

# Matemáticas 3

Secundaria

Emilio Covián Rué

EDITORIAL



# Presentación

El principal propósito de **Matemáticas 3** es apoyar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas básicas del nivel de educación secundaria por medio del trabajo colaborativo y la construcción de significados matemáticos. Lo anterior implica que alumnos y maestros asuman un nuevo compromiso y —de ser necesario— replanteen la manera de trabajar en el aula. En específico, este libro propone usar el salón de clases como un laboratorio didáctico donde se pongan a prueba las competencias de los alumnos, y se extiendan la responsabilidad y el compromiso a los padres de familia.

En sintonía con lo anterior, **Matemáticas 3** será un recurso de gran utilidad durante la gestión de la clase, ya que propone a los alumnos retos que deberán enfrentar activamente.

Por otro lado, la obra presenta situaciones problemáticas en las cuales los estudiantes tendrán oportunidad de aplicar gran variedad de razonamientos, utilizar estrategias diversas, recursos inimaginables y procedimientos auténticos. Todo lo anterior es fundamental para que los jóvenes de las nuevas generaciones aprendan de manera colaborativa. **Matemáticas 3** no se restringe al conocimiento formal, pues la apertura a escuchar, analizar y debatir —con el fin de convencer sobre quién tiene una estrategia adecuada utilizando argumentos declarativos y demostraciones con signos matemáticos— propicia que los alumnos hagan conjeturas que les permitan cambiar de opinión sobre lo que saben, modifiquen algunos aspectos de sus saberes o los confirmen del todo, con lo cual tendrán acceso a otros conocimientos más complejos. El maestro y los alumnos serán quienes validen las conclusiones.

Por todo lo anterior, este libro es un excelente apoyo para quienes aceptan el reto del trabajo colaborativo y están dispuestos a detectar y superar dificultades, así como a dar sentido y significado a lo estudiado. El único error posible sería no darse la oportunidad de trabajar de este modo y no permitirse aprender en colaboración con los demás.

El autor

Los aprendizajes esperados se alcanzan mediante el estudio de dos o más contenidos específicos, a la par de que se van desarrollando las competencias matemáticas.

En el trabajo con las lecciones se fomenta el trabajo colaborativo al solicitar a los alumnos que compartan estrategias, recursos y experiencias apoyándose en las normas del debate matemático escolar.

**Matemáticas 3** fue elaborado en Editorial Nuevo México por el equipo de la Dirección General de Contenidos.

Ilustración

Alma Julieta Núñez Cruz, Jorge Aurelio Álvarez Vázquez, Ricardo Ríos Delgado, Héctor Ovando Jarquín

Fotografía

Shutterstock, Thinkstock, Latinstock, Archivodigital, Glow Images, ucv.cl, esacademic.com, blog.espol.edu.ec

La presentación y disposición en conjunto y de cada página de **Matemáticas 3** son propiedad del editor. Queda estrictamente prohibida la reproducción parcial o total de esta obra por cualquier sistema o método electrónico, incluso el fotocopiado, sin autorización escrita del editor.

© 2015 por Emilio Covilán Rué

D. R. © 2015 por EDITORIAL NUEVO MÉXICO, S. A. de C. V.

Avenida Río Mixcoac 274 piso 4, colonia Acacias, C. P. 03240 delegación Benito Juárez, Ciudad de México.

ISBN: 978-607-712-144-2

Primera edición: abril de 2015

Primera reimpresión: abril de 2016

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana.  
Reg. Núm. 3012

Impreso en México / Printed in Mexico

Estimado estudiante:

Bienvenido al tercer grado de secundaria. En este curso continuarás dando sentido a lo que aprendiste en el grado anterior sobre matemáticas. También estudiarás contenidos nuevos y tendrás la oportunidad de conocer gran variedad de situaciones en las que las matemáticas influyen de manera importante, así como la estrecha relación que tienen con otras asignaturas.

El trabajo colaborativo te ayudará a analizar actividades interesantes con las cuales no solo aprenderás matemáticas, sino que tendrás la oportunidad de mejorar tus técnicas de estudio, validarás procedimientos, resolverás problemas de manera autónoma y argumentarás tus resultados.

