la que no se puede formar el cuerpo geométrico.



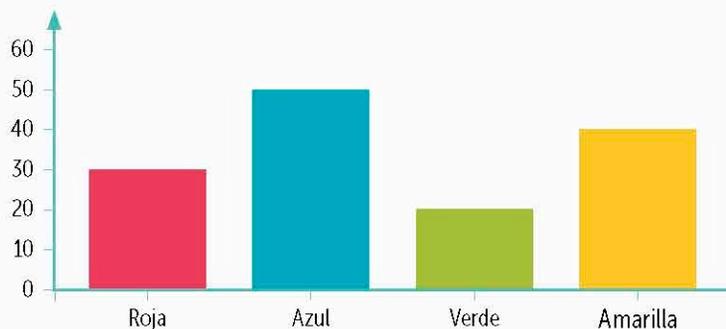
Prisma hexagonal

Cubo

Prisma triangular

Cilindro

8. En una urna hay dos canicas verdes, tres canicas rojas, cinco canicas azules y cuatro canicas amarillas. La siguiente gráfica muestra los resultados obtenidos al extraer una canica de la urna, registrar el resultado y regresar la canica. Si se realiza el experimento 1 000 veces, ¿qué evento se espera que ocurra 300 veces, aproximadamente?



- A) Sacar una canica amarilla.
 B) Sacar una canica verde.
 C) Sacar una canica roja.
 D) Sacar una canica azul.

9. Revisa los resultados con tu profesor. Juntos establezcan los temas en los que deberás poner más atención y las estrategias de estudio a implementar para que aprendas los contenidos del bloque.

Modelos geométricos y expresiones algebraicas

Formula expresiones de primer grado para representar propiedades (perímetros y áreas) de figuras geométricas y verifica equivalencia de expresiones, tanto algebraica como geoméricamente (análisis de las figuras).

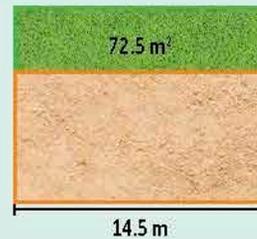
Partimos

En primero de secundaria utilizaste expresiones algebraicas para calcular el área y el perímetro de figuras como el triángulo y el rectángulo; en segundo grado para polígonos regulares y el círculo. En esta secuencia, además de estudiar cómo expresar algebraicamente el área de más configuraciones geométricas, aprenderás que existen diversas maneras de escribirlas.

1. Lee la situación y resuelve.

En un terreno rectangular de 14.5 m de largo se planea construir una casa con un jardín de 72.5 m^2 de superficie en la parte trasera, como se muestra en la figura.

- ¿Cuál es el ancho del jardín?
- Si se representa con x el ancho del terreno, ¿cuál es el ancho de la parte donde se construirá la casa?
- Escribe una expresión algebraica que represente el área del terreno donde se construirá la casa.



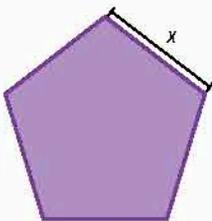
- ❖ Compara tus respuestas con las de tus compañeros. ¿Encontraron maneras distintas de expresar el área del terreno? ¿Cuáles? ¿Cómo pueden saber si todas son correctas?

Recorremos

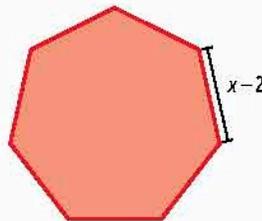
Expresiones equivalentes

1. Analiza las siguientes figuras y haz lo que se indica.

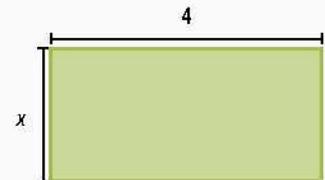
- Escribe para cada figura, de acuerdo con los datos, dos expresiones algebraicas que representen su perímetro.



Expresión 1:
Expresión 2:



Expresión 1:
Expresión 2:



Expresión 1:
Expresión 2:

b) Escribe de forma algebraica la equivalencia de las expresiones que encuentres.

- Pentágono: _____
- Heptágono: _____
- Rectángulo: _____

c) Escribe en las siguientes tablas una de las expresiones que encuentres para el perímetro de los polígonos. Después calcula el perímetro tomando los valores que se indican.

Polígono	Expresión 1	Perímetro si $x = 3$	Perímetro si $x = 5$
Pentágono			
Rectángulo			
Heptágono			

Polígono	Expresión 2	Perímetro si $x = 3$	Perímetro si $x = 5$
Pentágono			
Rectángulo			
Heptágono			



Recuerda

Al hacer operaciones en las que se realicen sumas y productos es necesario seguir la jerarquía de operaciones.

d) Responde: ¿cómo son entre sí los resultados de la tercera y cuarta columna de las dos tablas? _____

- ❖ Compara tus respuestas y tus procedimientos con los de tus compañeros. ¿Encontraron las mismas expresiones para cada perímetro? ¿Son las únicas o existen otras que también representen el perímetro? ¿Cómo saben que las expresiones que escribieron son equivalentes?



Dos expresiones algebraicas que están escritas de manera distinta, pero que tienen el mismo valor numérico, sea cual sea el valor de las variables o literales, son equivalentes. Por ejemplo, $x + x + x = 3x$ o $2x + 2x + 1 = 4x + 1$.



Integración

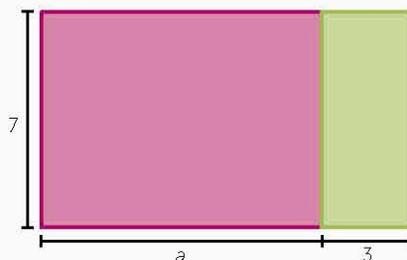
- Subrayen en parejas las expresiones algebraicas que no sean equivalentes con las de cada inciso.

- | | | |
|----------------|----------------------|---------------------|
| a) $4x + 5$: | $3x + 3 + x + 2$ | $2x - 6 + 1 + 2x$ |
| | $x + x + 4 + 2x + 1$ | $5x + 6 - x - 1$ |
| b) $2a + 3b$: | $b + a + 2b$ | $2b + 2a + b$ |
| | $3a + 3b - a$ | $a + b + 2a + 2b$ |
| c) $4m - 5n$: | $3m + n + m - 6n$ | $m + n + 3m + 4n$ |
| | $-3n + 2m - 2n + 2m$ | $-3n + m - 2n + 4m$ |

Con paréntesis

2. Analicen en equipos las siguientes figuras y contesten.

a) Observen la figura compuesta por rectángulos.

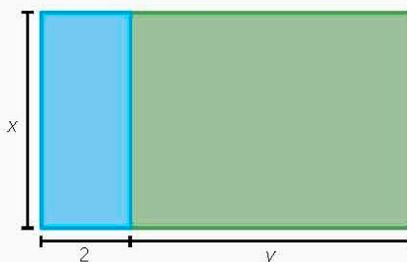


- Expresen su área como el producto de sus dimensiones de largo y ancho.

- ¿Cuál es el área de cada rectángulo que lo compone?
Rojo: _____ Verde: _____
- Expresen el área del rectángulo mayor a partir de la suma de las áreas de los rectángulos que lo forman. _____
- Las dos maneras anteriores de determinar el área del rectángulo mayor son equivalentes. Expresen esta equivalencia algebraicamente al completar el siguiente esquema.

Área total	=	Área rectángulo rojo	+	Área rectángulo verde
	=		+	

b) Representen el área del rectángulo completo como el largo por el ancho.



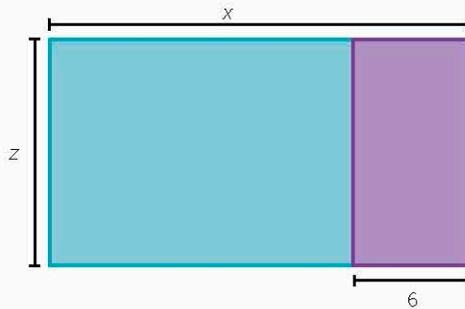
- Expresen el área del rectángulo como la suma de las áreas de los rectángulos azul y verde que lo forman.

- Representen algebraicamente la equivalencia entre las expresiones que corresponden a las áreas.
_____ = _____

- Expliquen qué operaciones algebraicas es necesario realizar para obtener la expresión de la derecha a partir de la izquierda.

c) Analicen las dos equivalencias de expresiones en los incisos a) y b), ¿qué semejanzas hay con la propiedad distributiva de la multiplicación?

d) Observen el siguiente rectángulo compuesto.



- Representen de dos maneras distintas el área del rectángulo azul.
- Expresen algebraicamente la equivalencia de las expresiones anteriores.
- Expliquen cómo pueden obtener algebraicamente $zx - 6z$ a partir de $z(x - 6)$.



Recuerda

La propiedad distributiva de la multiplicación establece que el producto de un número por una suma o diferencia es igual a la suma o diferencia de los productos por separado. Por ejemplo:

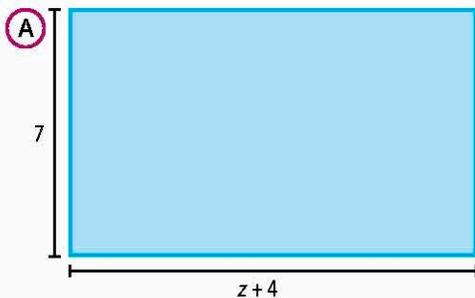
$$3(7 + 2) = 3(7) + 3(2)$$

$$3(7 - 2) = 3(7) - 3(2)$$

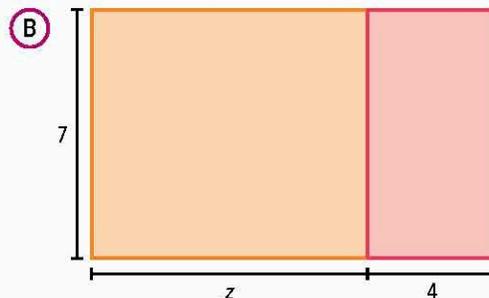
❖ Comparen sus respuestas y razonamientos con el resto del grupo. ¿Las expresiones del área que encontraron son equivalentes? ¿Cómo pueden obtener una a partir de la otra? ¿Qué representa, por ejemplo, zx y xz ?

3. Reúnete con un compañero y resuelvan.

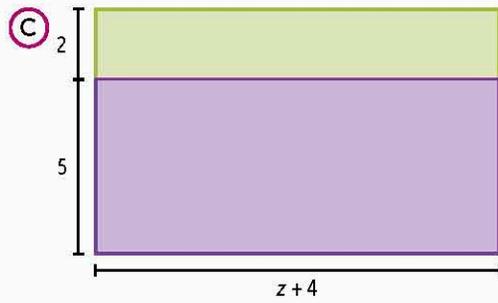
a) Los siguientes rectángulos tienen la misma superficie. Para cada uno de ellos escriban una expresión algebraica que represente su área a partir de la división de la superficie que se propone.



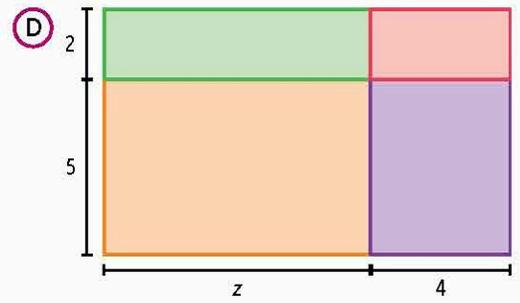
Área:



Área:



Área:



Área:

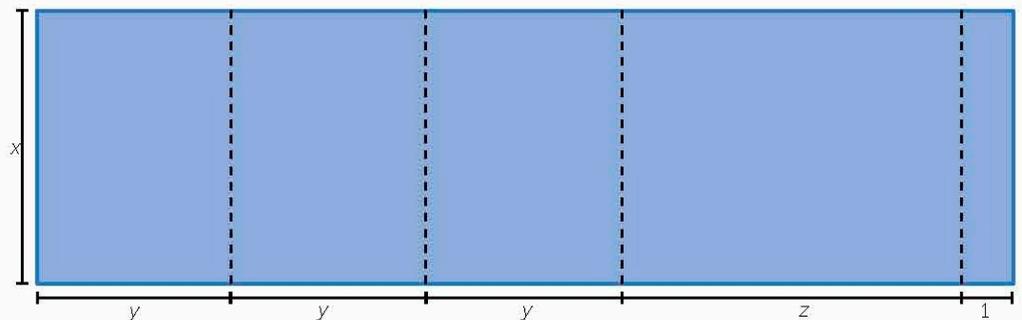
b) Calculen el área de cada figura para el valor indicado de z , con base en las expresiones anteriores.

z	Área			
	Figura A	Figura B	Figura C	Figura D
3				
5				
8				

c) Expliquen por qué las cuatro expresiones algebraicas son equivalentes.

❖ Comparen sus respuestas con las de otra pareja. Analicen qué manipulación algebraica es posible realizar para obtener cada expresión a partir de otra; por ejemplo, ¿cómo se obtiene la expresión algebraica de la figura A a partir de la expresión de la figura C?

4. Continúen en parejas, analicen la figura y escriban dos expresiones algebraicas que representen su área.



Expresión 1:

Expresión 2:

- a) ¿Cuál es la longitud total del largo del rectángulo? _____
- b) ¿En cuántos rectángulos diferentes está dividida la figura? ¿Cuál es el área de cada uno? _____
- c) ¿Cuál es la expresión equivalente a $x(3y + z + 1)$? _____

❖ Comparen sus respuestas con el resto del grupo. ¿Qué pueden concluir del producto de un número por una suma cuando uno de los sumandos es una letra? ¿Son equivalentes las expresiones $3xy$, $x3y$, $3yx$? ¿Qué procedimiento utilizaron para comprobar que las expresiones son equivalentes?



Las propiedades de las operaciones aritméticas, en particular las propiedades conmutativa y distributiva de la multiplicación son válidas al realizar transformaciones algebraicas.



Integración

- Divida la superficie del rectángulo e indica las dimensiones correspondientes en la figura de manera que, a partir de su área, sea posible representar la equivalencia $m(a + b + 1) = ma + mb + m$.



Aprendemos

Analiza: para aprender es importante relacionar lo nuevo con lo que ya se conoce, ¿por qué?

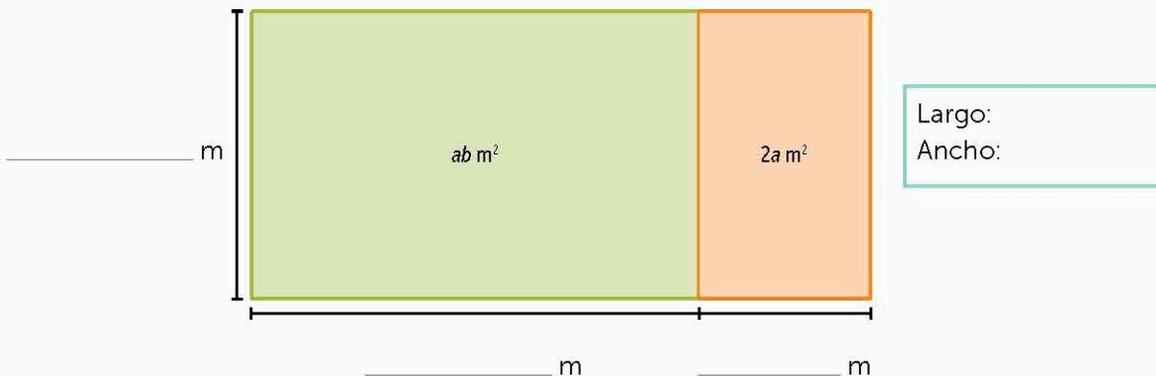
5. Analicen las figuras en equipos y contesten.

Cada una de las siguientes figuras representa un terreno dividido en parcelas. Al interior de cada parcela se indicó su área en metros cuadrados.

Para cada figura:

- Indiquen la longitud de cada lado.
- Escriban en el recuadro las dimensiones, en metros, del largo y ancho del terreno.
- Escriban una expresión que represente el área total del terreno.

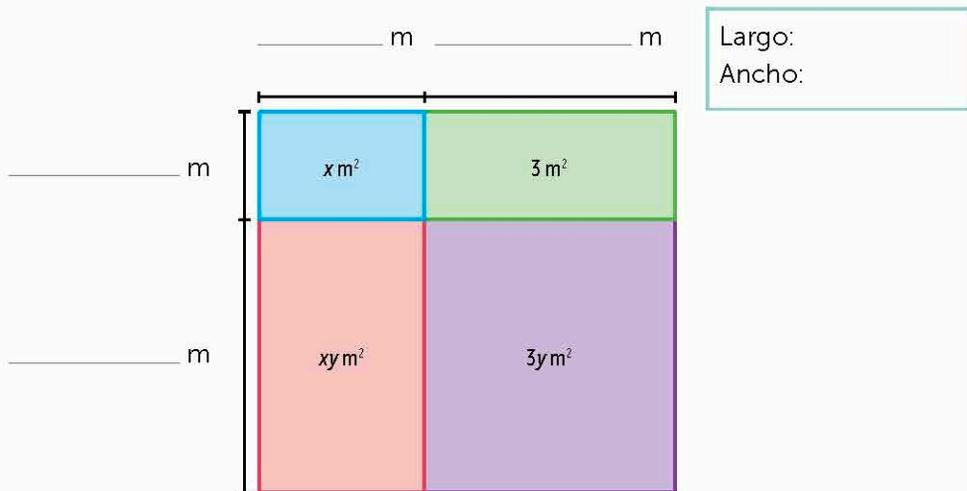
a)



- Expresión que represente el área total del terreno: _____
- Equivalencia entre las expresiones del área total y la suma del área de las parcelas.

_____ = _____

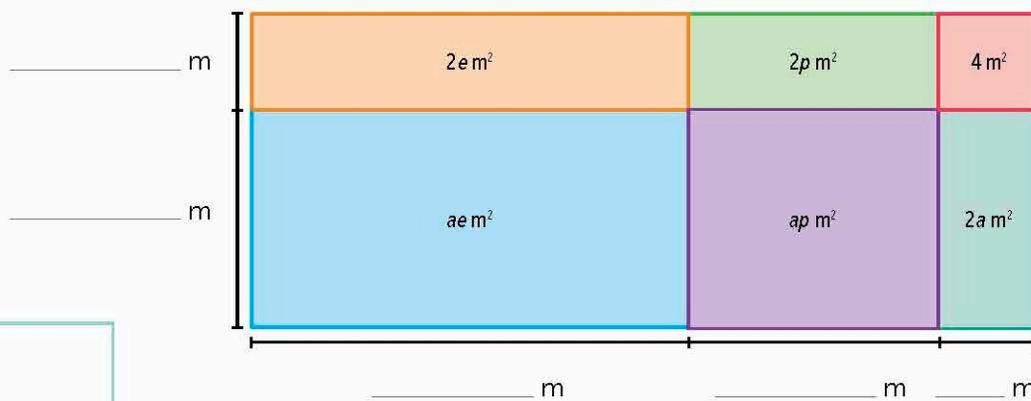
b)



- Expresión que represente el área total del terreno: _____
- Equivalencia entre las expresiones del área total y la suma del área de las parcelas.

_____ = _____

c)



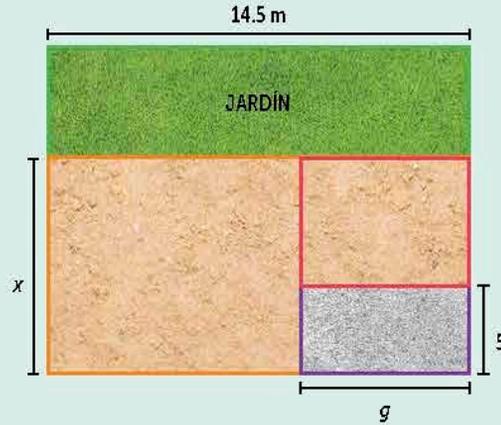
- Expresión que represente el área total del terreno: _____
- Equivalencia entre las expresiones del área total y la suma del área de las parcelas.

_____ = _____

❖ Comparen sus respuestas y razonamientos con el resto del grupo. Comprueben que todas las expresiones algebraicas que escribieron para el área sean equivalentes. Establezcan una conclusión de cómo resolver el producto de dos sumas de expresiones algebraicas.



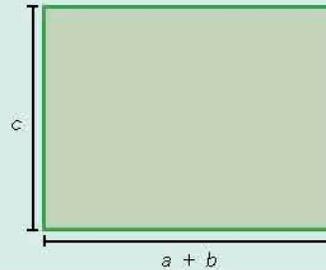
1. Analiza nuevamente la figura del problema que dio inicio a esta secuencia. En el terreno se construyó un estacionamiento de 5 m de ancho y g metros de largo, como se muestra en la siguiente figura.



- a) ¿Cuál es el área del estacionamiento?
 b) Expresa de dos maneras distintas el área del terreno sin jardín que queda para construir.

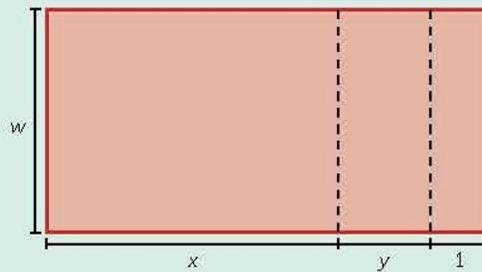
2. Selecciona las expresiones que representan el perímetro del rectángulo.

- $2c + a + b$
- $2(a + b + c)$
- $a + b + c$
- $2a + 2b + 2c$



3. Selecciona las expresiones que representan el área del rectángulo.

- $xw + yw + 1$
- $w(x + y + 1)$
- $xw + yw + w$
- $x + y + w + 1$



4. Tacha las igualdades que sean falsas.

$x(a + 1) = xa + x$ $a(b + c + 3) = ab + ac + 3$ $5(x + y) = 5x + 5$
 $3b - 2 + b = 4b - 2$ $4x - 4w + 4z = 4(x - w + z)$ $(a + 1)(b + 2) = ab + a + b$

5. Para cada expresión escribe otra que sea equivalente.

$5(z + 3) =$ $3x + xy =$

Compara tus respuestas con las de algún compañero. Discutan por qué las expresiones algebraicas que encontraron para el área son equivalentes.



Explora

En la siguiente página www.edutics.mx/UuC podrás resolver algunos ejercicios de expresiones algebraicas equivalentes.

Sucesiones y expresiones algebraicas equivalentes

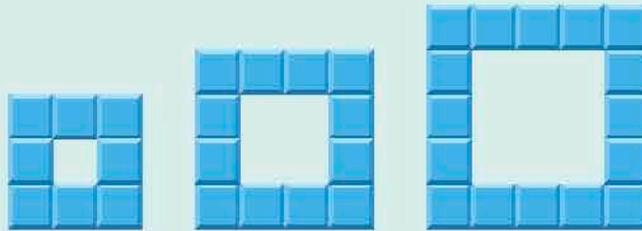
Verifica algebraicamente la equivalencia de expresiones de primer grado, formuladas a partir de sucesiones.

Partimos



1. Lee el siguiente problema y contesta.

En el parque ecológico "Los Manantiales" se planea construir estanques de diversos tamaños. El borde de cada uno estará formado por losetas cuadradas, como se muestra en la figura.



- ¿Cuántas losetas tiene el contorno de un estanque que tiene 8 losetas por lado?
- ¿Y un estanque con 15 losetas por lado?
- ¿Cuántas losetas por lado hay en un estanque que tiene en total 72 losetas de contorno?
- ¿Es posible construir un estanque que tenga 90 losetas en el contorno?

❖ Compara tus respuestas y tus razonamientos con los de algún compañero. ¿Construir una sucesión y conocer su regla general les permitiría contestar las preguntas anteriores? ¿Cuál es la sucesión numérica que representa el número de losetas que tiene cada contorno de los estanques? ¿Cuál es la sucesión que da cuenta del número de losetas por lado?

Recorremos

Expresiones algebraicas equivalentes

1. Analiza y resuelve.

Minerva y Raquel están jugando a identificar sucesiones. Por turnos se muestran tarjetas con sucesiones numéricas y una expresión algebraica que las representa para que el jugador contrario describa con palabras la regla general y una expresión algebraica equivalente a la que está en la tarjeta.

a) Minerva

Sucesión A: 3, 5, 7, 9, ...