**Matemáticas 3** será una herramienta importante en el curso que estás a punto de empezar. En tu libro encontrarás actividades diseñadas para que desarrolles tus competencias matemáticas y explores distintos procedimientos que resuelven una situación; tú mismo los validarás a través del trabajo colaborativo, ya que aunque algunos son igualmente correctos, unos resultan más eficientes que otros. Tomando en cuenta que podrás confrontar tus ideas con las de tus compañeros, será esencial que desarrolles habilidades como observar, analizar, justificar y escuchar.

En el trabajo cotidiano desarrollarás competencias para resolver problemas de manera autónoma, comunicar información matemática, validar procedimientos y resultados; y manejar técnicas eficientemente.

Si en el comienzo del ciclo escolar se te dificulta expresar lo que piensas, no te preocupes, pues con el trabajo diario podrás comunicar de manera clara tus ideas, así como consolidar la forma de escribir tus argumentos matemáticos y validarlos en clase con las aportaciones de tus compañeros y tu profesor. Lo anterior implica que incorpores a tu rutina diaria hábitos de estudio que poco a poco te harán más autónomo y analítico.

Sin más preámbulo te deseo éxito en tu curso de matemáticas.

El autor

Estimado profesor:

**Matemáticas 3** es un libro de texto que tiene como finalidad apoyar tu gestión de clase. Cada una de las lecciones fue cuidadosamente diseñada, estructurada, seleccionada y validada en el aula escolar antes de finalmente compartirla contigo. Las actividades planteadas involucran diversos contextos, desde los más cotidianos —por ejemplo, tomar lecturas del medidor de luz para planificar el consumo— hasta aquellos que tienen que ver con entornos de especialistas como el uso de la ley de Ohm, así como la colocación de antenas de telecomunicaciones, entre otros más que encontrarás en el texto. La intención de ello es fortalecer la idea de que las matemáticas son igual de útiles en la vida diaria que en el avance científico y tecnológico de las sociedades del siglo XXI.

Cada lección plantea un problema a partir del cual se estudia un nuevo contenido. El grado de dificultad de cada problema exige que los alumnos pongan en acción sus conocimientos y los apliquen en la resolución del planteamiento inicial, al tiempo que avanzan en la apropiación de nuevos conceptos.

El libro **Matemáticas 3** fomenta el trabajo colaborativo, el cual implica tanto el trabajo individual como en equipos pequeños y en forma grupal. El objetivo es que todos los estudiantes participen por igual en la construcción de conceptos y aprendan a usar técnicas eficientes para resolver los problemas matemáticos. Por ello, la discusión, la confrontación, el intercambio de ideas y la explicitación de dificultades por parte de los alumnos desempeñan una labor fundamental en la clase.

En este contexto, el profesor debe dejar que los alumnos asuman su responsabilidad en la resolución de los problemas y en la exposición de ideas y estrategias. El profesor también requiere actuar como guía, pues debe observar y escuchar las dificultades que manifiesten los alumnos, elegir el momento adecuado para intervenir y hacer preguntas o realizar formalizaciones respecto de los conceptos vistos en clase.

Por todo lo anterior, **Matemáticas 3** es un material que puede ser parte medular de tu planificación y volverse una importante herramienta para tu práctica docente.

El autor

La planificación es parte medular de la práctica docente. Por ello este material te será de gran apoyo en el desarrollo de la clase, pues plantea situaciones interesantes en un entorno de trabajo colaborativo, con la finalidad de fomentar el desarrollo de las competencias matemáticas de tus alumnos.

# Índice

Presentación	3
Presentación para el alumno	4
Presentación para el maestro	5
Dosificación	8
Conoce tu libro	12

## Bloque 1 16

Lección 1	Ecuaciones cuadráticas I	18
Lección 2	Congruencia y semejanza	24
Lección 3	Criterios de congruencia y semejanza de triángulos	32
Lección 4	Representaciones gráficas, tabulares y algebraicas	40
Lección 5	Variación cuadrática	46
Lección 6	Eventos mutuamente excluyentes, complementarios e independientes	54
Lección 7	Diseño de una encuesta	60
Evaluación tipo PISA		66
Proyecto		68

## Bloque 2 72

Lección 8	Factorización	74
Lección 9	Propiedades de algunas isometrías	80
Lección 10	Movimientos en el plano	86
Lección 11	Relación de áreas en un triángulo rectángulo	92
Lección 12	Teorema de Pitágoras	98
Lección 13	Regla de la suma	104
Evaluación tipo PISA		110
Proyecto		112

## Bloque 3 116

Lección 14	Ecuaciones cuadráticas II	118
Lección 15	Semejanza y congruencia	124
Lección 16	Teorema de Tales	130
Lección 17	Homotecia	136
Lección 18	Gráficas de funciones cuadráticas	142

© Nueva México

## Bloque 5 222

Lección 28	Solución de problemas que implican el uso de ecuaciones	224
Lección 29	Secciones cónicas	230
Lección 30	Volumen del cono y del cilindro	238
Lección 31	Estimación y cálculo del volumen de conos y cilindros rectos	244

Lección 32	Variación lineal o cuadrática	250
------------	-------------------------------	-----

Lección 33	Condiciones para que un juego de azar sea justo	258
------------	---	-----

Evaluación tipo PISA		264
----------------------	--	-----

Proyecto		266
----------	--	-----

### Fuentes de información

Para el alumno	270
----------------	-----

Para el maestro	271
-----------------	-----

Bibliografía consultada para la elaboración de este libro	272
---	-----

Lección 19	Gráficas que modelan movimientos	148
------------	----------------------------------	-----

Lección 20	Regla del producto	154
------------	--------------------	-----

Evaluación tipo PISA		160
----------------------	--	-----

Proyecto		162
----------	--	-----

## Bloque 4 166

Lección 21	Regla de una sucesión	168
------------	-----------------------	-----

Lección 22	Sólidos de revolución	176
------------	-----------------------	-----

Lección 23	Pendiente de una recta	184
------------	------------------------	-----

Lección 24	Ángulos agudos y triángulos rectángulos	190
------------	---	-----

Lección 25	Razones trigonométricas	196
------------	-------------------------	-----

Lección 26	La razón de cambio en un proceso o fenómeno lineal	202
------------	--	-----

Lección 27	Dispersión de un conjunto de datos	210
------------	------------------------------------	-----

Evaluación tipo PISA		216
----------------------	--	-----

Proyecto		218
----------	--	-----

© Nueva México

# Dosificación

Aprendizajes esperados		Eje	Tema	Contenido	Lección	Páginas	Semana
BLOQUE 1	<ul style="list-style-type: none"> <li>Explica la diferencia entre eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.</li> </ul>	Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	<ul style="list-style-type: none"> <li>Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas.</li> </ul>	1. Ecuaciones cuadráticas I	18 - 23	1
		Forma, espacio y medida	Figuras y cuerpos	<ul style="list-style-type: none"> <li>Construcción de figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y análisis de sus propiedades.</li> </ul>	2. Congruencia y semejanza	24 - 31	2
		Manejo de la información	Proporcionalidad y funciones	<ul style="list-style-type: none"> <li>Explicitación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada.</li> </ul>	3. Criterios de congruencia y semejanza de triángulos	32 - 39	3
				<ul style="list-style-type: none"> <li>Análisis de representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas) que corresponden a una misma situación. Identificación de las que corresponden a una relación de proporcionalidad.</li> </ul>	4. Representaciones gráficas, tabulares y algebraicas	40 - 45	4
				<ul style="list-style-type: none"> <li>Representación tabular y algebraica de relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas.</li> </ul>	5. Variación cuadrática	46 - 53	5
		Nociones de probabilidad	<ul style="list-style-type: none"> <li>Conocimiento de la escala de la probabilidad. Análisis de las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes.</li> </ul>	6. Eventos mutuamente excluyentes, complementarios e independientes	54 - 59	6	
		Análisis y representación de datos	<ul style="list-style-type: none"> <li>Diseño de una encuesta o un experimento e identificación de la población en estudio. Discusión sobre las formas de elegir el muestreo. Obtención de datos de una muestra y búsqueda de herramientas convenientes para su presentación.</li> </ul>	7. Diseño de una encuesta	60 - 65	7	
Evaluación tipo PISA							
Proyecto							
BLOQUE 2	<ul style="list-style-type: none"> <li>Explica el tipo de transformación (reflexión, rotación o traslación) que se aplica a una figura para obtener la figura transformada. Identifica las propiedades que se conservan.</li> <li>Resuelve problemas que impliquen el uso del teorema de Pitágoras.</li> </ul>	Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	<ul style="list-style-type: none"> <li>Uso de ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización.</li> </ul>	8. Factorización	74 - 79	8
		Forma, espacio y medida	Figuras y cuerpos	<ul style="list-style-type: none"> <li>Análisis de las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras.</li> </ul>	9. Propiedades de algunas isometrías	80 - 85	9
				<ul style="list-style-type: none"> <li>Construcción de diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras.</li> </ul>	10. Movimientos en el plano	86 - 91	10
			Medida	<ul style="list-style-type: none"> <li>Análisis de las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo.</li> </ul>	11. Relación de áreas en un triángulo rectángulo	92 - 97	11
		Manejo de la información	Nociones de probabilidad	<ul style="list-style-type: none"> <li>Explicitación y uso del teorema de Pitágoras.</li> </ul>	12. Teorema de Pitágoras	98 - 103	12
<ul style="list-style-type: none"> <li>Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios (regla de la suma).</li> </ul>	13. Regla de la suma			104 - 109	13		
Evaluación tipo PISA							
Proyecto							
BLOQUE 3	<ul style="list-style-type: none"> <li>Resuelve problemas que impliquen el uso de ecuaciones de segundo grado.</li> <li>Resuelve problemas de congruencia y semejanza que impliquen utilizar estas propiedades en triángulos o en cualquier figura.</li> </ul>	Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	<ul style="list-style-type: none"> <li>Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas. Aplicación de la fórmula general para resolver dichas ecuaciones.</li> </ul>	14. Ecuaciones cuadráticas II	118 - 123	14
		Forma, espacio y medida	Figuras y cuerpos	<ul style="list-style-type: none"> <li>Aplicación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas.</li> </ul>	15. Semejanza y congruencia	124 - 129	15
				<ul style="list-style-type: none"> <li>Resolución de problemas geométricos mediante el teorema de Tales.</li> </ul>	16. Teorema de Tales	130 - 135	16
				<ul style="list-style-type: none"> <li>Aplicación de la semejanza en la construcción de figuras homotéticas.</li> </ul>	17. Homotecia	136 - 141	17
		Manejo de la información	Proporcionalidad y funciones	<ul style="list-style-type: none"> <li>Lectura y construcción de gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos.</li> </ul>	18. Gráficas de funciones cuadráticas	142 - 147	18
				<ul style="list-style-type: none"> <li>Lectura y construcción de gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera.</li> </ul>	19. Gráficas que modelan movimientos	148 - 153	19
Nociones de probabilidad	<ul style="list-style-type: none"> <li>Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto).</li> </ul>	20. Regla del producto	154 - 159	20			
Evaluación tipo PISA							
Proyecto							