Expresión algebraica: $3 + 2(n - 1)$

Regla general con palabras: _____

Expresión algebraica equivalente: _____

b) Raquel

Sucesión B: 2, 4, 6, 8, ...
 Expresión algebraica: $2 + 2(n-1)$

Regla general con palabras: _____

Expresión algebraica equivalente: _____

c) Minerva

Sucesión C: 13, 19, 25, 31, ...
 Expresión algebraica: $13 + 6(n-1)$

Regla general con palabras: _____

Expresión algebraica equivalente: _____



Recuerda

En primer grado aprendiste a formular expresiones algebraicas a partir de sucesiones.

❖ Compara tus respuestas y tus procedimientos con los de algún compañero. ¿Las reglas escritas con palabras son equivalentes? ¿Y las que están escritas algebraicamente? Discutan cómo pueden comprobar si las expresiones algebraicas que escribieron corresponden a las sucesiones.

2. Observen en parejas las reglas algebraicas que dieron otros alumnos al jugar con las mismas tarjetas. Luego resuelvan lo que se indica.

Maribel	Alejandro
Sucesión A: $3 + (2n-2)$	Sucesión A: $2n + 1$
Sucesión B: $2 + 2(n + 1)$	Sucesión B: $2n$
Sucesión C: $13 + (6n-6)$	Sucesión C: $6n + 6$

a) Utilicen la siguiente tabla para comprobar si las reglas de las sucesiones que dieron Maribel y Alejandro representan a cada sucesión.

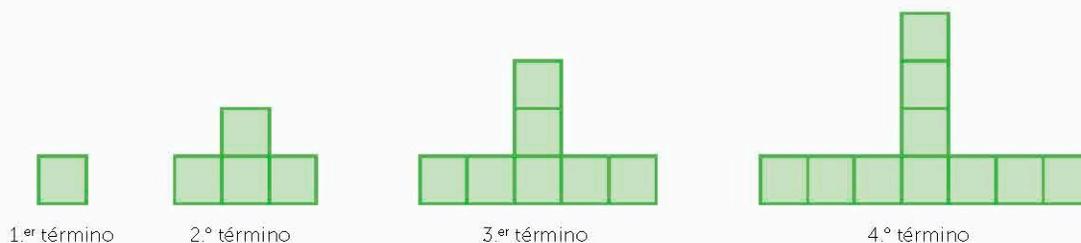
Sucesión	Regla de la sucesión	1.º término ($n = 1$)	2.º término ($n = 2$)	3.º término ($n = 3$)	4.º término ($n = 4$)
A	$3 + (2n-2)$				
	$2n + 1$				

Sucesión	Regla de la sucesión	1.º término ($n = 1$)	2.º término ($n = 2$)	3.º término ($n = 3$)	4.º término ($n = 4$)
B	$2 + 2(n + 1)$				
	$2n$				
C	$13 + (6n - 6)$				
	$6n + 6$				

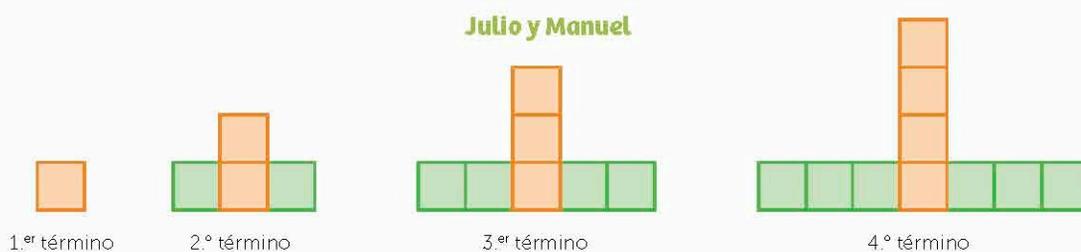
- b) ¿Qué reglas algebraicas representan a la sucesión en cada caso?
- c) ¿Qué reglas algebraicas no representan a la sucesión? Expliquen.
- d) Corrijan las expresiones algebraicas que no representan a las sucesiones y escribanlas de manera correcta.

❖ Comparen sus respuestas y procedimientos con el resto del grupo. Con respecto a las expresiones que sí representan a la sucesión, ¿cómo pueden obtener una a partir de la otra?

3. Analicen en equipos la siguiente sucesión y contesten.

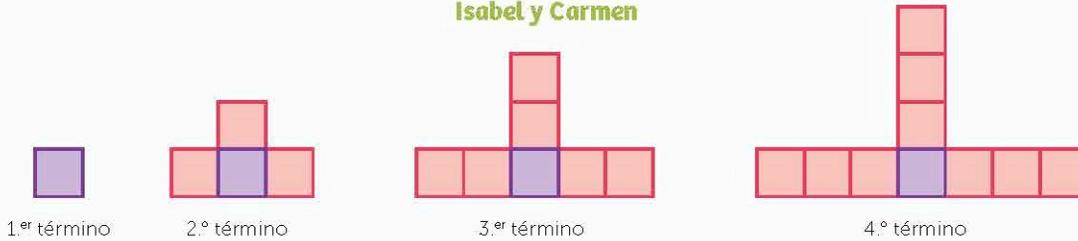


- a) Escriban la regla general de la sucesión con palabras y algebraicamente.
- Regla general con palabras: _____
 - Regla general algebraica: _____
- b) Observen el análisis que hicieron tres equipos.



- Regla general con palabras: la cantidad de cuadrados verticales coincide con el número de término de la sucesión. La cantidad de cuadrados horizontales de cada lado del cuadrado central coincide con el número de término de la sucesión menos 1.
- Regla general algebraica: $n + (n-1) + (n-1)$, con n el número de término de la sucesión.

Isabel y Carmen



- Regla general con palabras: el cuadrado central (morado) más los cuadrados que lo rodean (rosas) los cuales son el triple del número de término de la figura menos 1.
- Regla general algebraica: $1 + 3(n-1)$, con n el número de término de la sucesión.

Diana y Pedro



- Regla con palabras: cada figura tiene 3 cuadrados más que la anterior y empieza con 1 cuadrado.
- Regla algebraica: $3n - 2$, con n el número de término de la sucesión.

c) Verifiquen que las reglas algebraicas de cada pareja representen a la sucesión de figuras. Expliquen cómo lo hicieron.

d) Respondan: ¿la expresión algebraica que escribieron en el inciso a) coincide con la expresión de otra pareja? ¿Con cuál?

e) Expliquen qué operaciones algebraicas podrían utilizar para obtener la expresión algebraica que se pide a partir de la que se indica.

- La expresión de Diana y Pedro a partir de la expresión de Julio y Manuel.

$n + (n - 1) + (n - 1) =$ _____



Recuerda

En la secuencia 22 analizaste propiedades de las operaciones aritméticas que son válidas para las expresiones algebraicas.



Explora



En la siguiente página www.edutics.mx/ULK podrás realizar algunos ejercicios para obtener la expresión general de sucesiones aritméticas.

- La expresión de Julio y Manuel a partir de la expresión de Isabel y Carmen.
 $1 + 3(n-1) =$ _____
 - La expresión de Diana y Pedro a partir de la expresión de Isabel y Carmen.
 $1 + 3(n-1) =$ _____
- f) Escriban la equivalencia algebraica de las expresiones algebraicas de las tres parejas.
- _____
- _____

✦ Comparen sus respuestas y sus procedimientos con los de otras parejas. ¿Encontraron expresiones algebraicas distintas a las dadas? ¿Son equivalentes todas las expresiones algebraicas que encontraron? ¿Cómo pueden obtener una a partir de otra?



Si dos o más expresiones algebraicas corresponden a la regla general de una misma sucesión, entonces son equivalentes y una de ellas se puede obtener a partir de las demás a través de transformaciones u operaciones algebraicas.

Explicitación de transformaciones algebraicas

4. Continúen trabajando en equipos. Observen la sucesión de figuras y resuelvan.



Posición 1



Posición 2



Posición 3

Recuerda

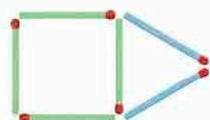


Los elementos de una sucesión reciben el nombre de términos y el lugar que ocupa cada uno se conoce como posición.

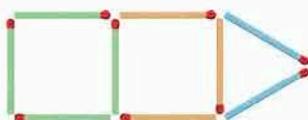
- Escriban los cinco primeros términos de la sucesión numérica que representa la cantidad de cerillos en cada posición.

- Escriban una expresión algebraica de la regla general de la sucesión anterior.

- Juan dice que $4 + 3(n-1) + 2$ es la regla general para determinar la cantidad de cerillos que tiene la figura en la posición n .



Posición 1



Posición 2



Posición 3

- Sustituyan el valor de n para las primeras cinco posiciones y comprueben que la regla general de Juan es correcta.

$$4 + 3(\text{_____} - 1) + 2 = 4 + 3(\text{_____}) + 2 = \text{_____}$$

$$4 + 3(\text{_____} - 1) + 2 = 4 + 3(\text{_____}) + 2 = 4 + \text{_____} + 2 = \text{_____}$$

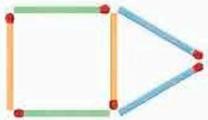
$$4 + 3(\quad - 1) + 2 = 4 + 3(\quad) + 2 = 4 + \quad + 2 = \quad$$

$$4 + 3(\quad - 1) + 2 = 4 + 3(\quad) + 2 = 4 + \quad + 2 = \quad$$

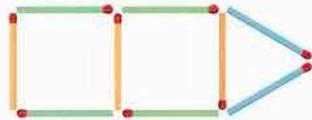
$$4 + 3(\quad - 1) + 2 = 4 + 3(\quad) + 2 = 4 + \quad + 2 = \quad$$

- Expliquen cuál consideran que fue el razonamiento de Juan para llegar a la expresión algebraica. _____

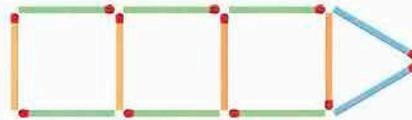
d) Nuria dice que $n + n + (n + 1) + 2$ es la regla general para determinar la cantidad de cerillos que tiene la figura en la posición n .



Posición 1



Posición 2



Posición 3

- Sustituyan el valor de n para las primeras cinco posiciones y comprueben que la regla general de Nuria es correcta.

$$\quad + \quad + (\quad + 1) + 2 = \quad + \quad + \quad + 2 = \quad$$

$$\quad + \quad + (\quad + 1) + 2 = \quad + \quad + \quad + 2 = \quad$$

$$\quad + \quad + (\quad + 1) + 2 = \quad + \quad + \quad + 2 = \quad$$

$$\quad + \quad + (4 + 1) + 2 = \quad + \quad + \quad + 2 = \quad$$

$$\quad + \quad + (\quad + 1) + 2 = \quad + \quad + \quad + 2 = \quad$$

- Expliquen cuál piensan que fue el razonamiento de Nuria para llegar a la expresión algebraica. _____

e) Expliquen, qué operaciones algebraicas podrían hacer para comprobar que las expresiones algebraicas de Juan y Nuria son equivalentes.

- Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Comprueben que la expresión que obtuvieron en el inciso b) es equivalente con las de Nuria y Juan. Hagan la comprobación evaluando para distintos valores y algebraicamente.

5. Analiza y resuelve. Para cada una de las siguientes sucesiones, subraya las expresiones algebraicas que representen su regla general y verifica su equivalencia algebraica transformando una expresión en otra.

a) $-3, -7, -11, -15, -19, \dots$

$$-4n + 1$$

$$-3 + 4(n - 1)$$

$$-3 - 4(n - 1)$$

$$4n - 1$$

Equivalencia algebraica: _____

b) $7, 12, 17, 22, 27, \dots$

$$5(x - 1)$$

$$7 + 5(x - 1)$$

$$-2 + 5x + 7$$

$$5x + 2$$

Equivalencia algebraica: _____

c) $\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}, \dots$

$\frac{1}{2}m + 1$

$-\frac{1}{2}m + 1$

$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(m-1)$

$-\frac{1}{2}m - 1$

Equivalencia algebraica: _____

- ❖ Compara tus respuestas y tus procedimientos con el resto del grupo. ¿Qué procedimiento utilizaron para identificar las reglas que representan a las sucesiones? ¿Qué operaciones realizaron con las expresiones algebraicas?

Aprendemos



Analiza: cuando se incluyen ejemplos, ¿cómo mejora la utilidad y la interpretación de un resumen?

Integración

- Hagan un resumen en grupo acerca de las operaciones que es posible hacer con expresiones algebraicas. Consideren los casos analizados en esta secuencia y en la anterior. Utilicen ejemplos.

$\frac{1}{3}(b-1) = \frac{1}{3}b - \frac{1}{3}$

Es posible multiplicar un número por una expresión algebraica.

$n + n + n + n = 4n$

Es posible sumar algebraicamente literales del mismo tipo.

Glosario



baldosas. Placa elaborada en mármol, piedra o cerámica, puede ser lisa o decorada, y sirve para cubrir muros o pisos.

6. Resuelvan en grupo el siguiente problema.

En el camellón de la avenida principal de una pequeña ciudad se quieren poner 100 jardineras con flores. Cada jardinera estará rodeada de baldosas hexagonales. En el siguiente modelo se muestra paso a paso cómo se han acomodado 3 de ellas.



- a) Completen la tabla con el número de baldosas empleadas por cantidad de ellas colocadas.

Jardineras	1	2	3	4	5	6
Baldosas						

- b) Escriban tres reglas generales para la sucesión que representa la cantidad de baldosas por jardinera.

Regla 1: _____ Regla 2: _____ Regla 3: _____

c) Evalúen las expresiones para cada posición y verifiquen que con las tres reglas es posible obtener los cuatro primeros términos de la sucesión.

Regla	1.º término	2.º término	3.º término	4.º término

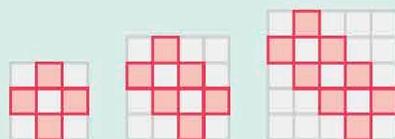
d) Hagan las transformaciones necesarias para escribir:

- La regla 1 a partir de la regla 2: _____
- La regla 2 a partir de la regla 3: _____
- La regla 3 a partir de la regla 1: _____

❖ Expliquen detalladamente las transformaciones algebraicas que realizaron.



1. Considera de nuevo el problema que se encuentra al inicio de la secuencia.
 - a) Escribe dos reglas generales para la sucesión de losetas.
 - b) Muestra algebraicamente que son equivalentes.
 - c) Verifica tus respuestas a la actividad de la página 202 utilizando una de las reglas generales del inciso a) que acabas de escribir.
2. Observa la sucesión que se forma con los cuadrados rojos de cada figura.
 - a) Escribe dos reglas generales.
 - b) Muestra algebraicamente que son equivalentes.



3. Para cada una de las siguientes sucesiones numéricas, escribe dos reglas generales.

7, 10, 13, 16, ... -1, 4, 9, 14, ...
4. Cada una de las siguientes igualdades representan la equivalencia entre dos expresiones algebraicas que modelan la regla general de una sucesión. Encierra con rojo las que sean falsas y corrígelas.

a) $2(n + 3) = 8 + 2(n - 1)$	d) $-3n - 3 = -6 - 3(n - 1)$
b) $7(n - 4) = -21 + 7(n + 1)$	e) $8 + 4(n - 1) = 4n + 4$
c) $20 + 5(n + 1) = 5(n + 3)$	f) $\frac{4}{5} + \frac{2}{5}(n + 1) = \frac{2}{5}(n - 1)$

❖ Compara tus resultados y procedimientos con el resto del grupo. Comprueben que todas las reglas generales que obtuvieron representen a cada sucesión y sean equivalentes entre ellas.



Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas

Resuelve problemas mediante la formulación y solución de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas (procedimientos intuitivos).

Partimos

En primer grado de secundaria aprendiste a plantear y resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita. Para avanzar en el estudio de las ecuaciones, en esta secuencia aprenderás qué es una ecuación con dos incógnitas, un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas y cuándo un par de valores es solución de dicho sistema.

1. Lee el siguiente acertijo y resuelve.

En uno de los corrales de la granja de mi abuela hay gallinas y conejos. Aun cuando todos se mueven, logré contar 40 cabezas y 106 patas. ¿Cuántos conejos y cuántas gallinas hay en el corral?



- Explica cuáles son las incógnitas del problema.
- Escribe una ecuación que represente el número de animales que hay en el corral.
- Escribe una ecuación que represente el número total de patas.
- ¿Cuántas gallinas piensas que hay en el corral?
- ¿Cuántos conejos piensas que hay en el corral?

❖ Compara tus respuestas y tus razonamientos con los de algún compañero. ¿Coinciden? ¿Las incógnitas que utilizaron en las ecuaciones representan el mismo valor? ¿Qué información adicional sobre los animales utilizaron para determinar la ecuación del número de patas? ¿Cómo podrían saber cuántos animales de cada tipo hay en el corral?

Recorremos

Ecuaciones lineales con dos incógnitas

1. Lean en parejas el siguiente diálogo y contesten.

Camila: Marco, dime dos números que sumados den 10.

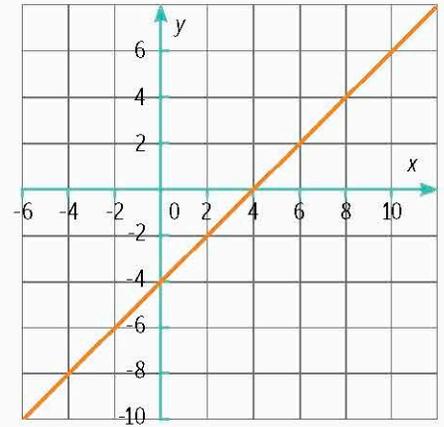
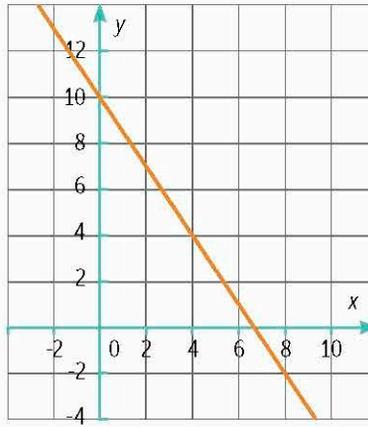
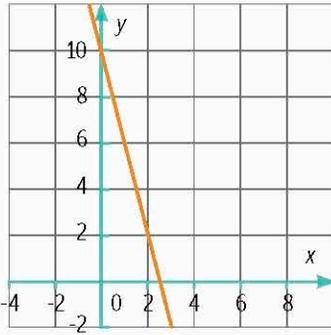
Marco: Hay muchas posibilidades. Por ejemplo, 5 y 5, 9 y 1, 7 y 3, 6 y 4,...

Camila: Mmm... ¿y no has pensado en otras, como 110 y -100, 13.6 y -3.6 o -11.1 y 21.1?

Marco: ¡Claro! ¿Cómo podríamos representar a todos estos números?

Camila: ¡Vamos a investigar!

- a) Ayuden a Camila y Marco escribiendo una expresión algebraica que represente a las parejas de números que sumadas den como resultado 10. _____
- b) Escriban una ecuación que represente cada una de las siguientes frases.
- La diferencia de dos números cualesquiera es igual a 4. _____
 - El doble de un número más la mitad de otro equivale a 5. _____
 - La suma del triple de un número más el doble de otro es igual a 20. _____
- c) Encuentren una solución para cada una de las ecuaciones del inciso anterior.
- Solución: _____ y _____
 - Solución: _____ y _____
 - Solución: _____ y _____
- d) Asignen las ecuaciones del inciso b) a las gráficas que les corresponde.



- e) ¿Cómo determinaron qué gráfica correspondía a cada ecuación?

- ❖ Comparen sus respuestas. Expliquen cómo relacionaron cada gráfica con su ecuación. ¿Ubicaron en cada gráfica los puntos del inciso c)? ¿Qué ecuación del inciso b) incluye las coordenadas del punto (6, 10)?



Una ecuación de primer grado con dos incógnitas es una expresión de la forma $ax + by = c$, donde x y y son las incógnitas, a y b son **coeficientes** y c el término independiente.

Una solución de esta ecuación es un par de valores que al sustituirlos por las incógnitas x y y , transforman la ecuación en una **identidad** o igualdad que siempre se cumple. Las ecuaciones de primer grado con dos incógnitas tienen infinitas soluciones; sin embargo, para un valor de x dado sólo le corresponde un valor de y . La representación gráfica de estas soluciones es una recta.



Glosario

coeficiente. Número que se escribe a la izquierda de una variable o incógnita y que indica el número de veces que este debe multiplicarse.

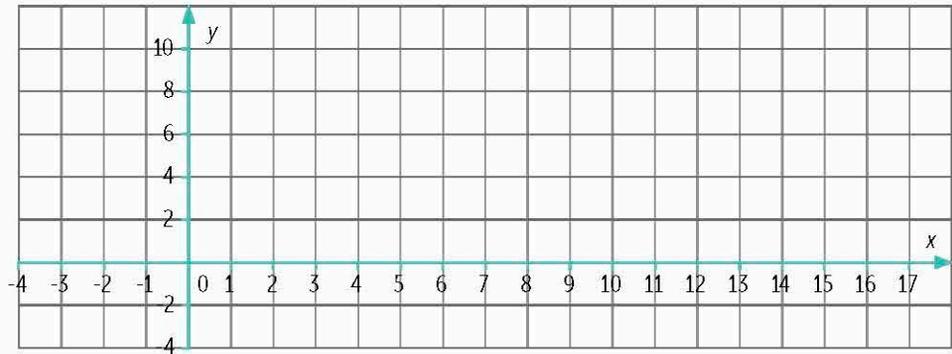


Integración

- Completa la tabla con algunas parejas de números que sean solución de la ecuación $x + y = 10$.

x							
y							

- Representa en el plano cartesiano las soluciones de la ecuación y verifica que al unir los puntos se forme una recta.



Sistemas de ecuaciones

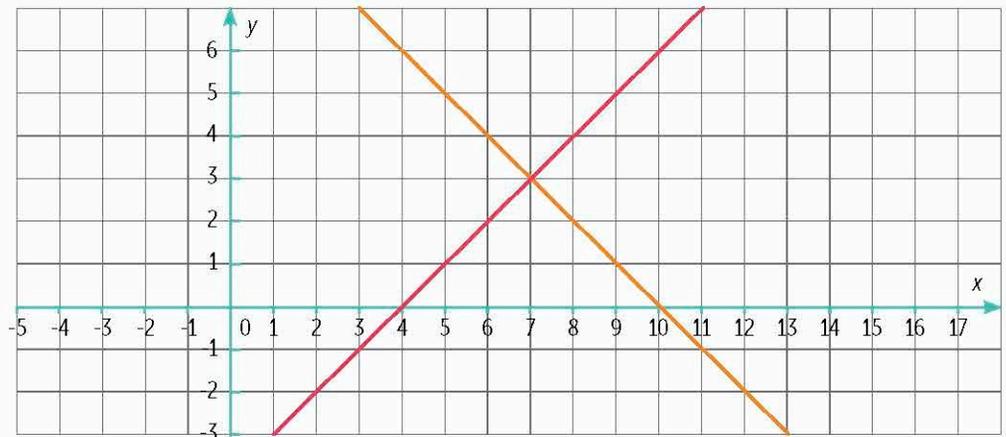
2. Resuelve el siguiente problema.

Camila y Marco siguen jugando a buscar números. Pero, ahora, agregaron una nueva condición: la suma de los números debe ser 10 y, al mismo tiempo, el resultado de su diferencia, 4.

- a) Encuentra dos números que cumplan las dos condiciones planteadas.

- b) Escribe por medio de una ecuación dichas condiciones.

- c) Las siguientes rectas representan las soluciones de las ecuaciones anteriores.



- Escribe la ecuación que corresponde a cada recta.
Ecuación de recta roja: _____ Ecuación de recta naranja: _____
- Escribe una solución común para las dos ecuaciones anteriores. Ubícala en la gráfica por medio de un punto. _____

❖ Compara tus respuestas con las de algún compañero. Reflexiona acerca de qué significa obtener una solución común para dos ecuaciones de primer grado con las mismas incógnitas.



Se le llama sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas a un conjunto de dos ecuaciones de primer grado, cada una con dos incógnitas que representan a las mismas magnitudes en ambas. Por ejemplo:

Es un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ -3x + y = -1 \end{cases}$

No es un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, debido a que las incógnitas son distintas y, por lo tanto, no representan las mismas magnitudes. $\begin{cases} a + b = 1 \\ 2y - x = 5 \end{cases}$

Es común llamar a un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas como un sistema de ecuaciones 2×2 .