Aprendizajes esperados		Eje	Tema	Contenido	Lección	Páginas	Semana
<b>BLOQUE 4</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Utiliza en casos sencillos expresiones generales cuadráticas para definir el enésimo término de una sucesión.</li> <li>Resuelve problemas que implican el uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.</li> <li>Calcula y explica el significado del rango y la desviación media.</li> </ul>	Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	<ul style="list-style-type: none"> <li>Obtención de una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión.</li> </ul>	21. Regla de una sucesión	168 - 175	21
		Forma, espacio y medida	Figuras y cuerpos	<ul style="list-style-type: none"> <li>Análisis de las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo. Construcción de desarrollos planos de conos y cilindros rectos.</li> </ul>	22. Sólidos de revolución	176 - 183	22
			Medida	<ul style="list-style-type: none"> <li>Análisis de las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente.</li> </ul>	23. Pendiente de una recta	184 - 189	23
				<ul style="list-style-type: none"> <li>Análisis de las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo.</li> </ul>	24. Ángulos agudos y triángulos rectángulos	190 - 195	24
		Manejo de la información	Proporcionalidad y funciones	<ul style="list-style-type: none"> <li>Explicitación y uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.</li> </ul>	25. Razones trigonométricas	196 - 201	25
			<ul style="list-style-type: none"> <li>Cálculo y análisis de la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identificación de la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa.</li> </ul>	26. La razón de cambio en un proceso o fenómeno lineal	202 - 209	26	
		<ul style="list-style-type: none"> <li>Medición de la dispersión de un conjunto de datos mediante el promedio de las distancias de cada dato a la media (desviación media). Análisis de las diferencias de la "desviación media" con el "rango" como medidas de la dispersión.</li> </ul>	27. Dispersión de un conjunto de datos	210 - 215	27		
Evaluación tipo PISA							
Proyecto							
<b>BLOQUE 5</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Resuelve y plantea problemas que involucran ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones y ecuaciones de segundo grado.</li> <li>Resuelve problemas que implican calcular el volumen de cilindros y conos o cualquiera de las variables que intervienen en las fórmulas que se utilicen. Anticipa cómo cambia el volumen al aumentar o disminuir alguna de las dimensiones.</li> <li>Lee y representa, gráfica y algebraicamente, relaciones lineales y cuadráticas.</li> <li>Resuelve problemas que implican calcular la probabilidad de eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.</li> </ul>	Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	<ul style="list-style-type: none"> <li>Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones. Formulación de problemas a partir de una ecuación dada.</li> </ul>	28. Solución de problemas que implican el uso de ecuaciones	224 - 229	28
		Forma, espacio y medida	Medida	<ul style="list-style-type: none"> <li>Análisis de las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto. Cálculo de las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto.</li> </ul>	29. Secciones cónicas	230 - 237	29
				<ul style="list-style-type: none"> <li>Construcción de las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos, tomando como referencia las fórmulas de prismas y pirámides.</li> </ul>	30. Volumen del cono y del cilindro	238 - 243	30
				<ul style="list-style-type: none"> <li>Estimación y cálculo del volumen de cilindros y conos o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas.</li> </ul>	31. Estimación y cálculo del volumen de conos y cilindros rectos	244 - 249	31
		Manejo de la información	Proporcionalidad y funciones	<ul style="list-style-type: none"> <li>Análisis de situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades.</li> </ul>	32. Variación lineal o cuadrática	250 - 257	32
			Nociones de probabilidad	<ul style="list-style-type: none"> <li>Análisis de las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables.</li> </ul>	33. Condiciones para que un juego de azar sea justo	258 - 263	33
		Evaluación tipo PISA					
Proyecto							

# Conoce tu libro

## » Entrada de bloque

En estas dos páginas encontrarás una gran imagen con un texto breve que te explicará la relación entre la imagen y alguno de los contenidos que trabajarás en el bloque.

En la sección **¿Quién fue?**, te presentaremos la biografía de un personaje y sus aportaciones a las matemáticas.

En estas páginas también encontrarás los aprendizajes esperados que adquirirás a lo largo de las lecciones del bloque.

**¿Quién fue?**

**Tales de Mileto**  
Tales de Mileto (siglo VI a.C.) fue un filósofo y matemático griego. Se le atribuye el descubrimiento de la proporcionalidad y la semejanza de triángulos. Su obra más conocida es el tratado de geometría, que se le atribuye haber escrito.

**Aprendizajes esperados**

- Analiza problemas que impliquen el uso de triángulos semejantes.
- Analiza problemas de semejanza y proporcionalidad en triángulos semejantes.

## Lección

Los bloques se componen de un número variable de lecciones. Cada lección trata un contenido diferente.

En cada lección se indica el eje, tema y contenido que será tratado.

Las lecciones se subdividen en tres sesiones numeradas.

Al comienzo de cada una, se plantea un problema en el que debes usar los conocimientos de matemáticas que tienes y las estrategias que has desarrollado en cursos y lecciones anteriores. Conforme avances en cada sesión, adquirirás nuevos recursos mediante la confrontación y validación de resultados.

**Lección 11**

### Relación de áreas en un triángulo rectángulo

**Eje:** Forma, espacio y medida.  
**Tema:** Medida.  
**Contenido:** Análisis de las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo.

**1. Suma del área de cuadrados**

1. Calcula el área de cada uno de los cuadrados que se trazaron sobre los lados de los triángulos.

a) ¿En cuál triángulo las áreas de todos los cuadrados son distintas?

b) ¿En cuál triángulo las áreas de los cuadrados son iguales?

c) ¿Qué relación encuentras entre las áreas de los cuadrados trazados en cada triángulo?

2. Con ayuda de un profesor, revisa tus respuestas.

3. Lee la siguiente información y realicen lo que se les pide.

**Triángulo rectángulo**

El lado de mayor longitud de un triángulo rectángulo se conoce como **hipotenusa**.

Los lados que forman el ángulo de 90° se conocen como **catetos**. El cateto de mayor longitud se denomina como **cateto mayor**, y el de menor longitud como **cateto menor**.

Tracen en su cuaderno un triángulo rectángulo ABC cuyos catetos midan 8 cm y 7 cm, y un triángulo rectángulo DEF con catetos de 4 cm y 7 cm.

En cada triángulo tracen un cuadrado sobre un lado como en los triángulos de la actividad 1.