3. Analicen cada situación en parejas y marquen con una \checkmark el sistema de ecuaciones que la modela.

a) El perímetro de un rectángulo mide 30 cm. La diferencia entre las longitudes del largo y del ancho del rectángulo es 11 cm. Se designará como z a la longitud del largo y w a la longitud del ancho del rectángulo.

$\begin{cases} 2z + 2w = 30 \\ z + w = 11 \end{cases}$

$\begin{cases} 2w + 2z = 30 \\ w - z = 11 \end{cases}$

$\begin{cases} 2z + 2w = 30 \\ z - w = 11 \end{cases}$

b) Un circo tiene dos tarifas para el boleto de entrada, una para adultos y otra para niños. Un grupo de tres niños y un adulto pagan \$132, mientras que otro grupo de cinco niños con cuatro adultos paga \$318. La incógnita x representará el precio del boleto de niño, en tanto que la y , el precio del boleto de adulto.

$\begin{cases} x + 3y = 132 \\ 5x + 4y = 318 \end{cases}$

$\begin{cases} 3x + y = 132 \\ 5x + 4y = 318 \end{cases}$

$\begin{cases} x + 3y = 318 \\ 5x + 4y = 132 \end{cases}$

c) En la portada de un libro de geometría están dibujadas 18 figuras, triángulos y cuadriláteros, pero ninguna de ellas tiene un lado en común. En total hay 65 lados. La incógnita t representa la cantidad de triángulos y c , la cantidad de cuadriláteros que hay en la portada.

$\begin{cases} 3t + 4c = 65 \\ t + c = 18 \end{cases}$

$\begin{cases} 3c + 4t = 65 \\ c + t = 18 \end{cases}$

$\begin{cases} c + t = 65 \\ 4c + 3t = 18 \end{cases}$

- ❖ Comparen sus respuestas y sus razonamientos con los de otra pareja. ¿Coinciden? Lleguen a acuerdos, y si lo requieren, busquen el apoyo de su profesor.

4. Continúen trabajando en parejas.

- a)** Consideren las ecuaciones que eligieron en el problema del inciso a) de la actividad anterior y completen los valores de z y w . Escriban en las últimas columnas el resultado de la ecuación al emplear los valores dados.

z	w	Ecuación:	Ecuación:
11	4		
	3		11
13			11

- ¿Qué valores de z y de w dan solución a ambas ecuaciones?

 - Expliquen qué significan los valores anteriores de las incógnitas dentro del contexto del problema. _____

 - Verifiquen si la solución del sistema de ecuaciones es solución del problema planteado.
- b)** Resuelvan las siguientes preguntas a partir del problema del inciso b) de la actividad anterior y las ecuaciones que eligieron.
- ¿El boleto para adulto puede valer \$80 o más? Expliquen. _____

 - ¿El boleto para niño puede valer \$50 o más? Expliquen. _____

 - ¿El boleto para niño puede valer \$20? Argumenten. _____

 - ¿El boleto para niño puede valer \$30? Justifiquen. _____

 - ¿Cuál es la solución del sistema de ecuaciones que modela la situación?

 - ¿Cuánto cuestan los boletos? _____
- c)** Resuelvan las siguientes preguntas a partir del problema y el sistema de ecuaciones que eligieron en el inciso c) de la actividad 3.
- Si hay 5 triángulos en la portada, ¿cuántos cuadriláteros habría?

 - ¿Los valores anteriores son solución del sistema? Expliquen su respuesta.

 - ¿Qué valores de t y c satisfacen las dos ecuaciones del sistema?

6. Resuelvan en equipo los siguientes problemas.

a) En una papelería Emilia encontró la promoción que se muestra en la figura.



- Escriban un sistema de ecuaciones lineales 2×2 que modele la situación e indiquen qué magnitud representa cada incógnita.

Incógnita _____ corresponde a: _____

Incógnita _____ corresponde a: _____

Sistema { _____

- Expliquen cómo podrían encontrar el precio de cada objeto.

- ¿Cuánto cuesta cada objeto? _____

b) Una empresa de focos obtiene una ganancia por cada foco que sale de ella y funciona de manera correcta, pero se produce una pérdida por cada uno que sale y está defectuoso, esta información se muestra en la imagen de la izquierda. Un día en el que se fabricaron 2 100 focos se obtuvo un beneficio de \$968.80 por el total de focos en buen estado y defectuosos.

- Escriban un sistema de ecuaciones lineales 2×2 que modele la situación e indiquen qué magnitud representa cada incógnita.

Incógnita _____ corresponde a: _____

Incógnita _____ corresponde a: _____

Sistema { _____

- Busquen una manera de resolver la situación.
- ¿Cuántos focos buenos se produjeron ese día? _____
- ¿Y cuántos focos defectuosos? _____
- Comprueben que el par de valores que encontraron son solución del sistema de ecuaciones 2×2 que determinaron.

- ✦ Reflexionen si es posible escribir un par de letras distintas en cada ecuación. Un par de números que sólo satisfacen una ecuación, ¿puede considerarse solución del sistema?



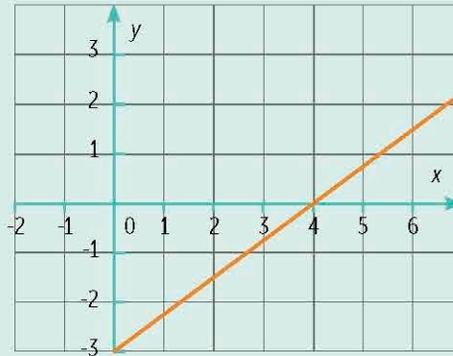
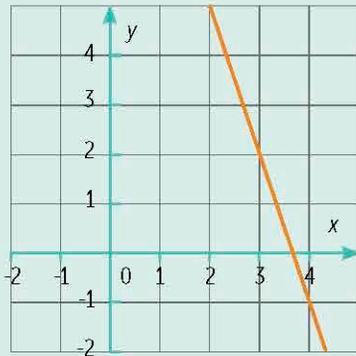
Ganancia:
60 centavos



Pérdida:
80 centavos



1. Analiza nuevamente el acertijo que se encuentra al inicio de la secuencia.
 - a) Plantea un sistema de ecuaciones lineales 2×2 que modele la situación.
 - b) ¿El número de conejos y de gallinas que estimaste que había constituyen la solución del sistema de ecuaciones anterior? Explica tu respuesta.
 - c) ¿Cuál es el número de gallinas y de conejos que hay en el corral?
2. Considera los siguientes problemas e identifica aquellos que están representados en las gráficas. Escribe en la gráfica el inciso que le corresponde.
 - a) La diferencia entre el triple de un número y el cuádruple de otro es 12.
 - b) La diferencia de dos números equivale a 4.
 - c) La suma del triple de un número con otro equivale a 11.



3. Marca con una \checkmark los sistemas para los cuales $x = -2$ y $y = -1$ es solución.

$\begin{cases} 7x - 15y = 1 \\ -x - 6y = 8 \end{cases}$

$\begin{cases} 3x + 5y = -11 \\ x + 3y = -5 \end{cases}$

$\begin{cases} -4x - 3y = 11 \\ -2x - 2y = 2 \end{cases}$

$\begin{cases} -x - y = 3 \\ 10x - 5y = -15 \end{cases}$

4. Juan guardó en su alcancía únicamente monedas de \$5 y \$10. En total tiene 73 monedas que equivalen a \$470.

- a) Plantea un sistema de ecuaciones que modele la situación.
- b) Propón un procedimiento para determinar cuántas monedas de \$5 y de \$10 tiene Juan.
- c) ¿Cuántas monedas de \$5 tiene? ¿Y de \$10?

❖ Reúnete con tus compañeros y explica cómo interpretaste cada problema y cómo lo tradujiste a dos ecuaciones lineales. Verifica si obtuvieron los mismos sistemas o si las ecuaciones que escribieron son equivalentes. Presta atención al procedimiento para resolver los sistemas de ecuaciones. Es válido, incluso, hacerlo al tanteo con la calculadora; pero entre todos prueben plantear otros métodos.

Arribamos

Explora

En la siguiente página www.edutics.mx/ULF podrás plantear sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Después trata de encontrar su solución usando tus propios procedimientos.

Conuivimos

Es importante que al trabajar en equipo mantengas una actitud positiva y de interés por buscar soluciones. Reflexiona y conversa: ¿qué tanto te involucras e incluyes a tus compañeros para resolver los problemas propuestos en clase?

Método gráfico para resolver un sistema de ecuaciones

Resuelve problemas mediante la formulación y solución gráfica de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

En la secuencia anterior aprendiste que una ecuación lineal con dos incógnitas tiene infinitas soluciones. También observaste que al tomar dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, éstas pueden tener un par de valores que al mismo tiempo son solución de las dos ecuaciones. Además de repasar lo anterior, en esta secuencia analizarás los casos en que un sistema de dos ecuaciones lineales tiene infinitas de soluciones o carece de una.

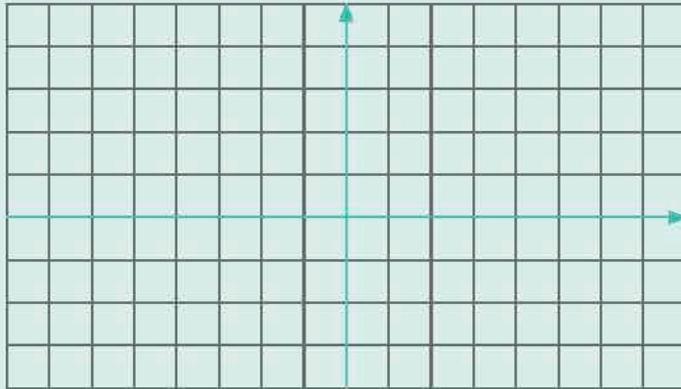
Partimos

1. Resuelve el siguiente problema.

Los lados de un triángulo están delimitados por tres rectas representadas por las siguientes ecuaciones.

$$A: -x + 2y = 1 \quad B: 2x - y = 4 \quad C: x + y = -1$$

- a) Para verificar que se forma un triángulo, grafica cada ecuación.



- b) Marca con un punto la intersección de cada par de rectas. ¿Se forma un triángulo?
- c) ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices de la figura?
- d) Escribe dos soluciones para cada ecuación.
- e) Explica cómo puedes encontrar dos soluciones para cada ecuación con sólo analizar la gráfica.

❖ Compara tus respuestas con las de algún compañero. ¿Qué procedimientos utilizaron para construir la gráfica de cada ecuación? ¿Cuál les parece más eficiente?

Recorremos

Ecuaciones lineales con dos incógnitas

1. Analiza el siguiente acertijo y contesta.

Encuentra dos números de modo que el triple del primero más el segundo dé como resultado 5 y al mismo tiempo al restar el segundo número del primero el resultado sea 3.

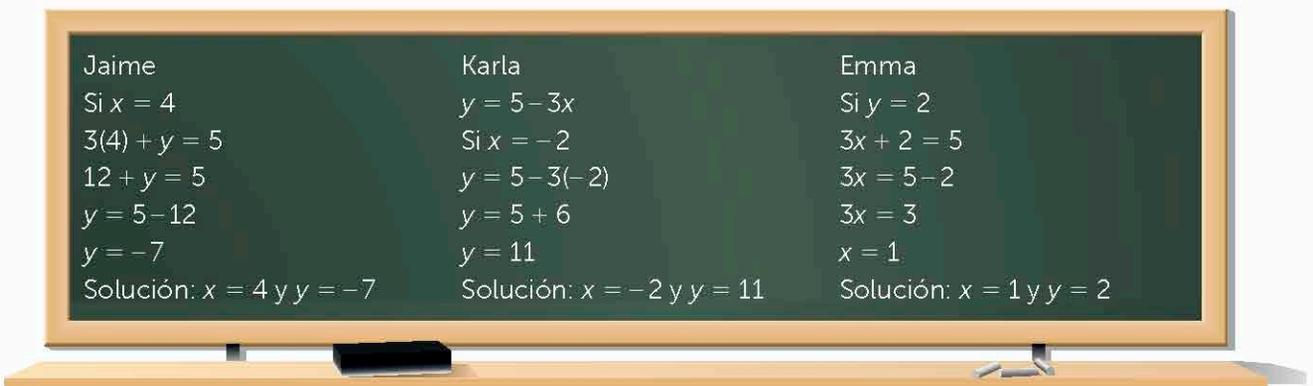
- a) Comprueba si el sistema de ecuaciones de la derecha modela la relación de los números en el acertijo. Corrige en caso necesario.
- b) Encuentra tres soluciones para cada una de las ecuaciones del sistema.

$$\begin{cases} 3x + y = 5 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

$3x + y = 5$	
x	y

$x - y = 3$	
x	y

- c) Escribe el procedimiento que utilizaste para encontrar las soluciones anteriores.
-
-
- d) Observa el procedimiento que siguieron tres alumnos para encontrar una de las soluciones de la primera ecuación.



- e) Explica cuál es la diferencia entre el procedimiento de Jaime y el de Emma.
-
-
- f) ¿Cuál es la similitud entre el procedimiento de Jaime y el de Karla?
-
- g) ¿Cómo se obtiene la ecuación $y = 5 - 3x$ a partir de $3x + y = 5$?
-
-

- ❖ Comparte tus respuestas y razonamientos con los de algún compañero. Compáren los procedimientos que utilizaron para encontrar las soluciones de las ecuaciones con los de Jaime, Karla y Emma. ¿A cuál se parecen? ¿Cómo podrían utilizar el método de la balanza que estudiaron en primer grado para reescribir $3x + y = 5$ de modo que la incógnita y quede sola del lado izquierdo de la ecuación?

Glosario



despejar. Se refiere al proceso de aislar una variable de una expresión matemática utilizando operaciones algebraicas de manera que la expresión final sea equivalente a la inicial.

Para encontrar soluciones de una ecuación lineal con dos incógnitas del tipo $ax + by = c$ es común que primero se exprese la ecuación en términos de y , es decir, se **despeja y** .

Para despejar una incógnita se emplean las propiedades de la igualdad, las cuales son las bases formales del método de la balanza que estudiaste en primer grado.

Aditiva	Se puede sumar o restar el mismo número en ambos lados de la igualdad, sin que ésta se altere.
Multiplicativa	Si se multiplican por el mismo número ambos lados de la igualdad, ésta se mantiene.

Por ejemplo, para despejar y de la ecuación $4x + 2y = 6$:

Primero se resta $4x$ en ambos lados de la ecuación. $4x - 4x + 2y = 6 - 4x$

$$2y = 6 - 4x$$

Luego ambos lados de la ecuación se multiplican por $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{2}(2y) = (6 - 4x)\frac{1}{2}$

Aquí también se aplica la propiedad distributiva de la multiplicación.

$$y = 3 - 2x$$

y =	
x	y
0	
1	
2	
-1	
-2	

2. Analicen y contesten en parejas.

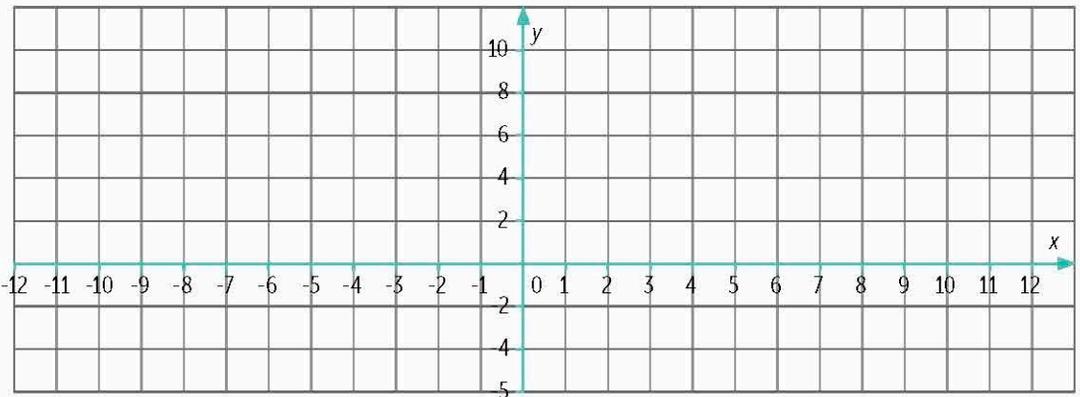
a) Consideren nuevamente el sistema de ecuaciones del acertijo.

$$\begin{cases} 3x + y = 5 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

b) Reescriban cada ecuación en términos de y y completen las tablas. En cada expresión calculen los valores de y al sustituir los valores asignados para x .

c) En el siguiente plano cartesiano grafiquen las soluciones de cada ecuación.

y =	
x	y
-4	
-2	
0	
2	
4	



d) ¿Cuáles son las coordenadas del punto en el que se **intersecan** las dos rectas?

e) ¿Cuáles son los números que resuelven el acertijo?

Glosario



intersecar. Dicho de dos líneas: cortarse o cruzarse entre sí.



f) Comprueben que la solución anterior satisface ambas ecuaciones.

g) ¿Cómo se relacionan la solución del sistema de ecuaciones y el punto de intersección de las rectas que representan el sistema?

❖ Reúnanse con otras parejas y comparen las expresiones a las que llegaron. Expliquen cómo las obtuvieron, recuerden que deben ser equivalentes con la ecuación original. Discutan por qué las coordenadas del punto de intersección de las rectas están presentes en ambas ecuaciones.



Cuando las rectas que corresponden a un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas se cortan en un punto, dicho punto es la solución del sistema; es decir, los valores de las coordenadas de x y de y satisfacen ambas ecuaciones.

Al realizar la gráfica de cada ecuación del sistema, se suele asignar a x valores positivos, negativos y el 0 para tener una visión más general de cómo es cada recta.

3. En equipos consideren el siguiente sistema de ecuaciones con dos incógnitas.

$$\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$$

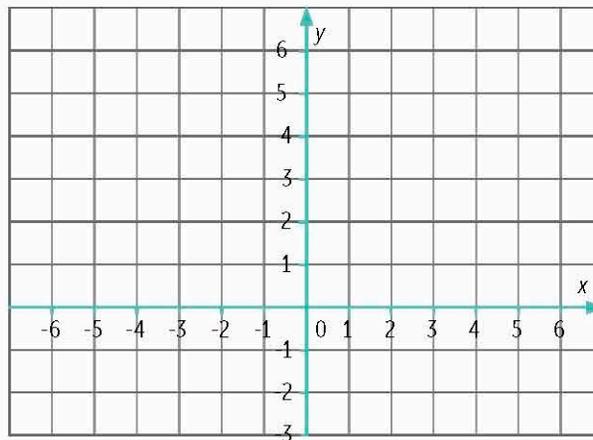
a) Escriban cada ecuación en términos de y ; asignen valores a x y completen las tablas.

b) En el plano cartesiano construyan la gráfica de cada ecuación y escriban la solución del sistema.

Solución:

$x =$ _____

$y =$ _____



$y =$	
x	y

$y =$	
x	y

c) Comprueben que la solución que encontraron satisface ambas ecuaciones.

❖ Comparen sus respuestas con las de otros equipos. Expliquen por qué las rectas que graficaron son las mismas, aun cuando los valores que asignaron en la tabla puedan ser distintos.

Soluciones de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

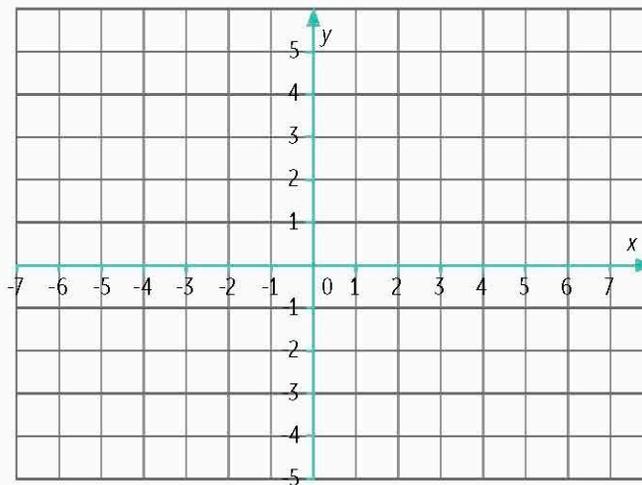
4. Continúen en equipos y realicen lo que se indica.

Para cada una de las ecuaciones del sistema, completen las tablas con los valores de x y y , y construyan la gráfica correspondiente.

a)
$$\begin{cases} x - 2y = 6 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$$

$y =$	
x	y

$y =$	
x	y



- ¿Las rectas se cortan en algún punto? Expliquen.

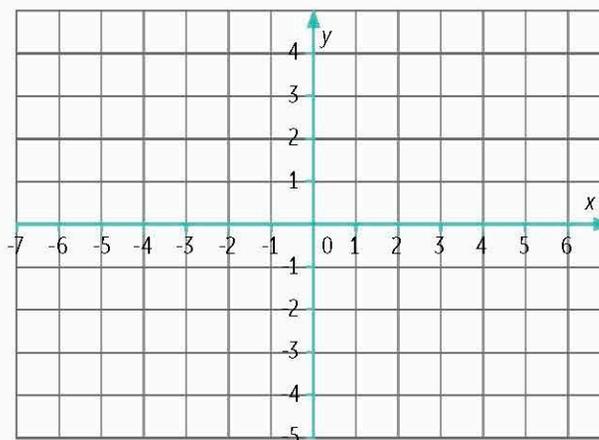
- ¿Cuál es la solución del sistema? Argumenten.

- Analicen las ecuaciones del sistema. ¿Cómo son entre sí?

b)
$$\begin{cases} 2x + 3y = -6 \\ 6x + 9y = -18 \end{cases}$$

$y =$	
x	y

$y =$	
x	y



- ¿Cuántas rectas hay en el plano? _____
- _____
- ¿Cuántas soluciones tiene el sistema de ecuaciones? Expliquen.
- _____
- _____
- Analicen las ecuaciones del sistema. ¿Cómo es una respecto de la otra? ¿Cómo se puede saber, antes de graficar las ecuaciones, si las dos ecuaciones formarán la misma recta? _____
- _____

❖ Comparen sus respuestas con las de otra pareja. Escriban cómo se puede saber, antes de graficar las ecuaciones si las rectas se cruzarán en un punto y el número de soluciones que tendrá el sistema de ecuaciones 2×2 .



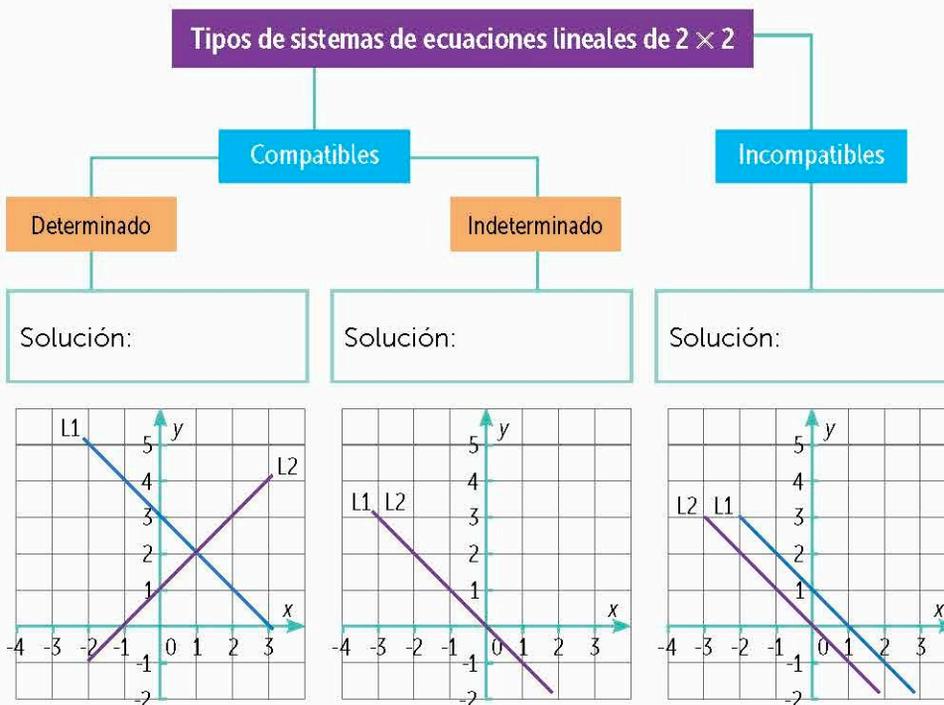
Dado un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas puede suceder que el sistema:

- tenga una única solución;
- tenga infinitud de soluciones;
- carezca de solución.