4. Con ayuda de su profesor, revisen las condiciones que plantearon al final de la actividad 2 y validenlas con la información teórica que se proporciona.

4. Revisa la tarea y responde.

a) ¿Qué criterio es posible utilizar para verificar que los triángulos que trazamos son semejantes? Expliquen.

b) ¿Cómo son los triángulos que obtuvieron? Expliquen.

Analicen sus respuestas y, con ayuda del profesor, concluyan acerca de estas preguntas. Acuerden una conclusión y trácen nota en su cuaderno.

¿Es posible determinar la semejanza de dos triángulos si solo se conoce la medida de dos lados que son proporcionales?

¿Y si solo se conoce la medida de dos ángulos que son correspondientes entre sí?

**Practico**

1. Analiza los pares de figuras y responde en tu cuaderno.

a) ¿Los pares de triángulos son semejantes?  
b) ¿El criterio de semejanza utilizado para analizarlos es el correcto?  
c) Elige un caso en el que los triángulos no sean semejantes. Selecciona un triángulo y traza en tu cuaderno un triángulo semejante a ese con un lado de semejanza 1:5.

En tu cuaderno, traza un triángulo isósceles con los datos que se proporcionan.

• Medida del lado desigual: 5 cm. • Ángulo opuesto al lado desigual: 45°

a) ¿Puede trazarse solo un triángulo?  
b) ¿Es posible construir triángulos semejantes al que trazaron?

## Biblioteca de Aula Escolar

En la sección **BAE** hallarás recomendaciones para consultar títulos de la serie Libros del Rincón, así como sugerencias de actividades en que practicarás y reafirmarás lo que has aprendido en cada lección.

En la sección **Practico** encontrarás ejercicios que deberás resolver de manera individual para que refuerces lo que trabajaste en la sesión.

Al final de cada sesión y de cada lección, hallarás la sección **Tarea**, cuyo propósito es que localices, en algún medio impreso o electrónico, información básica para trabajar en la siguiente sesión. También encontrarás problemas que requerirán que explores nuevos contenidos. En cada tarea se indica dónde debes registrar tus resultados.

**Lección 1**

### Ecuaciones cuadráticas I

**Eje:** Sentido numérico y pensamiento algebraico.  
**Tema:** Ecuaciones e inecuaciones.  
**Contenido:** Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos por completado y operaciones inversas.

**1. Ecuaciones de segundo grado I**

1. Resuelve los problemas y justifica tus respuestas.

a) Antonio y su mamá compran libros el mismo día. En 2015, si la edad de Antonio se eleva al cuadrado se obtiene la edad de su mamá, ella nació en 1979.

- Subraya las expresiones que representan un número al cuadrado.
- Subraya la expresión algebraica que modela el problema.
- ¿Cuál es la edad de Antonio?

b) Carlos y Alfonso son hermanos. Si la edad de Carlos se eleva al cuadrado como resultado 149 años. Si la edad de Alfonso cuadrada se eleva al cuadrado y se le suman 149, el resultado es 394 años.

- Elige las expresiones algebraicas que modelan la edad de Carlos y de Alfonso. Considera que A representa la edad de Alfonso y C la edad de Carlos.
- Subraya las expresiones que representan la edad de Carlos y de Alfonso.
- Subraya la expresión algebraica que modela el problema.
- ¿Cuál es la edad de Alfonso?
- ¿Cuál es la edad de Carlos?

c) Con ayuda de un profesor, revisa tus respuestas.

Consenta con un compañero cómo elegir las expresiones algebraicas y el procedimiento que siguen para resolver.

2. Resuelve los problemas. Si lo consideras necesario usen calculadora. Justifica cada respuesta.

En la sección **BAE** hallarás recomendaciones para consultar títulos de la serie Libros del Rincón, así como sugerencias de actividades en que practicarás y reafirmarás lo que has aprendido en cada lección.

En la sección **Practico** encontrarás ejercicios que deberás resolver de manera individual para que refuerces lo que trabajaste en la sesión.

Al final de cada sesión y de cada lección, hallarás la sección **Tarea**, cuyo propósito es que localices, en algún medio impreso o electrónico, información básica para trabajar en la siguiente sesión. También encontrarás problemas que requerirán que explores nuevos contenidos. En cada tarea se indica dónde debes registrar tus resultados.