Integración

- Completa el diagrama con la clasificación de los sistemas de ecuaciones de acuerdo con sus soluciones, y con base en la información y las actividades anteriores.



Aprendemos

Reflexiona: además de los resúmenes y esquemas, ¿qué otras estrategias utilizas para organizar y recordar información?

5. En grupo resuelvan.

Analicen los siguientes sistemas de ecuaciones lineales para determinar si tienen una única solución, infinidad de ellas o carecen de éstas.

A $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 4x + 3y = 5 \end{cases}$

C $\begin{cases} x + y = 6 \\ y + x = 4 \end{cases}$

E $\begin{cases} 5x + 7y = -1 \\ 10x + 14y = -5 \end{cases}$

B $\begin{cases} 3x + 4y = -10 \\ 8y + 6x = -20 \end{cases}$

D $\begin{cases} 5x - 2y = 13 \\ 3y + x = 6 \end{cases}$

F $\begin{cases} -x + 2y = -5 \\ 6y - 3x = -15 \end{cases}$

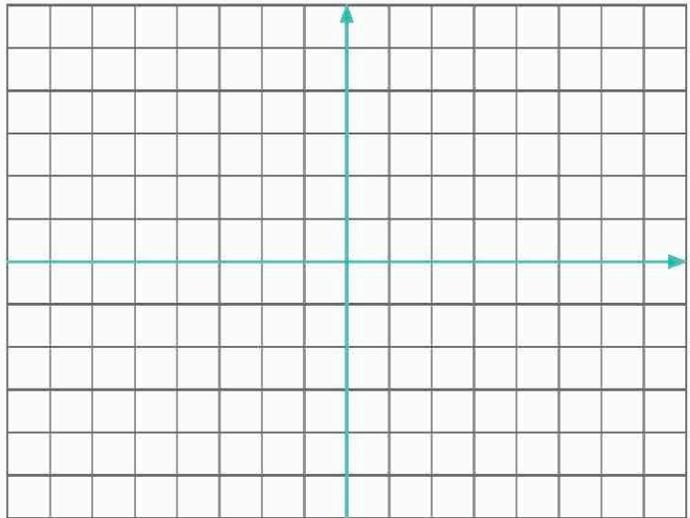
- a) ¿Cuáles sistemas son compatibles? _____
- b) ¿Y cuáles son incompatibles? _____
- c) De los sistemas compatibles, ¿cuáles tienen solución única? _____
- d) ¿Cuáles tienen infinidad de soluciones? _____
- e) Seleccionen un sistema compatible y uno incompatible: elaboren las tablas correspondientes y construyan las gráficas en los siguientes planos cartesianos. Escriban su solución.

Sistema compatible

y =	
x	y

y =	
x	y

Solución:

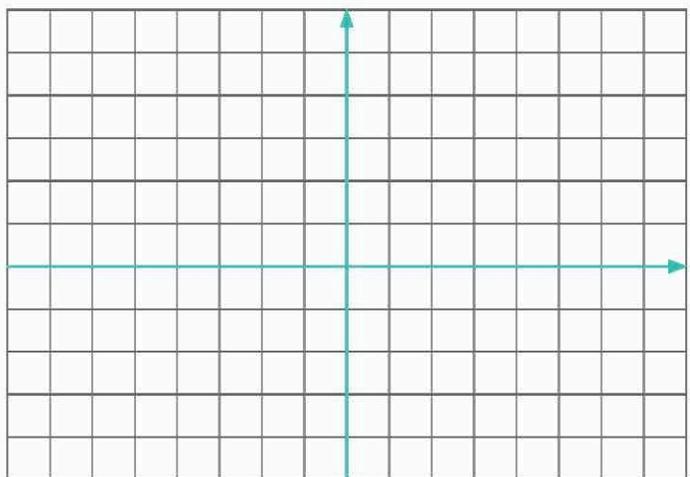


Sistema incompatible

y =	
x	y

y =	
x	y

Solución:





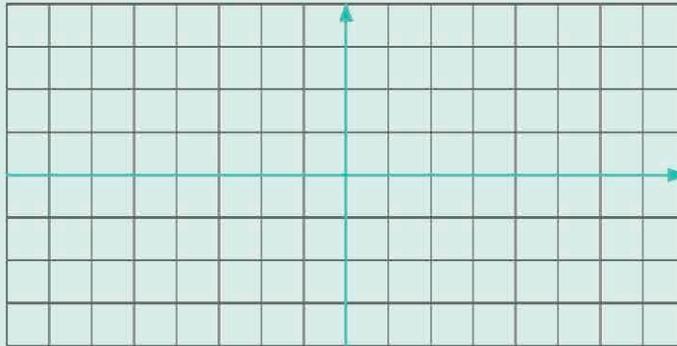
1. Analiza nuevamente el ejercicio planteado al inicio de la secuencia.
 - a) Escribe los tres sistemas de ecuaciones lineales que se forman con cada par de rectas.
 - b) Responde: ¿cuál es la solución de cada sistema?
2. Determina valores de x y y para el siguiente sistema de dos ecuaciones lineales, construye la gráfica y escribe la solución.

$$\begin{cases} 6x - 3y = 0 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

Solución:

$x =$

$y =$

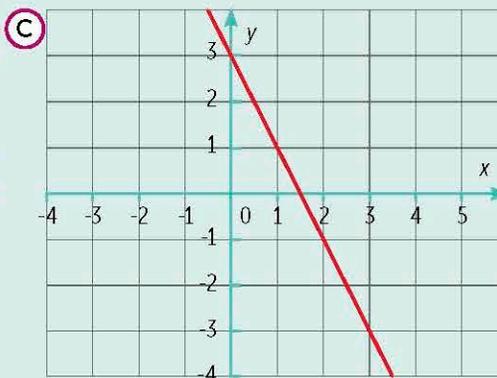
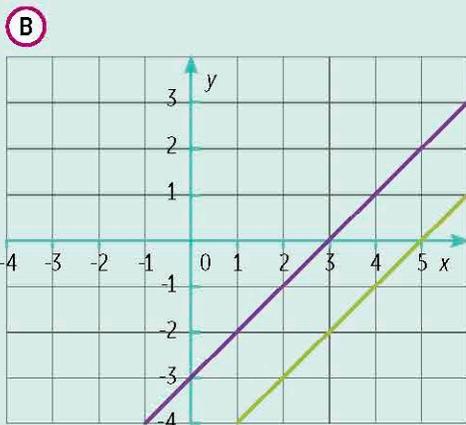
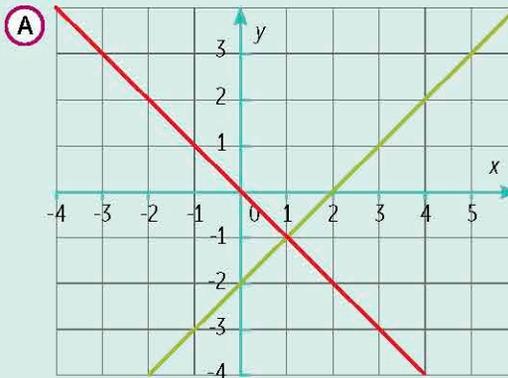


3. Asocia las gráficas con los sistemas de ecuaciones lineales correspondientes.

$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 3y + 6x = 9 \end{cases}$

$\begin{cases} x - y = 3 \\ -y + x = 5 \end{cases}$

$\begin{cases} y + x = 0 \\ x - y = 2 \end{cases}$



En la siguiente página www.edutics.mx/ULB encontrarás una aplicación que te ayudará a resolver sistemas de dos ecuaciones lineales por el método gráfico.

❖ Explica al resto del grupo cómo obtuviste tus respuestas. Corrige en caso necesario.

Métodos algebraicos para resolver un sistema de ecuaciones

Resuelve problemas mediante la formulación y solución algebraica de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, además del método gráfico, existen otros denominados algebraicos, los cuales requieren hacer transformaciones algebraicas en las ecuaciones; en esta secuencia estudiarás algunos de esos métodos. El nombre de cada uno indica qué tipo de acción se emplea para resolver el sistema.

Partimos

1. Analiza la situación y contesta.



- ¿Cuántas ovejas piensas que tiene cada persona?
- Plantea un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que modele la situación y resuélvelo.
- Comprueba si la cantidad de ovejas que pensabas que tiene cada personaje corresponde con la solución que planteaste.

✚ Compara tus respuestas y tus razonamientos con los de algún compañero. Compartan los procedimientos que utilizaron para resolver el problema y aplíquenlo en el sistema planteado. ¿Obtuvieron los mismos valores?

Recorremos

Método de igualación

1. Resuelve el siguiente acertijo.

El primer número es igual al segundo más 5 y la suma del primero más el doble del segundo es igual a 11.

- Representa con x al primer número que cumple las características anteriores y al segundo con la letra y . Escribe en la siguiente página un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que modele la situación anterior.

Sistema $\left\{ \begin{array}{l} \underline{\hspace{2cm}} \\ \underline{\hspace{2cm}} \end{array} \right.$



Recuerda

En la secuencia 25 aprendiste a despejar utilizando las propiedades aditiva y multiplicativa de la igualdad.

- b)** En cada ecuación despeja a x . Indica qué propiedades de la igualdad y qué operaciones utilizaste para realizar el despeje.

Para la primera ecuación, $x = \underline{\hspace{2cm}}$

Para la segunda ecuación, $x = \underline{\hspace{2cm}}$ por la propiedad

- c)** Subraya los despejes de x que corresponden a las ecuaciones del sistema.

$$x = 5 - y; x = 11 + 2y$$

$$x = 5 + y; x = 11 - 2y$$

$$x = 5 + x; x = 11 - 2y$$

- d)** Por la **propiedad reflexiva de la igualdad** es posible igualar ambas expresiones de x . Escribe la ecuación que se obtiene al igualar las dos expresiones anteriores.

$$\underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

- e)** Resuelve la ecuación anterior, ¿cuál es el valor de y ? $\underline{\hspace{2cm}}$

- f)** A partir del valor de y , ¿cuál es el valor de x en el sistema? Explica cómo lo obtuviste. $\underline{\hspace{2cm}}$

- g)** Comprueba si el par de valores que encontraste para x y y son solución del sistema que planteaste.

- ❖ Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Explica qué operaciones hiciste para despejar la incógnita en cada ecuación. En caso de tener dudas, recurran a su libro de primer grado. Verifiquen que el sistema que plantearon y su solución cumplen con las propiedades mencionadas en el acertijo.

- 2.** Analicen y resuelvan en parejas el siguiente sistema.

$$\left\{ \begin{array}{l} a - 3b = -7 \\ a + 5b = 9 \end{array} \right.$$

- a)** ¿Cuál incógnita consideran que es más sencillo despejar? ¿Por qué?

$\underline{\hspace{2cm}}$

- b)** De cada ecuación, despejen la incógnita que eligieron.

$\underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} \quad \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$

- c)** A partir de las igualdades anteriores, escriban la ecuación lineal con una sola incógnita que pueden construir.

$\underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$

- d)** Resuelvan la ecuación, ¿cuál es su solución?

$\underline{\hspace{2cm}}$

- e)** Encuentren el valor de a y b para el sistema de ecuaciones.

$\underline{\hspace{2cm}}$



Glosario

propiedad reflexiva de la igualdad. Todo número o expresión es igual a sí mismo, $a = a$.

Convivimos



Al trabajar en equipo es necesario llegar a acuerdos. Reflexiona y conversa: ¿cómo actúas con tus compañeros cuando tienen que resolver algún conflicto?

f) Comprueben que los valores que encontraron son solución del sistema.

- ❖ Comparen sus respuestas y razonamientos con el resto del grupo. Analicen: ¿en qué se fijaron para elegir la incógnita por despejar? ¿Todos eligieron la misma incógnita? ¿Qué operaciones y propiedades de la igualdad utilizaron en el despeje? ¿Por qué consideran que se eligió despejar x en el sistema de la actividad 1? Describan cómo resolvieron los sistemas de ecuaciones de las actividades 1 y 2, y comparen su procedimiento con la siguiente información.



Para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas es posible utilizar el **método de igualación**. Como su nombre lo indica, se busca igualar dos expresiones que estén en términos de una misma incógnita. Es común utilizarlo cuando la misma incógnita está despejada en una o ambas ecuaciones o cuando el coeficiente es 1. Por ejemplo:

Se analiza cuál de las incógnitas es más sencillo despejar de ambas ecuaciones.	$\begin{aligned} 2x + y &= 1 \\ 4x + 3y &= 5 \end{aligned}$ Despejar a y de ambas ecuaciones es más sencillo porque en la primera ecuación su coeficiente es 1.
Utilizando las propiedades de la igualdad, se despeja la misma incógnita en ambas ecuaciones. Se igualan las expresiones para obtener una ecuación lineal con una sola incógnita.	$\begin{aligned} y &= 1 - 2x \\ y &= \frac{5 - 4x}{3} \\ 1 - 2x &= \frac{5 - 4x}{3} \end{aligned}$
Se resuelve la ecuación lineal obtenida.	$\begin{aligned} 3 - 6x &= 5 - 4x \\ 3 - 6x + 4x - 3 &= 5 - 4x + 4x - 3 \\ -2x &= 2 \\ x &= -1 \end{aligned}$
Para encontrar el valor de la otra incógnita, se sustituye el valor obtenido en alguna de las ecuaciones del sistema.	$\begin{aligned} 2(-1) + y &= 1 \\ -2 + y &= 1 \\ y &= 3 \end{aligned}$
La comprobación se realiza mediante la sustitución de los valores encontrados en las ecuaciones originales.	$\begin{array}{ll} 2(-1) + 3 = 1 & 4(-1) + 3(3) = 5 \\ -2 + 3 = 1 & -4 + 9 = 5 \\ 1 = 1 & 5 = 5 \end{array}$

Método de sustitución

3. Analicen y contesten en parejas.

- a) Juan fue a la papelería en la mañana y compró, por \$15, cinco estampas para su álbum de futbolistas y dos canicas. En la tarde regresó y pagó \$8 por tres estampas y una canica.
- Expresen con e al precio de las estampas y con c al precio de las canicas. Escriban en el recuadro del lado izquierdo un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas que modele la situación anterior.

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\hspace{2cm}} = 15 \\ \underline{\hspace{2cm}} = 8 \end{array} \right.$$

- Despejen la c de la segunda ecuación del sistema.
 $c = \underline{\hspace{2cm}}$
- Como la incógnita c es la misma en ambas ecuaciones del sistema, se puede sustituir en la primera el valor de c obtenido del despeje. Completen.
 $5e + 2(\underline{\hspace{2cm}}) = 15$
- La ecuación anterior es una ecuación lineal con una incógnita. ¿Cuál es su solución? $\underline{\hspace{2cm}}$
- Para el valor anterior de e , ¿cuál es el valor de c en el sistema? Expliquen.
 $\underline{\hspace{2cm}}$

- Comprueben si los valores que encontraron para e y c son la solución del sistema que plantearon y que corresponden a los precios de las estampas y de las canicas.

b) Consideren el sistema de ecuaciones en la llave de la derecha.

- ¿Qué incógnita es más sencillo despejar y de cuál ecuación?
 $\underline{\hspace{2cm}}$
- Despejen la incógnita que eligieron. $\underline{\hspace{2cm}}$
- Construyan una ecuación lineal mediante la sustitución del valor obtenido del despeje en la otra ecuación y resuélvanla.
 $\underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$
- Respondan: ¿cuál es la solución de la ecuación anterior? $\underline{\hspace{2cm}}$
- A partir del valor de y que encontraron, ¿cuál es el valor de x en el sistema?
 $\underline{\hspace{2cm}}$
- Comprueben que los valores de x y y son la solución del sistema.



Recuerda

En la secuencia 22 comprobaste que la propiedad distributiva de la multiplicación también es válida para las expresiones algebraicas.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ x - 4y = 13 \end{cases}$$

- ❖ Comparen sus respuestas y sus razonamientos con los de otras parejas. Reflexionen cuál es la característica en común que tienen las incógnitas que despejaron. ¿En cualquier sistema existirá una incógnita que la cumpla? Describan cómo resolvieron los sistemas y compárenlos en grupo.



Para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas es posible utilizar el **método de sustitución**. En este caso, se sustituye el valor algebraico que se obtiene al despejar una de las incógnitas de una de las ecuaciones en la otra ecuación. Con frecuencia se utiliza cuando una de las incógnitas tiene coeficiente 1 en una de las ecuaciones o ya está despejada. Por ejemplo:

Se analiza cuál de las incógnitas es más sencillo despejar y a qué ecuación pertenece.

$$\begin{aligned} 4a + b &= 6 \\ -2a + 2b &= 2 \end{aligned}$$

En este caso se despeja b de la primera ecuación porque tiene coeficiente 1.

Utilizando las propiedades de la igualdad, se despeja la incógnita elegida y se sustituye en la otra ecuación.

$$\begin{aligned} b &= 6 - 4a \\ -2a + 2(6 - 4a) &= 2 \end{aligned}$$

Se resuelve la ecuación lineal obtenida.	$-2a + 12 - 8a = 2$ $-10a = 2 - 12$ $-10a = -10$ $a = 1$						
Para encontrar el valor de la otra incógnita, se sustituye el valor obtenido en alguna de las ecuaciones del sistema.	$4(1) + b = 6$ $4 + b = 6$ $b = 2$						
La comprobación se realiza mediante la sustitución de los valores encontrados en las ecuaciones originales.	<table style="display: inline-table; vertical-align: top;"> <tr> <td>$4(1) + 2 = 6$</td> <td>$-2(1) + 2(2) = 2$</td> </tr> <tr> <td>$4 + 2 = 6$</td> <td>$-2 + 4 = 2$</td> </tr> <tr> <td>$6 = 6$</td> <td>$2 = 2$</td> </tr> </table>	$4(1) + 2 = 6$	$-2(1) + 2(2) = 2$	$4 + 2 = 6$	$-2 + 4 = 2$	$6 = 6$	$2 = 2$
$4(1) + 2 = 6$	$-2(1) + 2(2) = 2$						
$4 + 2 = 6$	$-2 + 4 = 2$						
$6 = 6$	$2 = 2$						



4. Resuelve el siguiente problema.

Juan Carlos tiene 33 monedas. ¿Cuántas son de \$5 y cuántas son de \$2?

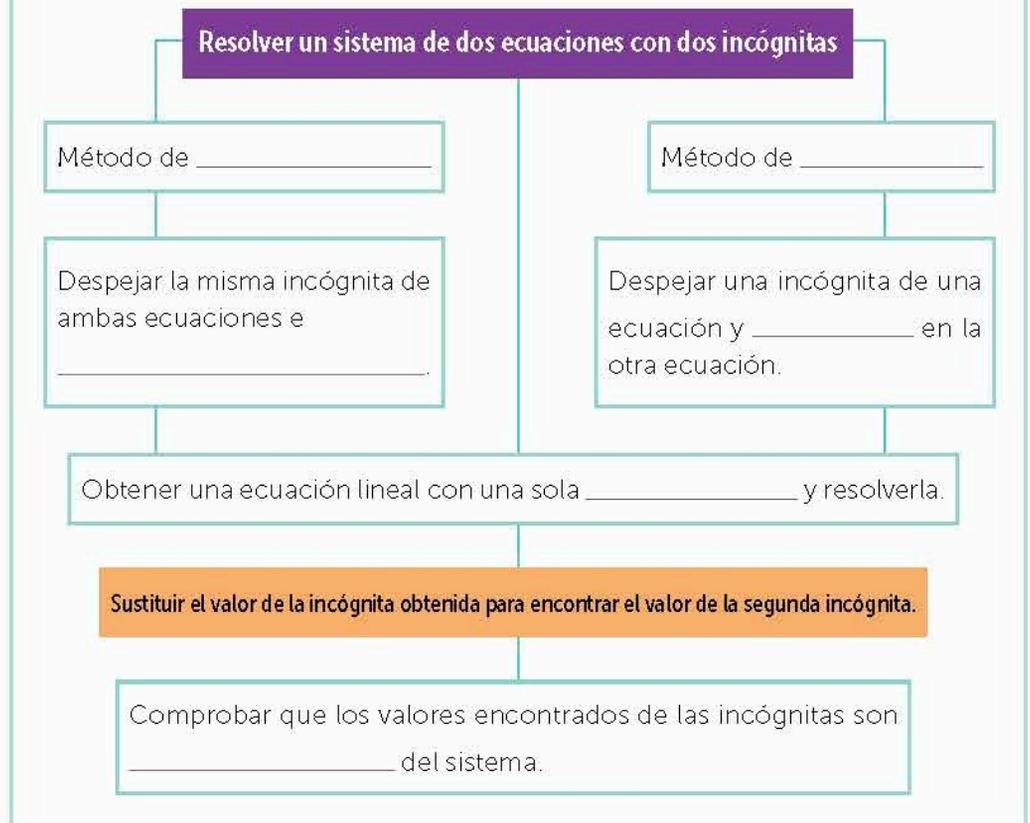
- a) Plantea un sistema de ecuaciones con dos incógnitas que modele la situación.
- b) Da la solución del sistema empleando el método de sustitución.

c) Responde: ¿cuántas monedas de cada denominación tiene Juan Carlos?



Integración

- Completa el diagrama con las siguientes palabras: sustitución, incógnita, igualación, solución, sustituirla e igualar.



Método de suma y resta

5. Analicen y contesten en equipos.

a) Consideren los siguientes pares de ecuaciones lineales con una incógnita.

$$\begin{array}{l} 2x = 3x + 6 \\ 4x = 6x + 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} w - 2 = 3w \\ 3w - 6 = 9w \end{array}$$

- Cada par de ecuaciones en los recuadros son equivalentes entre sí, explica cómo se puede obtener la segunda a partir de la primera.

b) Sumen los dos valores ubicados a la izquierda del signo igual (=) y, luego, los de la derecha del signo igual. Observen el ejemplo.

$$\begin{array}{r} 3 + 2 = 5 \\ + \quad -11 - 5 = -16 \\ \hline -8 - 3 = -11 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6w + 9z = 2 \\ + \quad 2w - 3z = 4 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4a + 5b = -3 \\ + \quad 6a - 5b = 13 \\ \hline \end{array}$$

c) ¿En cuál de los pares de ecuaciones al sumar se eliminó una incógnita?

d) ¿Qué características tienen los coeficientes de la incógnita que se eliminó?

- ❖ Discutan con el resto del grupo cómo las propiedades anteriores pueden funcionar para resolver un sistema de ecuaciones con dos incógnitas. Reflexionen: supongan que $x = y$ y $p = q$, ¿a qué es igual $x + p$?

6. Resuelvan en parejas el siguiente problema.

Dos veces la edad de Xavier más cinco veces la edad de Yolanda suman 107; además, tres veces la edad de Yolanda menos dos veces la edad de Xavier da 13.

¿Cuántos años tiene cada uno? _____

a) Escriban el sistema de ecuaciones que modela el problema. Cuiden que cada incógnita aparezca en el mismo orden en cada ecuación. Sumen entre sí los valores de x y, luego, los de y de ambas igualdades.

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\hspace{2cm}} \\ \underline{\hspace{2cm}} \end{array} \right. \quad \begin{array}{r} \underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}} = 107 \\ + \quad \underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}} = 13 \\ \hline \underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} \end{array}$$

b) ¿Qué ecuación obtuvieron y de qué tipo es? _____

c) ¿Cuál es la solución de la ecuación anterior? _____

d) A partir del valor anterior, encuentren la solución del sistema de ecuaciones.