**Glosario.** En estas cápsulas se definen algunas palabras que pueden resultar de difícil comprensión.

## Temas de relevancia social

La sección **TRS**, que encontrarás a lo largo del libro, contiene información, recomendaciones y aspectos para reflexionar sobre temas de relevancia social, como equidad de género, educación financiera y educación para la paz, entre otros.

En todas las actividades se incluyen iconos con los que se sugiere la forma de trabajar las actividades.

Trabajo individual

Trabajo en grupo

Trabajo en equipos

Tarea





### Euclides

(alrededor de 330 a. de C.-275 a. de C.)

Matemático griego. Hay pocos datos acerca de su vida, aunque tuvo gran prestigio en la Antigüedad. Se piensa que fue educado en Atenas, ya que tenía un amplio conocimiento de los conceptos de geometría que se enseñaban en la escuela de Platón. Impartió clases en Alejandría, en la época en que dicha ciudad tenía gran relevancia cultural, y logró prestigio como maestro durante el reinado de Tolomeo I Sóter.

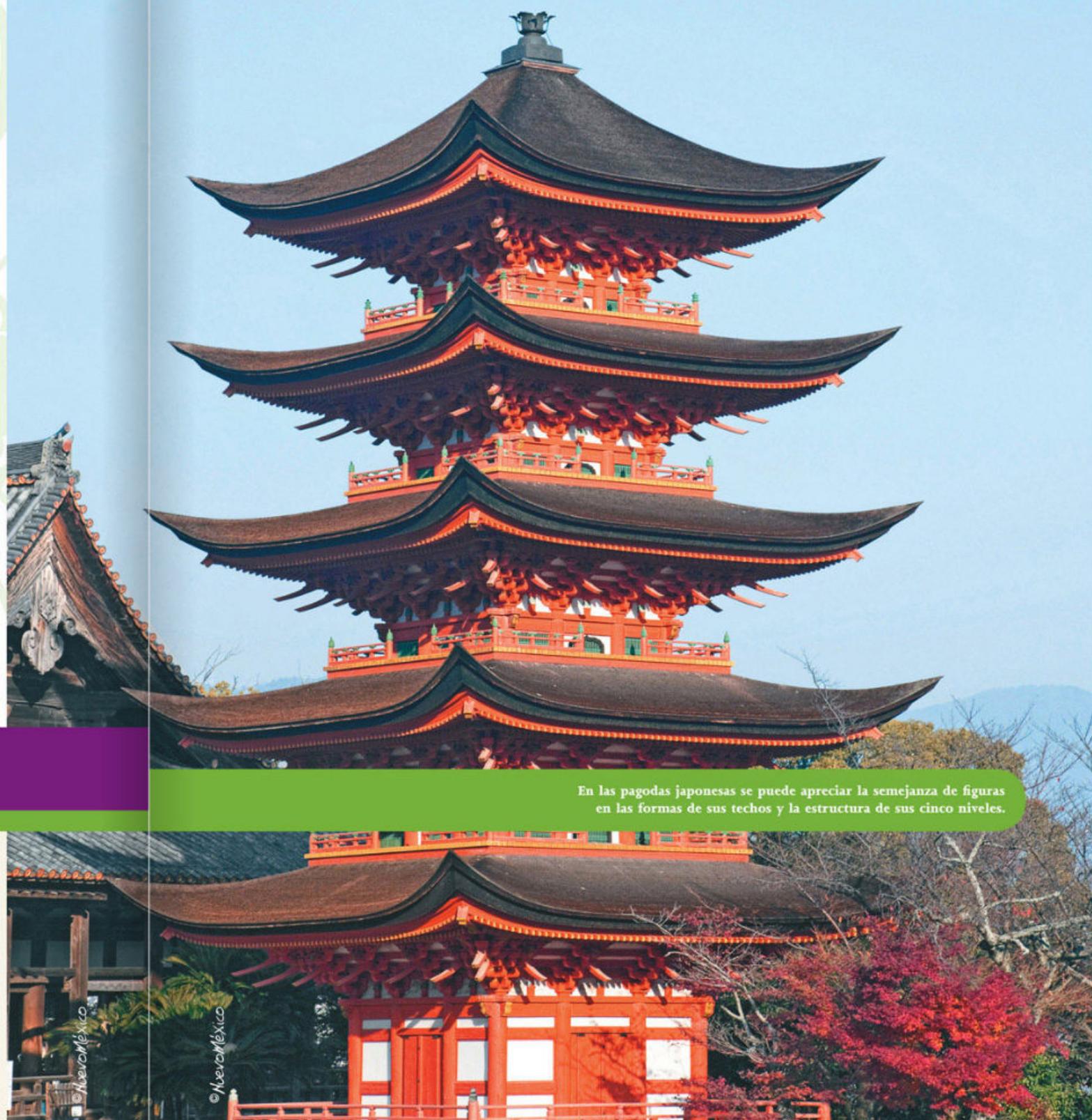
La tradición retrata a Euclides como un hombre amable, dedicado al conocimiento; Juan Estobeo, escritor que compiló anécdotas de los sabios de la época, narra que un estudiante le preguntó a Euclides qué ganaría con su aprendizaje, a lo que este le explicó que la adquisición de un conocimiento es valiosa en sí misma.