¿Cuál es el valor de cada incógnita? _____

e) Verifiquen que los valores encontrados son solución del sistema y corresponden con las edades en el problema.

$$\left. \begin{array}{l} 4m + n = 1 \\ 5m + 2n = -1 \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{r} + \quad \underline{\hspace{2cm}} \\ 5m + 2n = -1 \\ \hline \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} 10a - 3b = 36 \\ 2a + 5b = -4 \end{array} \right\}$$

7. Resuelvan en equipos los sistemas de ecuaciones del lado izquierdo.

- a) ¿Si suman entre sí cada lado de las ecuaciones en el primer sistema eliminan alguna de las incógnitas? Expliquen su respuesta. _____
- Si multiplican por -2 todos los términos de la primera ecuación, ¿qué ecuación equivalente obtienen? _____
 - Coloquen la ecuación equivalente que obtuvieron y sumen entre sí cada lado de las ecuaciones.
 - ¿Cuál es la solución de la ecuación que obtuvieron en el inciso anterior? _____
 - ¿Cuál es la solución del sistema? _____
- b) Escriban una ecuación equivalente a la segunda que les permita eliminar a la incógnita a cuando sumen entre sí ambos lados de las ecuaciones.
- _____
- ¿Cuál es la ecuación lineal que obtienen al eliminar a ? _____
 - ¿Cuál es la solución de la ecuación anterior? _____
 - ¿Cuál es la solución del sistema de ecuaciones? _____

❖ Comparen sus respuestas y razonamientos con el resto del grupo y analicen cómo pueden determinar cuál de las incógnitas eliminar. ¿Es posible encontrar en todos los casos ecuaciones equivalentes a las originales en las que los coeficientes de las incógnitas que quieren eliminar sean iguales y de signo contrario?

Explora



En las páginas www.edutics.mx/Urh y www.edutics.mx/Ur7 podrás observar la resolución de algunos problemas con sistemas de dos ecuaciones lineales.

Para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas se puede utilizar el **método de suma y resta** o **de eliminación**. Como su nombre lo indica, se busca eliminar una incógnita mediante la búsqueda de ecuaciones equivalentes apropiadas y la suma de ellas. Por ejemplo:

Se analiza cuál de las incógnitas se quiere eliminar.	$\begin{array}{l} 9x + 11y = -14 \\ 6x - 5y = -34 \end{array}$ <p>Se va a eliminar la incógnita y porque los coeficientes tienen signos opuestos.</p>
Se multiplica una o ambas ecuaciones de manera que los coeficientes de esta incógnita sean iguales y de signos opuestos.	<p>Se multiplica por 5 la primera ecuación:</p> $45x + 55y = -70$ <p>Se multiplica por 11 la segunda ecuación:</p> $66x - 55y = -374$
Se suman entre sí ambos lados de las ecuaciones equivalentes encontradas y se resuelve la ecuación lineal obtenida.	$\begin{array}{r} 45x + 55y = -70 \\ 66x - 55y = -374 \\ \hline 111x = -444 \\ x = -4 \end{array}$
Para encontrar el valor de la otra incógnita, se sustituye el valor obtenido en alguna de las ecuaciones del sistema.	$\begin{array}{l} 6(-4) - 5y = -34 \\ -24 - 5y = -34 \\ -5y = -10 \\ y = 2 \end{array}$

La comprobación se da al sustituir los valores encontrados en las ecuaciones originales.

$$\begin{aligned} 9(-4) + 11(2) &= -14 \longrightarrow -14 = -14 \\ 6(-4) - 5(2) &= -34 \longrightarrow -34 = -34 \end{aligned}$$

8. Resuelvan y argumenten en equipo sus procedimientos.

a) Planteen un sistema de ecuaciones lineales que modele la oferta del letrero y resuévanla por el método de eliminación.



• ¿Cuál es el costo de un pantalón y de una playera? _____

b) Analicen cada sistema y escriban debajo el método que utilizarían para resolverlo. Justifiquen su elección y resuévanlo.

$$\begin{cases} 5x + 6y = 20 \\ 4x - 3y = -23 \end{cases}$$

$$x = \underline{\quad} \text{ y } y = \underline{\quad}$$

$$\begin{cases} 2w - z = 3 \\ z = 7 - 3w \end{cases}$$

$$w = \underline{\quad} \text{ y } z = \underline{\quad}$$

$$\begin{cases} a + 3b = 9 \\ a - 2b = -1 \end{cases}$$

$$a = \underline{\quad} \text{ y } b = \underline{\quad}$$

OFERTA

2 pantalones y 4 playeras
por \$1 540




3 pantalones y 2 playeras
por \$1 740



1. Analiza nuevamente la situación planteada al inicio de la secuencia.

- a) Resuelve el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas por el método que prefieras. ¿Cuál es la solución del sistema?
- b) ¿Cuántas ovejas tiene cada uno?

2. Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

- a) Diseña un problema que se pueda resolver con él.
- b) Resuelve el sistema por el método de eliminación.
- c) Escribe la solución del sistema.
- d) Escribe la solución del problema.

$$\begin{cases} x + 2y = 28 \\ 3x + 5y = 76 \end{cases}$$

3. Para cada problema, plantea un sistema de ecuaciones con dos incógnitas. Cada uno resuévelo por alguno de los métodos estudiados.

- a) La maestra de dibujo compró un total de 84 artículos entre gomas y sacapuntas. Los sacapuntas costaron \$4.50 y las gomas, \$3.50. Si gastó \$331.00, ¿cuántos sacapuntas y cuántas gomas compró?
- b) La edad de Carlos excede en 13 años a la edad de Paula. Si el doble de la edad de Paula es 29 años mayor que la edad de Carlos, ¿cuántos años tiene cada uno?
- c) La suma de dos números es 190. Si una novena parte de su diferencia es 2, ¿qué números son?

✦ Explica al resto del grupo cómo interpretaste cada problema para establecer los sistemas de ecuaciones y el método que empleaste para resolverlo.



Arribamos



Explora

En la página www.edutics.mx/Ur8 resuelve los problemas utilizando sistemas de dos ecuaciones lineales.

Calcula el volumen de prismas y cilindros rectos. Desarrollos plano de prismas y cilindros.

Partimos

1. Analiza la situación y contesta.

A Emilio le gusta el arte y como pasatiempo crea cosas para venderlas en internet. Esta vez quiere hacer un empaque de cartón para sándwiches como los que se observan en la imagen.

- ¿A qué cuerpo geométrico corresponde la forma del empaque?
- ¿Cuántas caras tiene el empaque?
- ¿Cuál es la forma de las bases?
- ¿Cuál es la figura geométrica de las caras laterales?



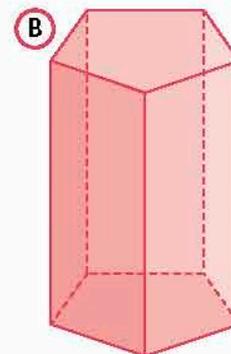
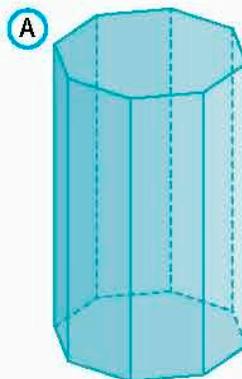
Comenta con el resto del grupo de qué manera es posible identificar la base del cuerpo geométrico y sus caras laterales.

Recorremos

Bases y caras laterales

1. Observen en parejas los siguientes cuerpos geométricos y contesten.

- ¿Cuántas caras tiene cada prisma? _____





Glosario

base. Superficie sobre la que se sostiene un cuerpo geométrico.



cara lateral. Es la superficie plana perpendicular a la base que forma un cuerpo geométrico.



- Describan qué figura geométrica tienen las **bases** y las **caras laterales**.

Prisma A: _____

Prisma B: _____

- ¿Qué relación hay entre el número de lados de la figura de la base y el número de caras laterales? _____

- ¿Qué relación hay entre el perímetro de la base del prisma y sus caras laterales? _____

b) ¿Cuántas caras tiene el siguiente cuerpo geométrico? _____



- ¿Qué forma tienen las bases del cilindro? _____
- ¿Cuántas caras laterales tiene y cuál es su forma? _____

❖ Analicen con otras parejas: ¿qué regularidad encuentran en las caras laterales de los prismas? ¿Qué relación hay entre el número total de caras y el número de lados de la base?



Los prismas rectos reciben su nombre de acuerdo con la forma de sus bases paralelas, por lo que es importante identificarlas. Por ejemplo, un prisma con bases en forma de pentágono es un prisma pentagonal. Un cuerpo geométrico cuyas bases tienen forma de círculo, recibe el nombre de cilindro.

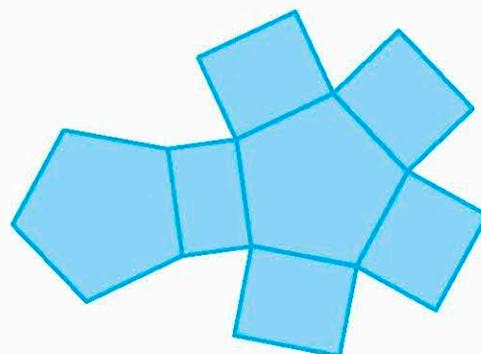
En el caso de los prismas, el número total de caras corresponde al número de lados de la base más dos.

Desarrollos planos

2. Resuelvan en equipos lo siguiente.

a) Regina desdobló la caja de dulces que le regalaron y obtuvo el desarrollo plano que se muestra.

- ¿Qué forma tendrá al reconstruir la caja nuevamente?



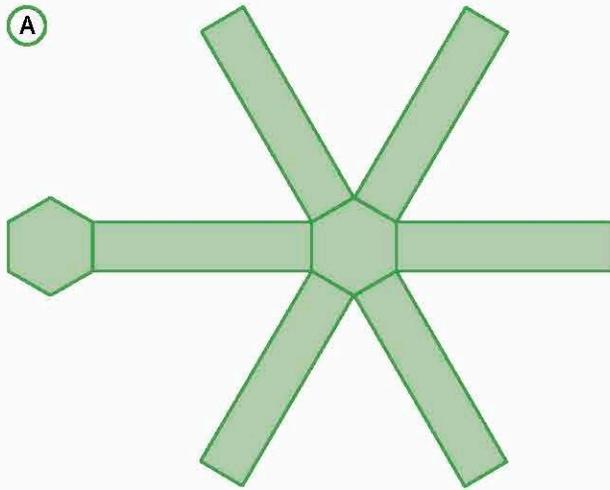
- ¿Qué forma tienen las caras laterales? _____
- ¿Cuántas caras son? _____
- ¿Cuántas bases son y qué forma tienen? _____



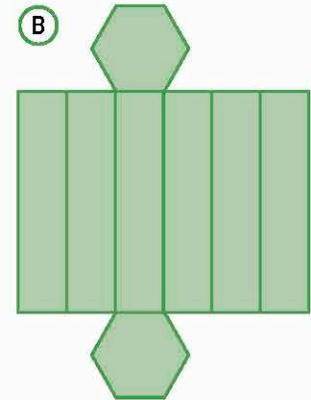
El desarrollo plano de un cuerpo geométrico es el acomodo ordenado de las figuras geométricas de todas las caras que lo forman, de modo que al doblarse se pueda construir.

b) Observen los siguientes desarrollos planos y contesten.

A



B

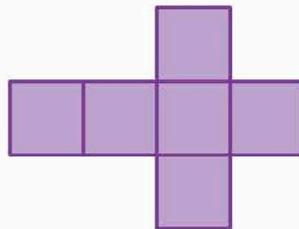


- ¿Qué cuerpos geométricos forman con los desarrollos planos?

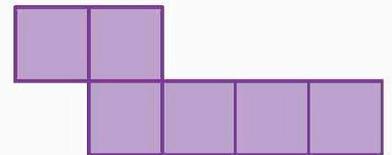
- ¿Es posible armar el cuerpo con cualquiera de los desarrollos planos?
Expliquen su respuesta. _____

c) Observen los siguientes desarrollos planos.

A

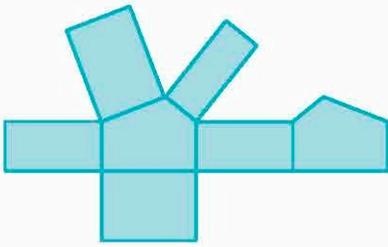


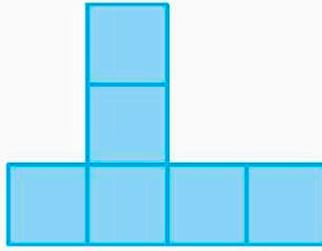
B

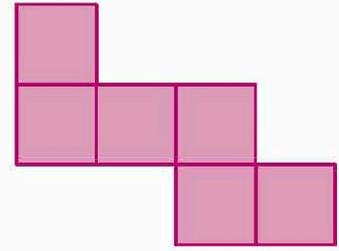


- ¿Cuántas caras tiene el cuerpo geométrico que se podría formar a partir de ellos? _____
- ¿Con cualquiera de los desarrollos planos es posible armar un cubo?
Expliquen su respuesta. _____

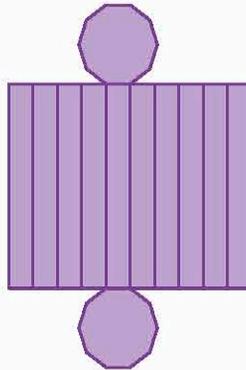
d) Encierren en un círculo los desarrollos planos con los que es posible armar un cuerpo geométrico. Escriban el nombre de las figuras en el recuadro.

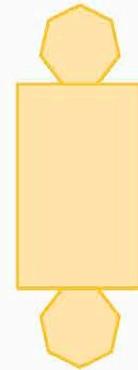












❖ Discutan cómo determinaron qué desarrollos planos es posible armar. Si aún tienen diferencias de opinión, construyan los desarrollos planos en papel y armen los cuerpos geométricos. Discutan: ¿cuántos desarrollos planos hay para un mismo cuerpo geométrico?



Integración

• Analiza el cuerpo geométrico de la derecha. Luego resuelve.

a) ¿Qué forma tienen las bases y las caras laterales?

b) ¿Qué cuerpo geométrico es? _____

c) Utiliza tu juego geométrico y construye con papel reciclado o con una cartulina el desarrollo plano del cuerpo.

d) Compara con el resto del grupo las similitudes de sus desarrollos y verifica que se pueda formar el cuerpo geométrico de la figura.



Explora

Resuelve en la siguiente página www.edutics.mx/Ua5 los ejercicios de desarrollos planos de prismas.

Áreas y desarrollos planos

3. Analiza y resuelve.

- a) Marco va a forrar cuatro cajas, como la que se muestra en la figura, con hojas de papel fantasía de 50 cm^2 . Para ello, debe calcular la cantidad de hojas de papel que necesitará. La apotema de la base de la caja mide 1.038 cm .

- ¿Cuál es el área de una de las bases? Explica cómo la calculaste.

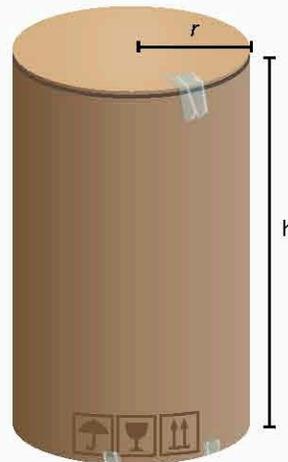
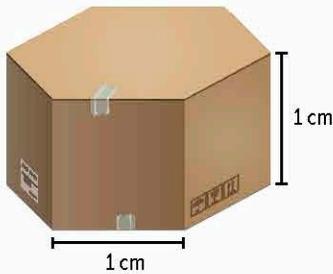
- ¿Cuál es el área de una de las caras laterales?

- ¿Cuál es el área total de las caras laterales?

- ¿Cuál es el área total del desarrollo plano del cuerpo geométrico? Explica tu respuesta. _____

- ¿Cuántas láminas se necesitan para forrar cuatro cajas? _____

- b) Marco también forrará una caja cilíndrica.



- Escribe una expresión algebraica que permita obtener el área de las bases y otra para el área lateral del cilindro.

$$A_{\text{bases}} = \underline{\hspace{2cm}} \qquad A_{\text{lateral}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

- ¿Qué expresión algebraica te permite obtener el área del desarrollo plano del cilindro? _____

- Si el radio de la base de la caja mide 1 cm y la altura, 4 cm , ¿cuál es el área del desarrollo plano de la caja? Argumenta tu respuesta. _____

- ❖ Discute con el resto del grupo: ¿cómo calcularon las dimensiones de las caras, en particular para el cilindro? ¿Qué datos necesitaban conocer de cada caja?



El área total de un cilindro o de un prisma con base poligonal regular corresponde al área de su desarrollo plano; equivale a sumar el área de las bases más el área de las caras laterales.



Integración

- Escribe una fórmula para calcular el área total de los siguientes cuerpos, con base en la información anterior.

a) Un cilindro cuyo radio y altura son r y h , respectivamente.

$$A_{\text{total}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

b) Un cubo cuya arista es l .

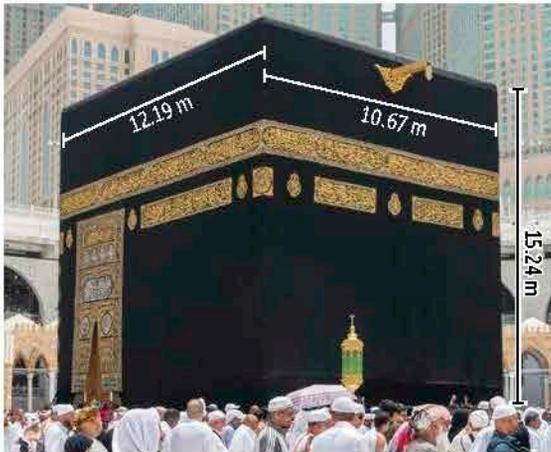
$$A_{\text{total}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

c) Un prisma con n lados; longitud de apotema a , longitud de lado l y altura h .

$$A_{\text{total}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

4. Lean y resuelvan en equipos.

- a) La Kaaba ("dado" en árabe) es una construcción que se encuentra en la mezquita Masjid al-Haram en la Meca, lugar de peregrinación más importante del islam. La imagen muestra las dimensiones de dicha construcción.



- ¿Qué forma tiene la Kaaba?

- ¿Cuáles son las formas de sus caras?

- Dibujen el desarrollo plano de la Kaaba.

- Representen con literales las dimensiones de la Kaaba y escriban una expresión algebraica que les permita calcular el área del desarrollo plano.



Explora

Resuelve los ejercicios de la página www.edutics.mx/Uaq relacionados con áreas y desarrollos planos de prismas.

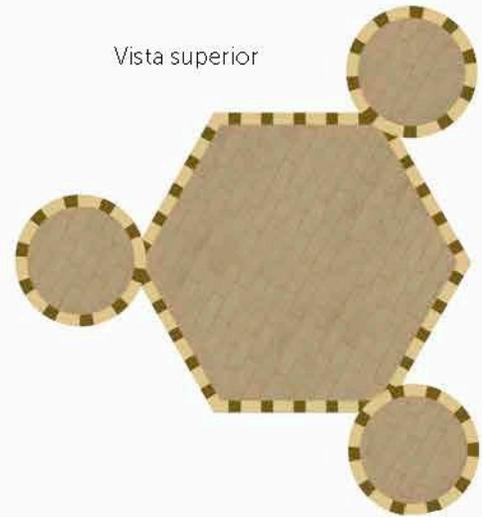
- Calculen el área de todas las caras de la construcción.

$A_{bases} =$ _____

$A_{lateral} =$ _____

$A_{total} =$ _____

- b) La siguiente imagen muestra la Torre Broadway, ubicada en el condado de Worcestershire, Inglaterra.



- ¿Qué forma tienen las bases de esta torre? _____
- ¿Cuántas bases tiene en total? _____
- ¿Cuántas caras laterales tiene en total? _____
- Utilicen su juego de geometría y elaboren el desarrollo plano de la torre. Supongan que los cuerpos geométricos son rectos y sin relieve.
- Representen con r al radio de los círculos, con H a la altura mayor, con l el lado del hexágono, con a su apotema y con h a la altura menor. Escriban una expresión algebraica que les permita calcular el área lateral de la torre sin tomar en cuenta las **almenas**.

$A_{bases\ circulares} =$ _____

$A_{lateral\ torres\ cilíndricas} =$ _____

$A_{total\ torres\ cilíndricas} =$ _____

$A_{bases\ hexagonales} =$ _____

$A_{lateral\ torre\ hexagonal} =$ _____

$A_{total\ torres\ hexagonales} =$ _____

$A_{total\ Torre\ Broadway} =$ _____

Glosario



almena. Bloque de piedra que remata en la parte superior de una torre o muralla que servía como bloque defensivo.

Hacemos

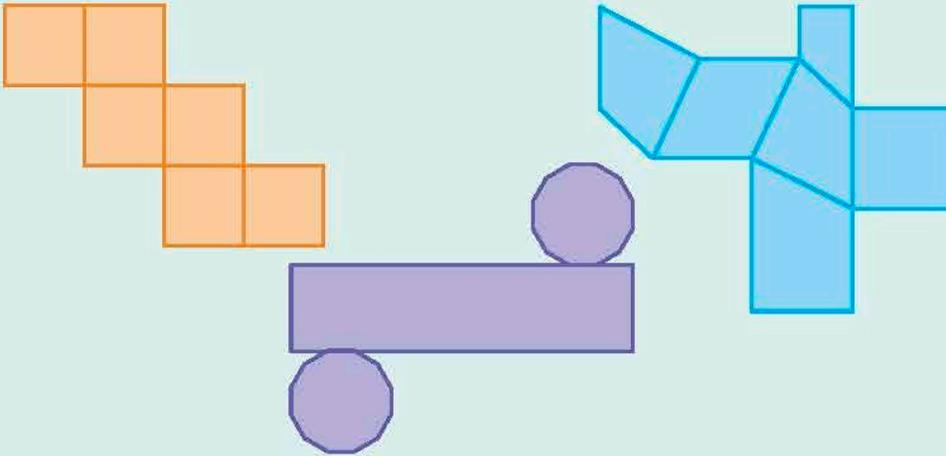


Busquen en su entorno construcciones con forma de prismas o cilindros, ¿cómo pueden construir su desarrollo plano a escala?

- ❖ Comenten con el grupo: ¿qué deben observar para hacer un desarrollo plano? ¿De qué manera es más fácil encontrar el área total del desarrollo plano del cuerpo geométrico? ¿Todas las construcciones geométricas tienen un desarrollo plano?

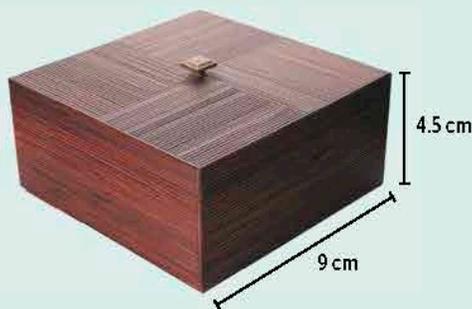


- Retoma la situación planteada al inicio de la secuencia y resuelve.
 - Elabora el desarrollo plano del empaque de los sándwiches.
 - ¿Cuántos centímetros cuadrados de cartón necesita Emilio para construir un empaque? No consideres en tu cálculo las pestañas. Explica tu respuesta.
- Observa los siguientes desarrollos planos y encierra los que no sea posible armar.



- Resuelve el siguiente problema.

Juan Pablo quiere construir una caja de madera cuyas bases sean cuadradas y del doble de tamaño de la que se muestra en la figura.



- ¿Qué cuerpo geométrico quiere construir Juan Pablo?
- ¿Qué medida tendrá cada una de las caras?
- ¿Qué expresión algebraica puedes usar para calcular el área total de la caja?
- ¿Cuántos centímetros cuadrados de madera son necesarios para construir la caja original y con el doble de medidas? Explica tu respuesta.

✦ Reflexiona y comenta con el grupo cómo pueden saber si un cuerpo geométrico se puede construir cuando no se cuenta con un desarrollo plano que sirva para manipularlo. ¿Qué estrategias usarían?



Calcula el volumen de prismas rectos.

Partimos

1. Analiza la situación y contesta.

Paula compró una pecera hexagonal, como la que se muestra en la figura.



- ¿Qué dimensiones necesita conocer Paula para calcular el volumen de la pecera?
- Si a la pecera le caben cinco galones de agua, ¿cuántos litros le caben aproximadamente?
- ¿Cuál sería el volumen de la pecera en centímetros cúbicos?

❖ Discutan en equipo: ¿cómo obtuvieron la capacidad, en litros, de la pecera y su volumen? ¿Cómo podrían calcular el volumen de un prisma recto de base hexagonal?

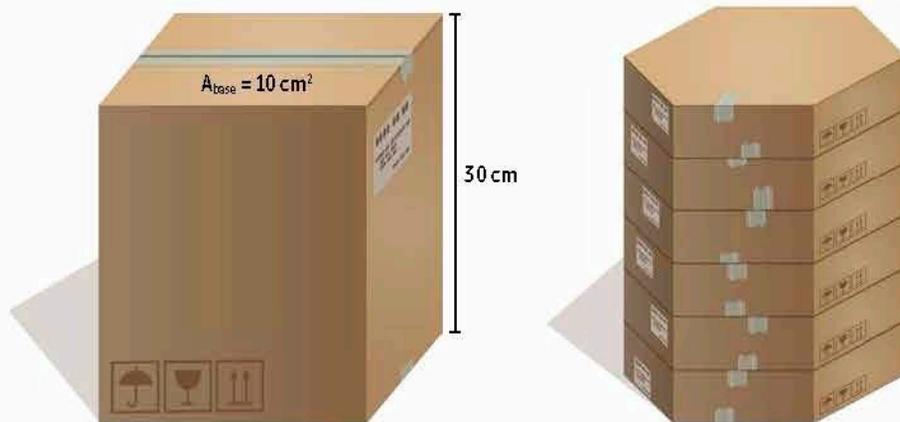
Recorremos

Fórmula del volumen de prismas poligonales

1. Resuelvan en parejas el siguiente problema.

Para utilizar un servicio de paquetería, Alicia necesita calcular el volumen de las cajas que enviará; todas ellas tienen forma de prisma rectangular y seis de prisma hexagonal, como se muestra en las figuras de la siguiente página. El área de la base de cada una de las cajas hexagonales es 15.3 cm^2 y su altura mide 5 cm .

- Expliquen cómo encontrarían el volumen de cada caja.



b) ¿Cuál es el volumen, en centímetros cúbicos, de cada caja?

Caja rectangular: _____

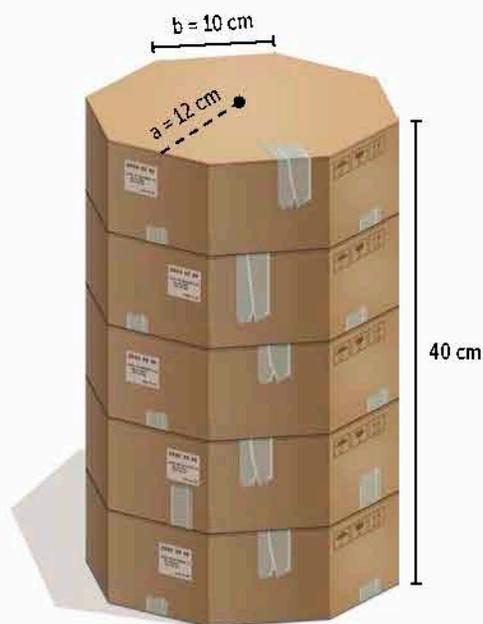
Caja hexagonal (individual): _____

Caja hexagonal (torre): _____

❖ Comenten con otra pareja las estrategias que utilizaron para calcular el volumen de cada caja. ¿De qué les sirvieron los datos del área de la base y la altura en cada caso?

2. Continúen en parejas y resuelvan.

Antonio enviará por paquetería una torre con cajas, cuya base es un octágono regular, con las medidas que se muestran en la siguiente figura.



a) ¿Cómo puede calcular el volumen de la torre de cajas?

b) ¿Cuál es el volumen de la torre? _____

- c) ¿Cuál es el volumen de una caja? _____
- d) Expliquen cómo encontrarían la altura de una caja. _____

❖ Reúnanse con otra pareja y expliquen cómo obtuvieron el volumen del prisma octagonal que representa la torre de cajas. Intenten escribir una fórmula para calcular el volumen tanto de un prisma hexagonal como de uno octagonal.

3. Formen equipos y hagan lo que se indica.

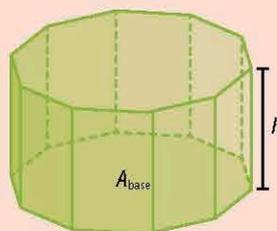
- a) Discutan cómo podrían calcular el volumen de un prisma recto cuya base esté formada por cualquier polígono regular; por ejemplo, de 12 lados.
- b) Escriban la fórmula y argumenten cómo llegaron a ella.

❖ Compartan su fórmula con el resto del grupo. Comprueben con la siguiente información.



El volumen de cualquier prisma recto, cuya base es un polígono regular, se calcula al multiplicar el área de su base por la altura del prisma.

$$V = A_{\text{base}} \times h$$

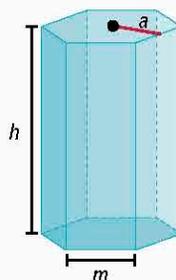


Donde $A_{\text{base}} = \frac{P \times a}{2}$, dependerá de cada polígono y h es la longitud de la altura del prisma.



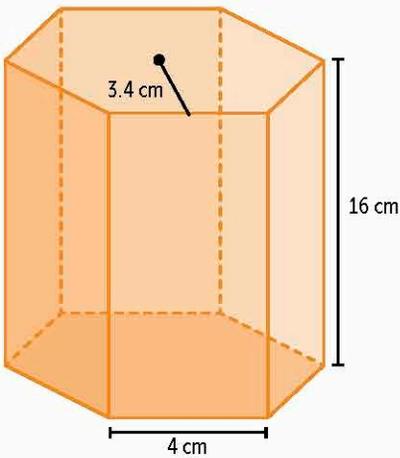
Integración

- Escribe la fórmula particular para calcular el volumen de un prisma con base hexágono regular como el de la figura, con base en la información anterior.

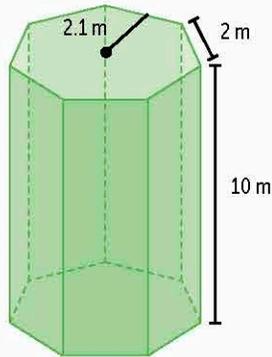


Volumen =

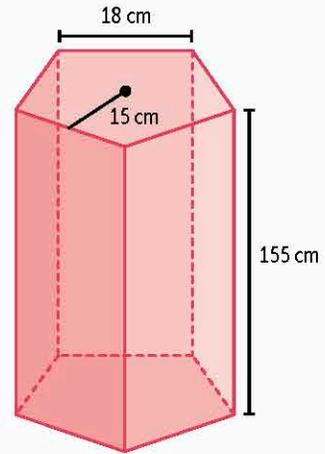
4. Calculen en equipos el volumen de los siguientes prismas (no están hechos en la misma escala). Recuerden indicar las unidades.



Volumen = _____



Volumen = _____



Volumen = _____

❖ Comparen sus respuestas y procedimientos con los de otro equipo. ¿Las diferencias que encontraron son errores de razonamiento al determinar el volumen o son errores de cálculo?

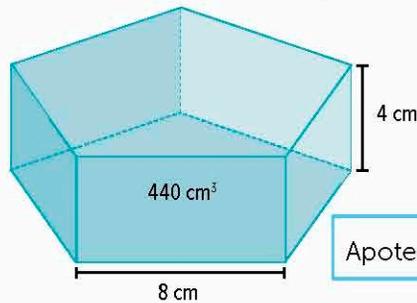
Problemas de volumen

5. Analicen en parejas los prismas y contesten.

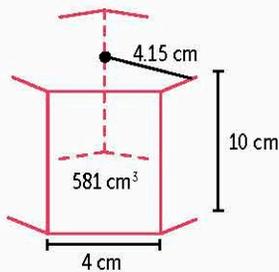
A partir del volumen de cada prisma, señalado en el interior de cada prisma, encuentren la dimensión que se pide.



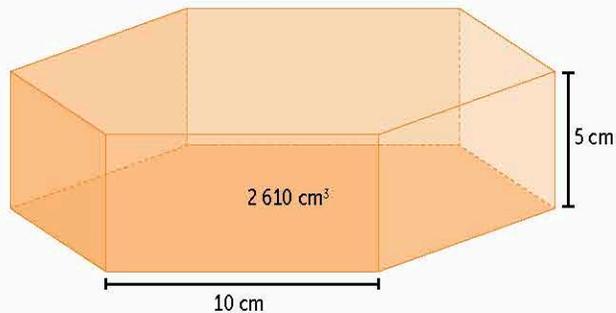
Altura = _____



Apotema = _____



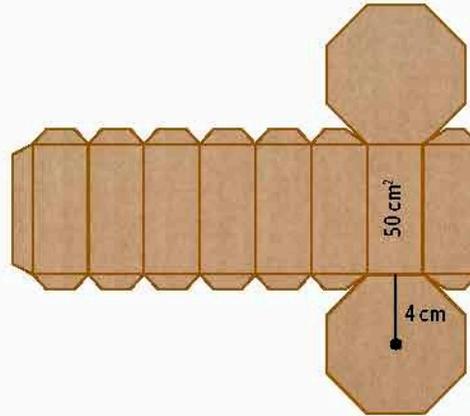
Número de lados = _____



Área de la base = _____

6. Continúen en parejas, para resolver el siguiente problema.

Manuel encontró una caja desarmada, con forma de prisma octagonal recto, en la que el área de cada una de las caras mide 50 cm^2 y la apotema de su base mide 4 cm , como se muestra en la figura.



- a) ¿Cuál es el volumen de la caja al armarla? _____
 b) Expliquen el procedimiento que utilizaron para obtenerlo.

- ❖ Comparen sus resultados con los de otra pareja. ¿Qué procedimientos utilizaron para encontrar el dato que se pide en cada una de las situaciones de la actividad 5? ¿Plantearon ecuaciones? ¿Cómo interpretaron los datos con la finalidad de resolver el problema de la actividad 6? ¿Qué dimensiones representa el área de 50 cm^2 ? ¿Pueden saber la medida de altura de la caja?

7. Resuelvan en equipos el siguiente problema.

Óscar tiene una caja en forma de prisma recto, cuya base es un pentágono regular, con las medidas que se muestran en la tabla. Completen la información faltante para cada caja, de acuerdo a las descripciones.

Caja	Lado (cm)	Apotema (cm)	Altura (cm)	Volumen (cm^3)
A	20	13.8	12	
B				
C				

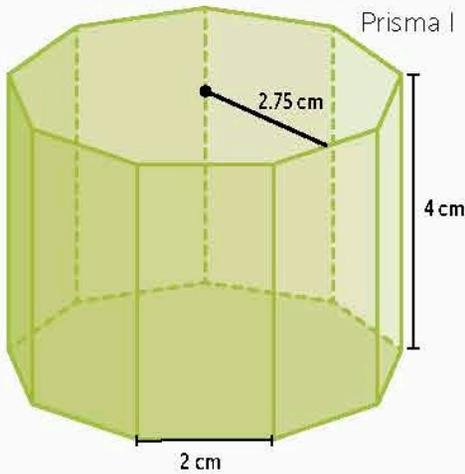
- a) ¿Cómo incrementa el volumen de la caja A si en la B la altura aumenta al doble y las demás medidas no cambian? _____
 b) Si en la caja C la altura aumenta al triple y las demás medidas no cambian, ¿cómo aumenta el volumen? _____
 c) ¿Qué tipo de variación hay entre el volumen y la altura del prisma si el área de la base permanece constante? _____

- ❖ Compartan con el resto del grupo sus argumentos sobre la variación del volumen y analicen qué sucede con una caja cuyas medidas aumentaran al doble: ¿cómo se incrementaría el volumen? ¿Y si cada medida aumenta n veces?

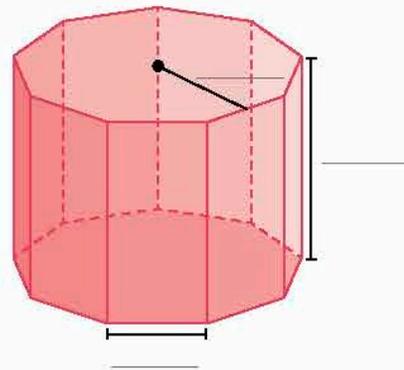


Integración

- Indica el volumen del prisma I y las longitudes y volumen del prisma II, si el factor de proporcionalidad entre las longitudes de los dos prismas es $\frac{3}{4}$.



Prisma I



Prisma II

Volumen prisma I = _____

Volumen prisma II = _____



Aprendemos

Al terminar, identifica los temas que utilizaste para resolver el problema y reflexiona: ¿cuál es la importancia de reconocer los conocimientos adquiridos?

Volumen y capacidad de prismas rectos



El volumen, como estudiaste en primer grado, es el espacio tridimensional que ocupa cualquier objeto; y la capacidad es una cualidad medible en aquellos en los que se puede introducir objetos o sustancias y se les conoce como recipientes.



Recuerda

Un decímetro cúbico equivale a un litro.

8. Analicen en parejas cada situación y contesten.

a) La base de una jarra de vidrio tiene forma de dodecágono regular con longitud de sus lados de 3 cm, la medida de su apotema de 5.6 cm y una altura de 20 cm.

- ¿Cuál es el volumen de la jarra? _____
- ¿Cuántos litros de agua le caben aproximadamente? Expliquen.

b) La base del vaso de la figura de la derecha tiene forma octagonal. Para llenarlo completamente se utilizan 390 mL de agua, aproximadamente.

- ¿Cuál es el volumen del vaso? _____
- ¿Cuántos centímetros mide su altura? _____

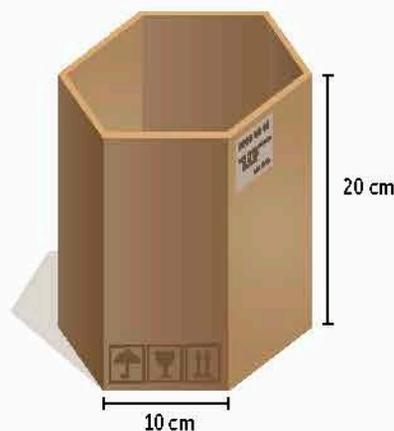


Lado de la base = 2.5 cm
Apotema de la base = 3 cm



rebalsar. Desbordar la capacidad del recipiente que contiene a un líquido.

- c) Adriana quiere llenar con agua 10 recipientes, como el que se muestra en la figura. La apotema de la base mide 8.7 cm. Para que el agua no se **rebalse**, los llenará hasta las $\frac{4}{5}$ partes de su capacidad.



- ¿Cuántos centímetros cúbicos de cada recipiente llenará con agua? _____
 - ¿Cuántos litros de agua verterá en cada recipiente? _____
 - ¿Cuántas cubetas de 19 L aproximadamente necesita para llenar los 10 recipientes? _____
- d) La base de la alberca que se muestra en la figura mide 58.8 m^2 y está a 2.5 m de profundidad. La alberca se llenará hasta $\frac{5}{6}$ de su capacidad con una manguera que arroja 50 L por minuto.



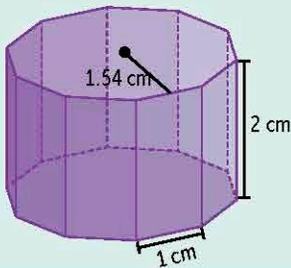
- ¿Cuál es el volumen de la alberca? _____
- ¿Cuál es la capacidad de la alberca en litros? _____
- ¿Cuántos litros de agua se quieren verter en la alberca? _____
- ¿Cuántas horas tardará aproximadamente en llenarse? _____

✦ Argumenten, en equipos y por turnos, cómo resolvieron cada problema. Mencionen con qué otros temas se relaciona y los conocimientos que tuvieron que recordar de este grado escolar y de anteriores. Es importante que identifiquen los temas en los que tienen dificultades para aclarar dudas y mejorar en ellos.

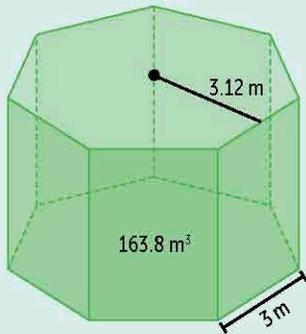


1. Considera de nuevo la situación planteada al inicio de la secuencia.
 - a) El lado de la pecera mide 12 cm y la apotema, 10.5 cm, ¿cuál es el volumen?
 - b) ¿El resultado coincide con la estimación que hiciste?
 - c) Paula colocó una piedra en la pecera y el agua llegó a una altura de 47 cm. Al quitar la piedra el agua descendió a 43 cm de altura, ¿cómo calcularías el volumen de la piedra?
 - d) ¿Cuál es el volumen de la piedra?

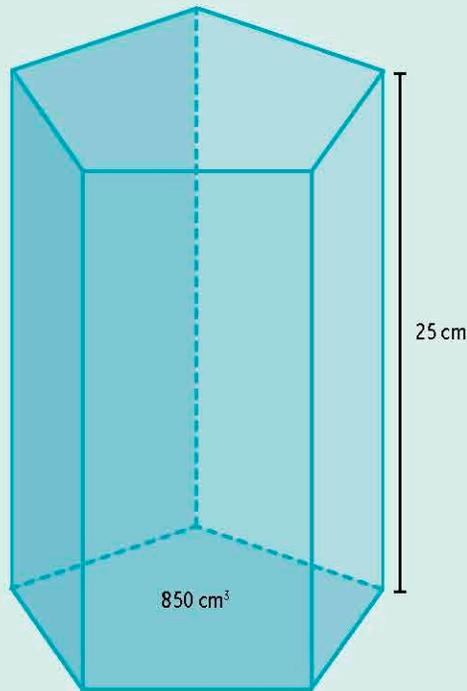
2. Analiza cada prisma y calcula la dimensión que se pide.



Volumen =



Altura =



Área de la base =

3. Resuelve los siguientes problemas.
 - a) Una jarra hexagonal está llena de jugo de naranja hasta $\frac{4}{5}$ partes de su capacidad. El lado de la base mide 3 cm; la apotema, 2.6 cm y su altura mide 30 cm.
 - ¿Cuál es el volumen de la jarra?
 - ¿Cuántos mililitros de jugo contiene aproximadamente?
 - b) Pilar tiene un vaso octagonal como el de la página 247. Vierte en él tres cubos de hielo de 3 cm de arista y 240 mL de agua simple. ¿A qué altura llegará el líquido en el vaso después de que se derritan los hielos?

❖ Discute tus respuestas y procedimientos con el resto del grupo; en particular, expliquen cómo interpretaron y resolvieron los problemas 1 c) y 3 b).



Explora

En la página www.edutics.mx/UEu encontrarás más ejercicios de cálculo de volumen de prismas. Omite el del cilindro para resolverlo en la siguiente secuencia.

Volumen de cilindros

Calcula el volumen de cilindros rectos.

Partimos

Glosario

flexómetro. Instrumento de medida que consiste en una cinta flexible graduada y que se puede enrollar.



1. Reúnanse en parejas y resuelvan el siguiente problema.
Un leñador vende los troncos por metro cúbico. Mide el largo del tronco con una vara de 1 m de longitud y el perímetro con la ayuda de un **flexómetro**.

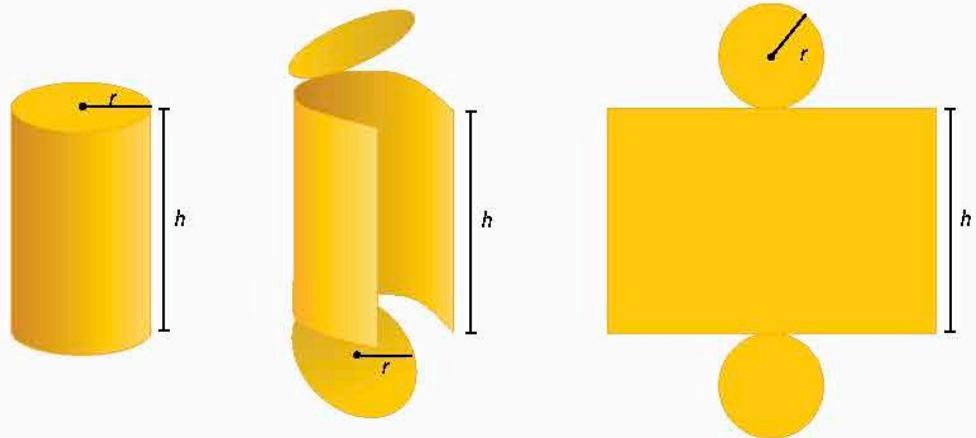


- a) ¿Cómo podrían calcular el volumen del tronco si lo consideran como un cilindro?
 - b) ¿Qué magnitudes necesitarían para calcular el volumen del tronco?
 - c) ¿Cuál es el radio aproximado de la base del tronco? Expliquen su respuesta.
- ❖ Comparen con otros compañeros sus procedimientos para calcular el volumen de un cilindro. ¿Cuál consideran que podrían aplicar de acuerdo con la información que tienen del tronco?

Recorremos

Cálculo del volumen

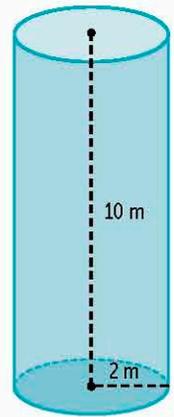
1. Analicen en parejas las figuras que muestran un cilindro desarmado.



- a) ¿De qué figuras se compone el desarrollo plano del cilindro?

- b) ¿Cuál es la relación entre el perímetro del círculo de la base y el rectángulo del desarrollo plano? _____
- c) ¿Cómo se debe proceder para calcular el volumen del cilindro? Usen los datos que aparecen en las figuras para argumentar su respuesta.

- d) Escriban con sus palabras y con una expresión algebraica la fórmula para calcular el volumen de cualquier cilindro recto, a partir de las medidas del radio de la base y la altura. Consideren las literales en las figuras anteriores.
Volumen : _____
 $V =$ _____
- e) Escriban una expresión algebraica que represente el volumen si la altura del cilindro de la figura mide 5 cm. _____



Volumen = _____

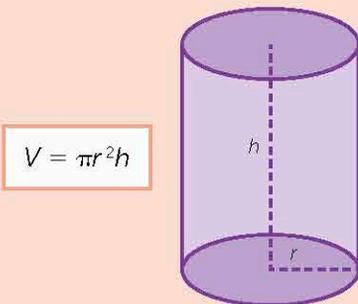
❖ Reúnanse con otra pareja y comparen su respuesta sobre cómo calcular el volumen de un cilindro. Argumenten para que se den cuenta si están en algún error. Discutan: ¿qué significa para este problema la expresión? ¿Qué se calcula al multiplicar el área de la base por la altura del cilindro?

2. Continúen en parejas y comprueben que la fórmula que propusieron es válida.
- a) Con los datos del radio y la altura del cilindro de la derecha calculen el volumen utilizando la fórmula propuesta en el inciso d) de la actividad anterior.
- b) ¿Cuál es el volumen del cilindro? _____

❖ Comparen con otras parejas y verifiquen si obtuvieron el mismo volumen. En caso contrario, revisen lo que deben corregir en su fórmula para que funcione.



El volumen del cilindro recto se calcula multiplicando el área de su base por su altura, es decir, de manera semejante al de un prisma recto, pero con una base circular.



Donde r es el radio de la base y h la altura del cilindro.

Explora

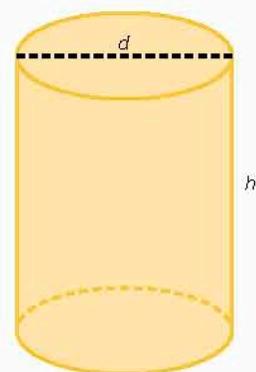


Con el interactivo de la página www.edutics.mx/Uaf podrás analizar la obtención de la fórmula del volumen del cilindro y resolver un ejercicio.

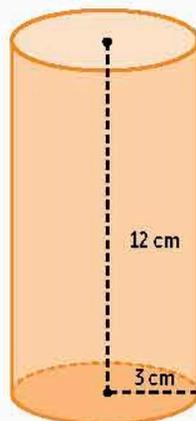
Integración

- Escribe una expresión algebraica para calcular el volumen de un cilindro recto si lo que se conoce es la medida del diámetro.

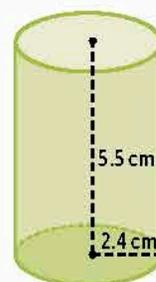
$$V =$$



3. Calcula el volumen de los siguientes cilindros. Expresa tus resultados en términos de π .



Volumen = _____

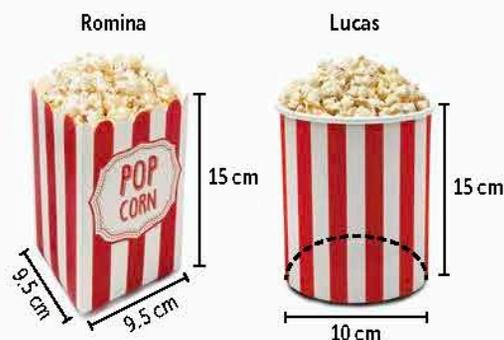


Volumen = _____

4. Resuelvan en equipos los siguientes problemas. Para hacer los cálculos numéricos consideren el valor aproximado de π como 3.14.

- a) Romina y Lucas fueron al cine. Cada uno compró unas palomitas, como las que se muestran en las figuras.

- ¿Cuál es el volumen del envase de Romina? _____
- ¿Cuál es el volumen del envase de Lucas? _____



b) La parte cilíndrica del silo para almacenamiento de grano que se muestra en la figura tiene un diámetro de 20 m. ¿Cuál es su volumen? _____



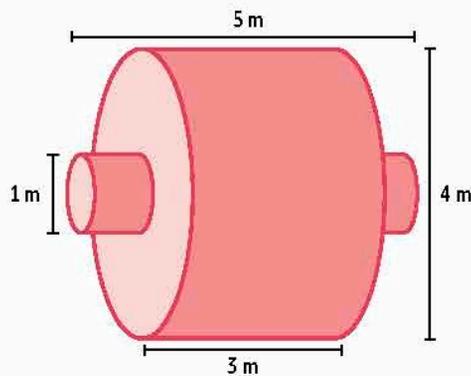
c) A continuación se muestra un rollo de papel térmico.



• ¿Cómo calcularían el volumen de papel que hay en el rollo?

• ¿Cuántos centímetros cúbicos de papel tiene el rollo?

d) Se fabricó con acero el rodillo de una **apisonadora**, como el que se muestra en la figura.



Glosario

apisonadora. Vehículo de gran tamaño que se desplaza sobre cilindros muy pesados y sirve para allanar el suelo.

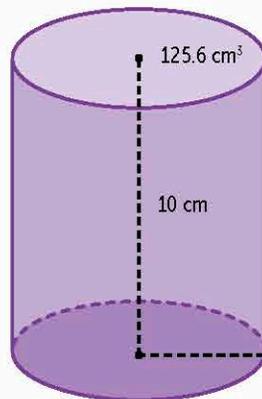


- ¿Cuál es el volumen del rodillo? _____
- ¿Cuál es el volumen de los cilindros laterales? _____
- ¿Cuál es el volumen de la pieza completa? _____
- Si cada centímetro cúbico de acero tiene una masa de 30 gramos, ¿de cuántas toneladas es la pieza? _____

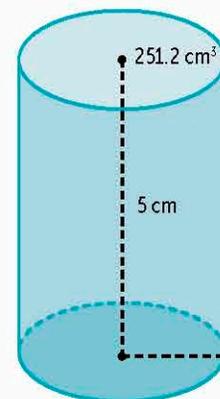
✦ Expliquen al resto del grupo cómo interpretaron los datos en las figuras para hacer los cálculos. Argumenten sus respuestas.

5. Analicen en parejas.

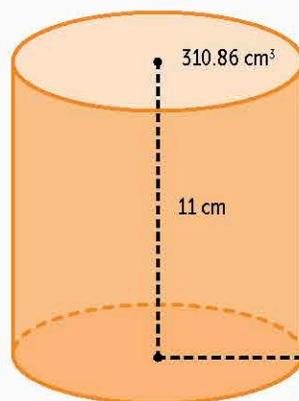
- a) Al interior de cada cilindro se indica su volumen. Encuentren la dimensión que se pide, considerando el valor aproximado de π como 3.14.



Diámetro = _____



Radio = _____

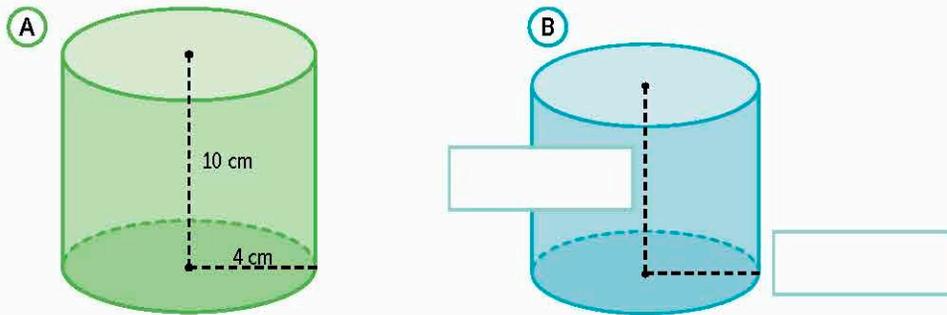


Perímetro = _____



Altura = _____

- b) Para obtener el cilindro B se redujeron en un 20 % el radio y la altura del cilindro A. Indiquen la longitud del radio y de la altura del cilindro B.



- ¿En qué porcentaje se redujo el volumen del cilindro B?
- c) El radio de un cilindro recto se disminuye en un 50 % y su altura se aumenta en un 50 %. ¿Consideran que su volumen ha cambiado? De ser así, ¿en qué porcentaje aumenta o disminuye? Expliquen su respuesta. _____

❖ Comparen sus procedimientos con los del resto del grupo. Si lo consideran necesario, comprueben sus resultados utilizando la calculadora. Analicen cómo utilizaron los porcentajes para calcular el volumen y discutan cuál forma les parece más adecuada.

Volumen y capacidad de cilindros rectos

6. Lee cada situación y contesta.

- a) Un pozo cilíndrico de 16 m de profundidad y 1.30 m de diámetro está lleno de agua. ¿Cuál es la capacidad aproximada en litros del pozo? Redondea al entero más próximo. _____
- Si se extraen 14 500 L de agua, ¿cuántos litros quedan en el pozo?
- b) Se vacían 7 cm³ de leche en un recipiente cilíndrico de 2.6 cm de diámetro. ¿A qué altura del recipiente llegará la leche? _____
- c) La caldera cilíndrica de un motor tiene 1.1 m de diámetro y mide 1.60 m de longitud. Para el buen funcionamiento del motor siempre tiene que estar llena de agua a $\frac{3}{4}$ partes de su capacidad.
- Determina la capacidad aproximada de la caldera (redondea al entero más próximo). _____
 - ¿Cuántos litros de agua debe contener la caldera para el buen funcionamiento del motor? _____

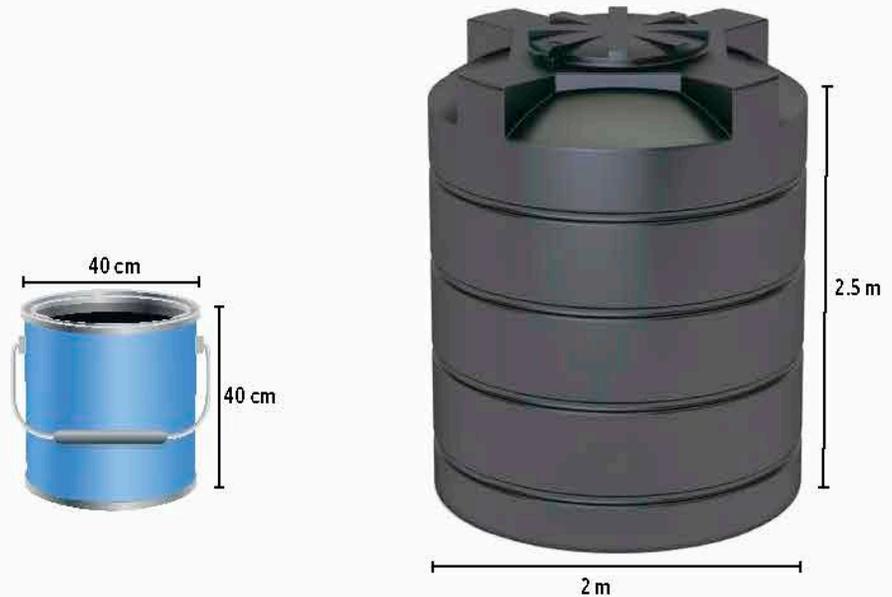
❖ Comparte tus respuestas y procedimientos con el resto del grupo. Discutan: ¿qué datos consideran que hacen referencia al volumen y cuáles a la capacidad en cada problema? ¿Cómo relacionaron esta información?



Reflexiona: ¿qué acciones toman en tu casa y en la escuela para no desperdiciar agua?

7. Resuelvan en equipos.

- a) Debido a la escasez de agua en algunas colonias la presión con la que ésta llega a las casas es muy poca y no alcanza a subir más allá de un metro. Por este motivo, en ocasiones los tinacos no pueden llenarse directamente. En la figura se muestran las dimensiones de un tinaco y el balde con el que habitualmente se llena.

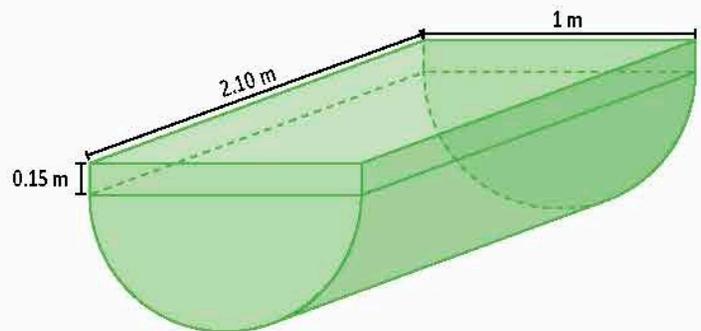


- ¿Cuántos litros caben en el tinaco si se llena hasta 2.5 m de altura?

- ¿Cuántos litros de agua le caben al balde? _____
- ¿Cuántas veces se debe llenar el balde para llenar el tinaco? _____
- ¿Cuál es la diferencia de volumen entre los dos recipientes? _____

- b) Nuria tiene un vaso de forma cilíndrica de 8 cm de diámetro y 10 cm de altura. Dentro puso varios cubos de hielo de 3 cm de arista, de manera que cuando todos se derritieron, el agua se derramó. ¿Cuál fue el mínimo número de cubos de hielo que colocó dentro del vaso?

- c) El tanque de refrigeración de leche de la figura consta de un medio cilindro con un borde rectangular, como se muestra en el dibujo.

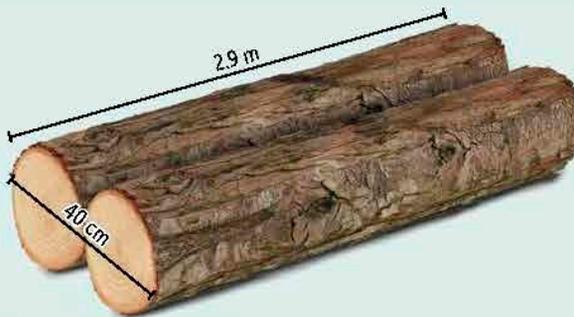


- ¿Cuál es el volumen del tanque? _____
- _____
- ¿Cuántos litros de leche se pueden guardar en el tanque de refrigeración? _____
- _____

❖ Expongan al resto del grupo sus procedimientos y respuestas. Recuerden que puede haber más de un procedimiento válido.



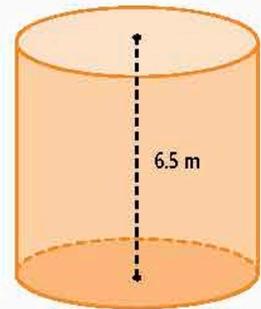
1. Considera de nuevo la situación planteada al inicio de la secuencia.
 - a) ¿Cuál es el volumen del tronco en metros cúbicos si la vara de 1 m cabe 4.5 veces a lo largo del tronco?
 - b) Calcula el volumen de los dos troncos juntos.



2. El volumen del cilindro de la derecha es de $104 \pi \text{ m}^3$. Determina su perímetro, radio y diámetro.
3. Resuelve los siguientes problemas.
 - a) Si el radio de un cilindro recto se aumenta en un 50 % y su altura se disminuye en un 20 %, ¿en qué porcentaje varía su volumen?
 - b) ¿Cuántos litros de agua se necesitan para llenar un recipiente cilíndrico de 1.5 m de diámetro y 1.2 m de altura?
 - c) Después de una tormenta la cantidad de agua en el pozo era de 18 840 L. Si antes de que lloviera había 12 560 L, ¿cuántos metros subió?



Arribamos



❖ En grupo comparen respuestas, expliquen cómo resolvieron y planteen otros problemas de cálculo de volumen.



Explora

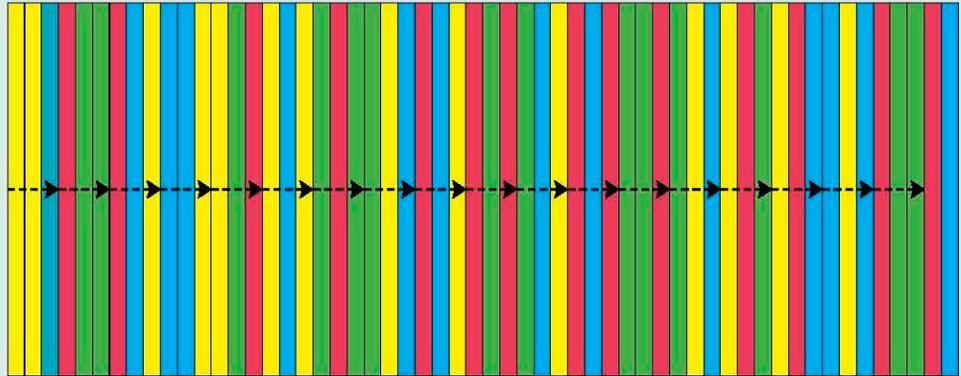
En la siguiente página www.edutics.mx/UaY podrás realizar otros ejercicios interactivos relativos al cálculo de volumen.

Determina la probabilidad teórica de un evento en un experimento aleatorio.

Partimos

1. Analiza la siguiente situación y contesta.

Laura está parada en una pista de juego, como la que se muestra enseguida, formada por franjas del mismo ancho y con colores que se repiten de forma aleatoria. El juego consiste en adivinar el color que se repetirá más al elegir la distancia de los saltos que dará.



- ¿Cuántos colores de barras hay en la pista?
- Laura está convencida de que los cuatro colores tienen la misma probabilidad de ocurrir, así que elige el verde y decide que cada uno de sus saltos sea de tres barras, es decir, de tres en tres. Las puntas de flecha indican la barra donde llegó en cada salto. ¿Cuántos saltos pudo dar?
- De los saltos que dio, ¿cuántas veces cayó en cada uno de los colores?
- ¿Cuál es la probabilidad frecuencial de cada color?
- Si Laura decide dar saltos de cuatro barras, ¿cuál es la probabilidad frecuencial de cada color?

✦ Compara tus respuestas con algún compañero. ¿Laura tenía la razón al suponer que todos los colores tienen la misma probabilidad de ocurrencia? ¿Cuántos saltos de cuatro barras puede dar Laura? Analicen cómo son las probabilidades de cada color entre sí cuando Laura da saltos de cuatro y de tres barras.

Recuerda

En primaria aprendiste que, a diferencia de los fenómenos deterministas, los fenómenos aleatorios no se pueden predecir con exactitud porque dependen del azar.

Recuerda

En primero de secundaria calculaste la probabilidad frecuencial al dividir el número de resultados favorables en un experimento entre el número total de repeticiones de éste.

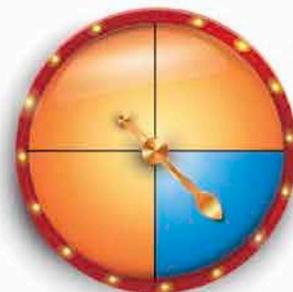
Recorremos

Concepto de probabilidad teórica

1. Resuelvan en parejas el siguiente problema.

- Roberto vio un juego de ruleta de cuatro secciones, como la que se muestra en la siguiente página, y antes de jugar quiere saber qué color tiene mayor probabilidad de ganar. Realizó experimentos con distintas repeticiones y los registró en la siguiente tabla.

Colores	Experimentos		
	10	40	120
Azul	4	12	26
Naranja	6	28	94



- ¿Cuántos eventos posibles hay al girar la ruleta? ¿Cuáles son?

- ¿Cuál es la probabilidad frecuencial de obtener naranja en cada uno de los experimentos? _____
- ¿Qué color tiene una mayor probabilidad de salir? Argumenten.

- Sin realizar ningún experimento, ¿cuál creen que es la probabilidad de obtener el color naranja? _____

b) Fernando, Carlos y Julio tienen 3 monedas de \$5. Una de ellas está cargada, es decir, que es más probable que caiga más veces una de las dos caras (águila o sol), pero no saben cuál de las dos es. Cada uno escoge una moneda y la lanza al aire registrando los resultados que obtienen. Completen la tabla.

	Fernando	Carlos	Julio
Águila	21	61	90
Sol	29	39	110
Total de lanzamientos			
Probabilidad frecuencial (águila)			



Recuerda

Un evento o suceso es un conjunto o grupo de resultados posibles con una característica en común. Por ejemplo, al lanzar un dado los números 2, 4 y 6 forman el evento "Que salga un número par".

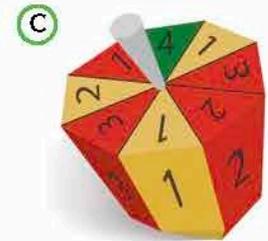
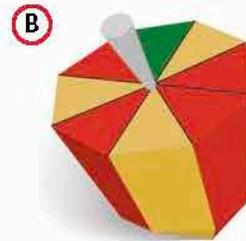
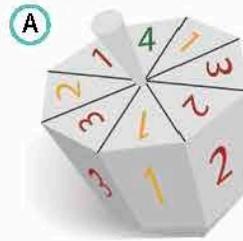
- ¿Cuántos eventos posibles hay al lanzar una moneda al aire? ¿Cuáles?

- ¿Quién creen que obtuvo los resultados más confiables? _____
- ¿Quién creen que tenga la moneda cargada? Expliquen su respuesta.

- Si de 200 lanzamientos se obtienen 90 águilas, ¿cuántas se esperaría obtener en 400 lanzamientos? _____
- ¿Creen que la probabilidad de obtener un águila o un sol en una moneda normal es la misma? ¿Cuál sería? _____

✦ Expliquen qué observan en las probabilidades frecuenciales conforme aumenta el número de repeticiones. ¿Cómo determinaron la cantidad de águilas en 400 lanzamientos? ¿Cómo saben a qué persona le tocó la moneda cargada?

2. Observen en equipos las siguientes vistas de pirinolas y contesten.



a) ¿Cuál es el espacio muestral de la pirinola A?

• ¿Cuántos resultados posibles hay en total? _____

b) Completen la tabla con los resultados favorables para cada evento.

Que salga...	Resultados favorables	Número de resultados favorables entre el número total de resultados posibles	Expresión de la razón en porcentajes
1			
2			
3			
4			
Total de resultados		$\frac{8}{8} = 1$	100%

Recuerda



El **espacio muestral** es el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio.

- En la tercera columna, calculen las razones de los resultados favorables entre el total de resultados posibles y exprésenlas como porcentaje.
- ¿Qué evento tiene el mayor porcentaje? _____
- Argumenten a qué piensan que se deba. _____

c) Discutan: ¿podrían utilizar estas razones para comparar dos eventos entre sí? ¿Cómo? _____



La probabilidad teórica se define como el número de resultados favorables que puede tener un evento específico entre el número total de resultados posibles.

$$\text{Probabilidad teórica} = \frac{\text{Número de resultados favorables}}{\text{Número total de resultados posibles}}$$

Puede expresarse mediante una expresión decimal o en porcentaje.

d) Escriban el espacio muestral de las pirinolas B y C.

Pirinola B: _____

Número de resultados posibles: _____

Pirinola C: _____

Número de resultados posibles: _____

e) ¿Cuál es la probabilidad de obtener el color rojo en la pirinola B?

f) ¿Cuál es la probabilidad de obtener el 1 amarillo en la pirinola C?

❖ Comparen sus respuestas con el resto del grupo y discutan: ¿con cuál de las pirinolas, A o C, conviene jugar? Si se quiere calcular la probabilidad de obtener el 4 amarillo en la pirinola C, ¿cuántos eventos favorables hay?

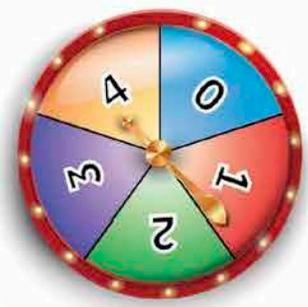


En el cálculo de la probabilidad teórica no se llevan a cabo experimentos, basta con conocer los resultados posibles del experimento aleatorio y deducir la probabilidad de los resultados favorables.

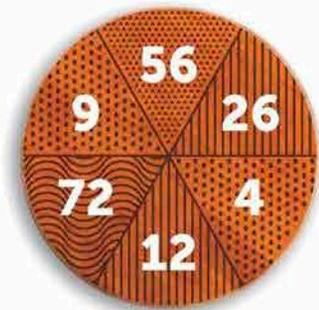
3. Lean en parejas cada situación y contesten.

- a) Natalia tiene una ruleta, la gira dos veces y suma los resultados que obtiene.
- Completen la siguiente tabla de doble entrada para encontrar el espacio muestral.

		Segundo giro				
		0	1	2	3	4
Primer giro	0	0				
	1		2			
	2			4		
	3				6	
	4					8



- ¿Cuántos resultados posibles hay? _____
- ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número par? _____
- ¿Cuál es la probabilidad de obtener un divisor de 8? _____
- ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número negativo? _____
- ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número menor o igual a 8? _____



b) Consideren el tablero.

- ¿Cuántos resultados posibles hay con respecto a los números? _____
- ¿Y con respecto a los patrones? _____
- ¿Cuál es el espacio muestral de los números?

- ¿Cuántos resultados favorables hay para obtener un múltiplo de 4?

- ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 4? _____
- ¿Cuántos resultados favorables hay para obtener el patrón ?

- ¿Cuál es la probabilidad de obtener un patrón ?

- ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número que tenga un 2 en sus cifras?

❖ Describan un evento posible para cada situación y calculen su probabilidad de ocurrencia. Intercambien sus eventos con otras parejas y resuelvan los que ellos les asignen. Compartan sus respuestas y procedimientos para calcular las probabilidades con el resto del grupo.

La probabilidad de tomar una manzana de mi bolsa es de $\frac{1}{3}$ y de una mandarina es de $\frac{1}{2}$.



4. Resuelvan en equipo el siguiente problema utilizando el diagrama de árbol. Sara tiene una bolsa con mandarinas, manzanas y ciruelas. Le ofrece una fruta a su prima si puede resolver las siguientes preguntas con los datos que le proporciona.



- a) ¿Cuál es la probabilidad de tomar una ciruela?

- b) Si Sara tiene 12 mandarinas, ¿cuántas frutas hay en total?

- c) ¿Cuántas manzanas y ciruelas tiene?

❖ Expliquen detalladamente al resto del grupo qué propiedades de la probabilidad y del espacio muestral utilizaron para calcular la probabilidad de tomar una ciruela y la cantidad que hay de cada fruta.

Probabilidad teórica y probabilidad frecuencial

5. Resuelvan en equipos.

a) Gloria fue a la feria y le ofrecieron el siguiente juego "Escoge una bolsa y con los ojos cerrados saca una canica verde".



- Construyan los diagramas de árbol para determinar los resultados posibles al sacar una canica de cada bolsa.
- Completen la siguiente tabla con la probabilidad teórica de los eventos en cada bolsa.

Evento	Bolsa		
	A	B	C
Extraer una canica roja			
Extraer una canica verde			
Extraer una canica azul			

- Para ganar el juego, ¿qué bolsa debe escoger Gloria? Expliquen su respuesta.

- ¿Cuál es el evento que tiene menor probabilidad de ocurrencia? ¿Por qué?

- ¿En cuáles de las bolsas hay la misma la probabilidad de sacar una canica roja? Argumenten.

b) Realicen el experimento utilizando papelitos de colores que representen las canicas y tres bolsas. Repartan los papelitos en cada bolsa como se muestra en la figura de arriba. Cada integrante del equipo deberá extraer un papelito con los ojos cerrados, registrar el color y regresarlo a la bolsa. Deberán repetir el experimento 10 veces en cada bolsa, de modo que al reunir los datos de todo el equipo tengan al menos 30 o 40 repeticiones para cada bolsa.

c) Completen la tabla de la siguiente página con las frecuencias absolutas para cada evento.

Evento: extraer...	Bolsa		
	A	B	C
una canica roja			
una canica verde			
una canica azul			
Total de resultados			

d) Completen la siguiente tabla con la probabilidad frecuencial para cada evento.

Evento: extraer...	Bolsa		
	A	B	C
una canica roja			
una canica verde			
una canica azul			

e) Reúnan los resultados del experimento para todo el grupo y calculen nuevamente las probabilidades frecuenciales.

- ¿Qué observan al comparar sus resultados, tanto por equipos como por grupo, con la probabilidad teórica calculada en la página 263? _____

❖ Compartan sus conclusiones con el resto del grupo y señalen qué semejanzas encuentran en la definición de probabilidad teórica y probabilidad frecuencial y en qué casos pueden utilizar cada una.



Con la probabilidad teórica es posible predecir lo que ocurrirá en un experimento aleatorio. Si el análisis es correcto, los resultados de calcular la probabilidad frecuencial, que se calcula al realizar el experimento, y la probabilidad teórica serán iguales o tendrán un margen de error muy pequeño.

Explora



Las calculadoras científicas tienen una tecla **RAND**, que al presionarla genera un número al azar comprendido entre 0 y 1 llamado **número aleatorio**. Estos números resultan muy útiles en la simulación de experimentos.



Integración

- Calculen en equipos la probabilidad teórica para cada evento y realicen los experimentos, al menos 20 veces, para compararla con la probabilidad frecuencial.
 - Tomar de un juego de naipes una carta al azar y que sea un 10. _____
 - Lanzar un dado y obtener un número par. _____
 - Obtener dos águilas al echar al aire dos veces una moneda. _____
 - Extraer el 3 de una urna con 20 números. _____
 - Sacar "Toma todo" al girar una pirinola. _____

Arribamos

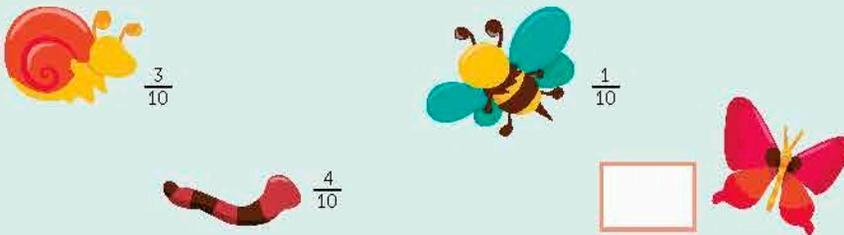
1. Considera de nuevo la situación planteada al inicio de la secuencia.
 - a) ¿Cuál es el espacio muestral del experimento de saltar y pisar un color?
 - b) ¿Cuál es la probabilidad teórica para el evento "pisar el color verde"?
 - c) Para que la probabilidad frecuencial se acerque más al resultado de la teórica, ¿de qué tamaño deben ser los saltos Laura?
2. Resuelve los siguientes problemas.
 - a) Eugenia tiene las siguientes monedas y tomará una al azar para sumarlo a su donación para la Cruz Roja.



Calcula la probabilidad de que...

- la moneda sea de más de \$1.00.
- la moneda sea de por lo menos \$10.00.
- se quede con menos de la mitad de su dinero.

- b) Sofía participa en un juego y necesita 10 puntos para ganarse un premio. En cada tiro aparecen cuatro símbolos. Cuando sale la mariposa gana 5 puntos y cuando sale cualquier otro símbolo pierde 1 punto. La probabilidad de que salga cada figura es la siguiente.



- ¿Cuál es la probabilidad de obtener una mariposa?
 - ¿Cuál es la probabilidad de que pierda 1 punto en un tiro?
 - Si tira 30 veces, ¿cuántos puntos puede perder?
 - Después de 30 tiros, ¿tiene posibilidad de ganarse el premio? Explica tu respuesta.
- c) Si la probabilidad frecuencial de un evento en el que se llevaron a cabo 50 repeticiones es de $\frac{15}{50}$. Calcula cuál sería la probabilidad frecuencial de ese evento si se realizarán 200, 500, 1000 y 2500 repeticiones.

✦ Comparte con el resto del grupo cómo identificaste los resultados posibles en cada evento para calcular la probabilidad. Reflexionen en qué situaciones es útil calcular la probabilidad de un suceso.

Explora

En la siguiente página de internet www.edutics.mx/URZ podrás resolver algunos ejercicios de probabilidad teórica y frecuencial.

Somos

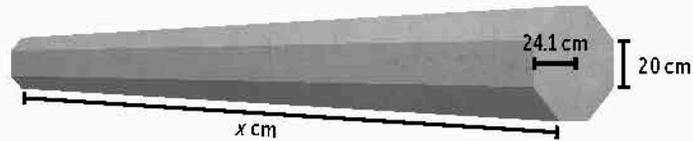
Reflexiona: ahora que sabes calcular la probabilidad de un suceso, ¿consideras que es adecuado invertir tu tiempo y dinero en juegos de azar como las máquinas tragamonedas?



Autoevaluación

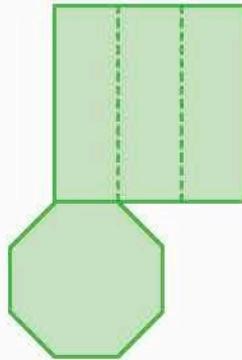
Analiza cada situación y subraya la opción correcta.

1. Se quiere construir un molde para colar postes octagonales como el de la figura.

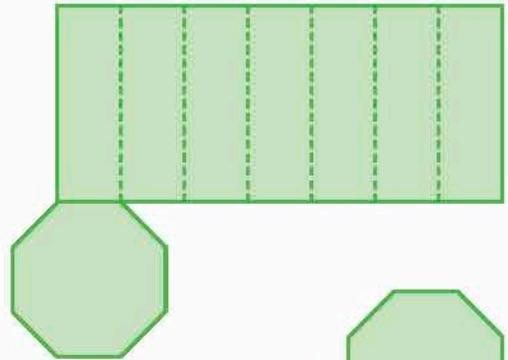


- ¿A cuál de las siguientes figuras se parece el desarrollo plano para hacer el molde? La mezcla se ingresa por una cara lateral.

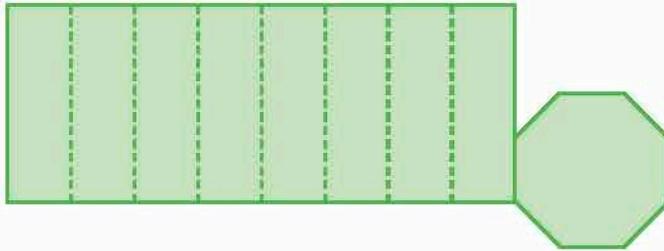
A)



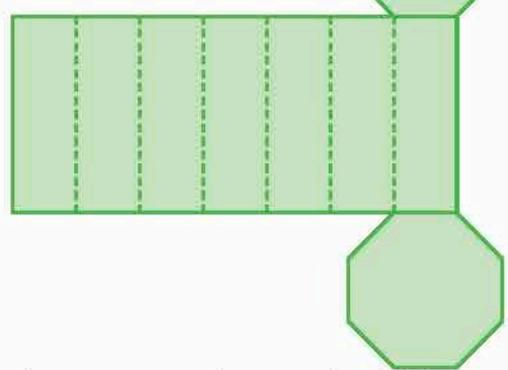
C)



B)



D)



- ¿Qué expresión calcula el total de cartón que se necesita para el molde?

A) $A = 8(20)(24.1)(7)x$

C) $A = 8(20)(24.1) + 7(20)x$

B) $A = bh + \frac{Pa}{2}$

D) $A = 8(20)(24.1) + 8(20)x$

- ¿Cuál expresión no es equivalente a la respuesta del inciso anterior?

A) $160(24.1) + 20x + 20x + 20x + 20x + 20x + 20x + 20x$

B) $3856 + 140x$

C) $8(24.1) + 7x + 40$

D) $20[8(24.1) + 7x]$

- Calcula el volumen del poste si éste tuviera una altura de 4 m y una forma cilíndrica con una base circular de radio 40 cm.

A) $771\,200\text{ cm}^3$ y 2 m^3

C) $1542\,400\text{ cm}^3$ y 160 m^3

B) 1928 cm^3 y 80 m^3

D) 80 cm^3 y $5\,024\text{ m}^3$

2. Para mezclar el concreto requerido para el poste, se necesitan en total 82 kg de revoltura de grava y arena. Se sabe que son 24 kg más de arena que de grava.

• ¿Cuál sistema resuelve el problema?

A) $\begin{cases} A + G = 82 \\ A + G = 24 \end{cases}$

C) $\begin{cases} AG = 82 \\ 24A + G = 82 \end{cases}$

B) $\begin{cases} A = G \\ A = 41 \end{cases}$

D) $\begin{cases} A + G = 82 \\ A = G + 24 \end{cases}$

• ¿Cuántos kilogramos de arena y grava se deben mezclar?

A) $A = 41$ kg y $G = 41$ kg

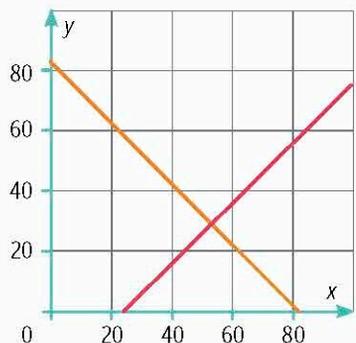
C) $A = 53$ kg y $G = 29$ kg

B) $A = 24$ kg y $G = 58$ kg

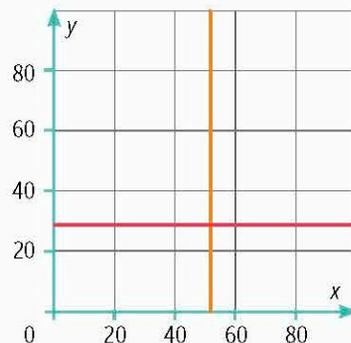
D) $A = 53$ kg y $G = 53$ kg

• ¿Cuál es la solución geométrica del sistema anterior?

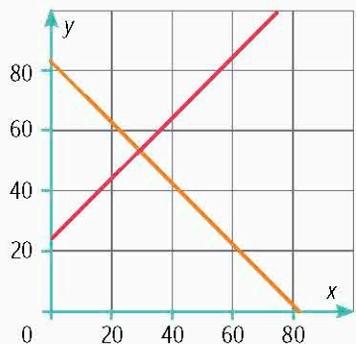
A)



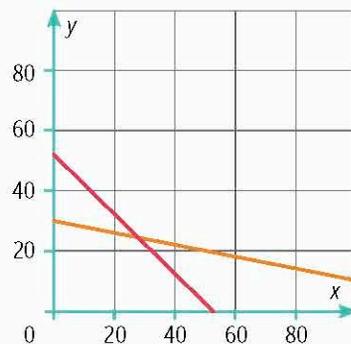
C)



B)



D)



3. Al fabricar 1 000 postes, 5 de ellos pueden salir defectuosos, ¿cuál es la probabilidad de que salgan así?

A) $\frac{5}{100} = 0.05$

C) $\frac{1000}{5} = 200$

B) $\frac{5}{1000} = 0.005$

D) 5

Reúnete en pareja con un compañero. Comparen sus respuestas, argumenten el porqué respondieron así. Corrijan lo que sea necesario.

Coevaluación

Revisa con tu profesor los resultados: ¿en qué necesitas mejorar? ¿Qué estrategias usarás?

Heteroevaluación



Rodeados de cuerpos y de historia

Concebir a las matemáticas como una construcción social

Todos los objetos que están alrededor nuestro ocupan un espacio y por la tanto, tienen un volumen. Debido a sus aplicaciones directas en la vida cotidiana, el estudio del volumen ha sido un tema de interés muy antiguo, como se puede observar en los registros de civilizaciones como la babilónica, egipcia y griega.

No sólo de prismas y cilindros

Existen varios tipos de cuerpos geométricos de tres dimensiones (largo, ancho y alto) que puedes identificar. De hecho los prismas forman parte de una familia llamada "poliedros".

Poliedro: cuerpo geométrico con caras planas en forma de polígonos que encierran un volumen finito.

Los poliedros regulares también son llamados sólidos platónicos, pues se considera que fue Platón el primero en estudiarlos.

Poliedros regulares

Sus caras son polígonos regulares iguales. Sólo existen 5.



Poliedros irregulares

Son aquellos que tienen caras o ángulos irregulares. Entre ellos están los prismas y las pirámides; también existen los llamados antiprismas, que tienen dos caras paralelas y las caras laterales son triángulos; y los 13 sólidos de Arquímedes, entre otros.



Objetos y construcciones con forma de prisma

Objetos con forma de pirámide

Además de los poliedros existen cuerpos en los que una de sus caras es curva como el cilindro, el cono y la esfera. Estos cuerpos también son llamados sólidos de revolución, porque pueden obtenerse a partir de una figura que gira alrededor de un eje.

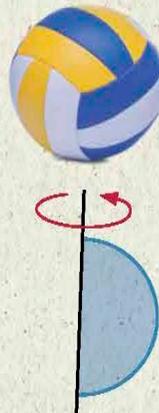
Un significado de *revolución* es giro o vuelta.



El cilindro se genera al girar un rectángulo.



El cono se genera al girar un triángulo rectángulo.



La esfera se genera al girar medio círculo.

Los babilonios calculaban el volumen de un cilindro como el producto de la base por la altura; sin embargo, el volumen de una pirámide cuadrangular se calculaba incorrectamente.

A través del tiempo

Es importante reconocer que ninguna contribución en el campo de las matemáticas es un conocimiento aislado, pues parte de resultados previos que hacen posible formular nuevas ideas.

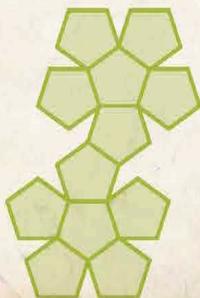
300 a. n. e.

Euclides en su obra *Los elementos* reunió los aportes de Teeteto sobre los poliedros regulares.



1525

Dürero, en una especie de enciclopedia para pintores, retoma el estudio de los poliedros regulares de Euclides representando, además, cada uno de los cuerpos.



1615

Kepler estudió los trabajos de Arquímedes y escribió el libro *Nueva Geometría sólida de los barriles de vino*. Su interés por estudiar el cálculo del volumen surge al no estar de acuerdo con el método empleado por un mercader para medir el contenido de vino en un barril.



1752

Euler dedujo la fórmula que lleva su nombre que relaciona el número de vértices, caras y aristas en un poliedro.

$$v + c = a + 2$$

➔ El conocimiento sobre un tema nunca se agota. ¿Podrías investigar otras contribuciones o aplicaciones del estudio de los cuerpos geométricos?

Para el alumno

- Abbot, Edwin, *Tierraplana, una novela de varias dimensiones*, México, Bonilla Artigas Editores, 2016.
- Adams, Simon, *Descifradores de códigos. Desde los jeroglíficos hasta los hackers*, México, SEP-Planeta, 2003 (Libros del Rincón).
- Anaya Dubernard, Salvador, *Carrusel matemático*, México, Noriega-Limusa, 1990.
- Anno, Masaichiro, (trad. de Jaime Cruz), *El misterioso jarrón multiplicador*, México, SEP-FCE, 2007.
- Blum, Wolfgang, *Matemáticas*, México, SEP-Santillana, 2005.
- Bosch, Carlos y Claudia Gómez, *Una ventana a las incógnitas*, México, Santillana, 2003.
- Cerasoli, Anna, *La sorpresa de los números*, Madrid, Maeva, 2006.
- Cerasoli, Anna, *Mister Cuadrado*, Madrid, Maeva, 2009.
- Enzensberger, Hans Magnus, *El diablo de los números*, Madrid, Siruela, 2016.
- Gardner, Martin, *Acertijos matemáticos*, México, Selector, 2000.
- Gardner, Martin, *Las últimas recreaciones*, Barcelona, Gedisa, 2002.
- Herrera, Rosa María, *¡Cuánta geometría hay en tu vida!*, México, SEP-SM, 2003 (Libros del Rincón).
- Lam, Emma y Elena de Oteysa, *El álgebra es divertida*, México, SEP-Santillana, 2009.
- Langdon, Nigel y Snape Charles, *El fascinante mundo de las matemáticas*, México, Limusa, 2007.
- Perelman, Yacov, *Matemáticas recreativas*, Barcelona, Martínez Roca, 2000.
- Sierra i Fabra, Jordi, *El asesinato del profesor de matemáticas*, Madrid, Anaya, 2004.

Sitios web

- Centro para la Innovación y Desarrollo de la Educación a Distancia (CIDEA), *Matemáticas 1*, www.matematicasonline.es/cidead/1esomatematicas/index.htm (consulta: 24 de junio de 2018).
- CIDEA, *Matemáticas 2*, www.matematicasonline.es/cidead/2esomatematicas/index.htm (consulta: 24 de junio de 2018)
- CIDEA, "Proporcionalidad" en *Matemáticas 2*, www.matematicasonline.es/cidead/2eso/matematicas/2quincena4/index2_4.htm (consulta: 24 de junio de 2018).
- CIDEA, "Sistemas de ecuaciones" en *Matemáticas 3*, www.recurstic.educacion.es/secundaria/edad/3esomatematicas/3quincena4/index3_4.htm (consulta: 24 de junio de 2018).
- "Cuerpos geométricos" en *Aula virtual*, www.edu.xunta.gal/centros/cpimanuelsuarez/aulavirtual2/pluginfile.php/4811/mod_resource/content/0/2017-05mayo-09_-_Poliedros_2_.pdf (consulta: 24 de junio de 2018).
- "Desviación media absoluta" en *3.º de secundaria*, www.es.khanacademy.org/math/eb-3-secundaria/eb-los-datos-y-la-estadistica-3/eb-desviacion-media-absoluta-mad/v/mean-absolute-deviation (consulta: 24 de junio de 2018).

- "Expresiones algebraicas a partir de modelos geométricos" en *Red magisterial*, www.redmagisterial.com/med/9282-expresiones-algebraicas-a-partir-de-modelos-g/ (consulta: 24 de junio de 2018).
- "Matemáticas 2, Secundaria" en *aprende2.0*, www.recursos.aprende.edu.mx/#/s?title=&type=&level=5&grade=15&subject=matematicas-ii (consulta: 24 de junio de 2018).
- "Proporcionalidad inversa" en *Escuela pública digital*, www.contenidosdigitales.ulp.edu.ar/exe/matematica1/proporcionalidad_inversa.html (consulta: 24 de junio de 2018).
- "Volumen de cuerpos geométricos" en *Matemáticas 3*, www.recursostic.educacion.es/secundaria/edad/2esomatematicas/2quincena10/index2_10.htm (consulta: 24 de junio de 2018).

Consultada

- Ávila, Alicia y Silvia García, *Los decimales: más que una escritura*, México, INEE, 2008 (Materiales para apoyar la práctica educativa).
- Block, David, Tatiana Mendoza y Margarita Ramírez, *¿Al doble le toca el doble? La enseñanza de la proporcionalidad en la educación básica*, México, Ediciones SM, 2010.
- Clemens, Stanley, et al., *Geometría, con aplicaciones y soluciones de problemas*, México, Addison-Wesley Iberoamericana, 1989.
- Flores, Alfinio, "División de fracciones como comparación multiplicativa a partir de los métodos de los alumnos", en *Educación matemática*, marzo de 2014, pp. 227-244, www.redalyc.org/html/405/40540854012/ (consulta: 24 de junio de 2018).
- García, Silvia, *Sentido numérico*, México, INEE, 2014 (Materiales para apoyar la práctica educativa).
- García, Silvia y Olga López Escudero, *La enseñanza de la geometría*, México, INEE, 2008.
- Paenza, Adrián, *Matemática...¿estás ahí? Episodio 3.14*, Buenos Aires, Siglo XXI Editores, 2007.
- Sistema Internacional de Unidades (SI), 8.ª ed., 2006, www.cem.es/sites/default/files/siu8edes.pdf (consulta: 24 de junio de 2018).
- Ursini, Sonia, Fortino Escareño, Delia Montes y María Trigueros, *Enseñanza del álgebra elemental: una propuesta alternativa*. México, Trillas, 2005.
- "Guía de 6.º grado" en *Proyecto de Mejoramiento de la Enseñanza de la Matemática*, www.mineduc.gob.gt/portal/contenido/menu_lateral/programas/guatematica/index.html (consulta: 24 de junio de 2018).

Créditos iconográficos

Shutterstock: pp. 12 y 13, 15 (a-c), 18 (a-d), 19, 20, 24 (a y b), 35 (a y b), 40, 45, 74, 75 (c), 76, 77, 92 (a y b), 93 (a y b), 94 y 95, 100, 102, 118, 119, 131 (a), 146 (a), 170 (b), 172, 179, 184, 185, 188 (a-c), 189 (c-f), 190 y 191, 210, 216 (a y b), 219, 226, 230, 233, 239, 240 (a), 241 (d), 250 (a y b), 252 (d y e), 253 (a, b y d), 256 (a-c), 257 (a y c), 265, 268 (b-f), 268, 269 (a-c y h).

Ilustraciones:

IN Sinister / Shutterstock: pp. 17, 21 (a-c), 22 (a-c), 23 (a-c), 25 (a-c), 26 (a-d), 29, 30, 34, 38, 41 (a y b), 43, 48, 51, 54 (a), 60, 67 (a), 68, 70, 73, 75 (a y b), 79, 81 (a), 90, 96 (a), 101, 106, 109, 113, 114, 120 (a), 121, 122, 124, 125, 128, 130, 131 (b), 138, 146 (b y c), 150, 151, 153 (a y b), 154, 159 (a), 161 (b), 162 (a), 163, 167 (b), 168 (b y c), 169 (a), 178, 179, 185, 194 (a), 201 (a), 206, 207, 208, 216 (c y d), 234 (a), 238, 240 (b), 242, 243, 246, 247 (c), 248, 259, 261, 262, 263, 266 (a), y 269 (g e i).

Gráficos:

Avant Graph: pp. 14 (a y b), 15 (d), 27, 28, 36, 46, 47, 50, 52, 54 (b-g), 55, 56, 57, 58, 59, 61, 62 (b), 81 (b), 107, 110, 111, 120 (b-d), 127, 132, 141 (a-c), 149, 158 (a), 162 (b), 165, 166, 167 (a), 192 (a-d), 193 (a-d), 194 (b-d), 196, 197 (a), 198 (c), 199 (a), 201 (b y c), 235(a, c y d), 236, 237 (a-f), 241 (a-c), 251 (b), 252 (a) y 269 (d-f);

IN Sinister: pp. 14 (c y d), 16, 44, 53, 62 (a y c), 63, 64, 65, 66, 67 (b-d), 82, 83, 85, 87, 88, 89, 91, 96 (b-d), 97, 98, 99, 105, 133, 134, 135, 136, 137, 140, 142, 147, 148, 152, 153 (c), 155, 156, 157, 158 (b-d), 159 (b), 160, 161 (a), 164, 167 (c), 168 (a), 169 (b-d), 170 (a y c), 171, 174, 175, 176, 177, 183, 186, 187, 188 (d-f), 189 (a y b), 192 (e), 193 (e-i), 197 (b y c), 198 (a y b), 199 (b), 200, 202, 204, 205, 209, 211, 212, 217, 223, 225, 234 (b y c), 235 (b), 237 (g), 244, 245, 247 (a y b), 249, 250 (c-e), 251 (a), 252 (b y c), 253 (c), 254, 255, 256 (d), 257 (b), 258, 260, 266 (b-e), y 267.

Específicos:

p. 92: (c) El hueso Ishago, Real Instituto Belga de Ciencias Naturales, Copyright-KBIN-Thierry Hubin;

p. 93: (b) Logo del Inegi;

p. 93: (c) Códice Mendoza, Bodleian Library, Oxford University.



www.edicionescastillo.com
infocastillo@macmillaneducation.com
Lada sin costo: 01 800 536 1777