Euclides escribió diversos tratados, pero es reconocido por *Los elementos*, que es considerado el libro de texto de geometría más exitoso de la historia, y el cual hasta nuestros días constituye un curso de geometría elemental, además de ser uno de los libros más difundidos. Dicha obra compila numerosos conocimientos de la época. *Los elementos*, incluye trece libros; en los primeros seis se recopilan conocimientos de geometría plana; en el resto, se tratan temas de aritmética, así como geometría de los cuerpos sólidos. Euclides también escribió sobre secciones cónicas (parábolas, elipses e hipérbolas).

## Bloque

### Aprendizajes esperados

- Explica la diferencia entre eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.



En las pagodas japonesas se puede apreciar la semejanza de figuras en las formas de sus techos y la estructura de sus cinco niveles.

# Ecuaciones cuadráticas I

Eje: Sentido numérico y pensamiento algebraico

Tema: Patrones y ecuaciones

Contenido: Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas



## Glosario

**Iluminación.** Se identifica con la literal  $E$  y se define como el flujo luminoso por unidad de superficie. La unidad de medida de la iluminación es el lux (lx).

## TRS

**Atención a la diversidad.** Comparte tus ideas y procedimientos. Escucha respetuosamente las ideas de otros compañeros. De esta manera enriquecerás tu punto de vista, conocerás otras opiniones y mejorarás tus estrategias para resolver problemas.



## 1. Ecuaciones de segundo grado I

### 1. Resuelve los problemas y justifica tus respuestas.

a) Antonio y su mamá cumplen años el mismo día. En 2015, si la edad de Antonio se eleva al cuadrado se obtiene la edad de su mamá. Ella nació en 1979.

• Subraya las expresiones que representan un número al cuadrado.

- i.  $xx$       ii.  $2x$       iii.  $x^2$       iv.  $x + x$

• Subraya la expresión algebraica que modela el problema.

- i.  $\sqrt{x^2} = 36$       ii.  $x^2 = \sqrt{36}$       iii.  $x^2 = 36$       iv.  $\sqrt{x^2} = \sqrt{36}$

• ¿Cuál es la edad de Antonio? \_\_\_\_\_

b) Carlos y Alfonsina son hermanos. Si la edad de Carlos se eleva al cuadrado da como resultado 169 años. Si la edad de Alfonsina también se eleva al cuadrado y se le suman 169, el resultado es 394 años.

• Elige las expresiones algebraicas que modelan la edad de Carlos y de Alfonsina. Considera que  $A$  representa la edad de Alfonsina y  $C$  la edad de Carlos.

- i.  $C = \sqrt{169}$       ii.  $C^2 = 169$       iii.  $C^2 = 169$       iv.  $C = \sqrt{169}$   
 $A = \sqrt{394}$        $A = 394 - 169$        $A^2 = 394 - 169$        $A = \sqrt{394 - 169}$

• ¿Cuál es la edad de Alfonsina? \_\_\_\_\_

• ¿Cuál es la edad de Carlos? \_\_\_\_\_

■ Comenta con un compañero cómo elegiste las expresiones algebraicas y el procedimiento que seguiste para resolverlas.

### 2. Resuelvan los problemas. Si lo consideran necesario, usen calculadora. Justifiquen cada respuesta.

• Érick es ingeniero eléctrico y empleado de una empresa que se dedica a la **iluminación** de diferentes espacios. Actualmente trabaja en un proyecto para alumbrar un parque.

© Nueva México

Una de las expresiones matemáticas que utiliza para desarrollar su trabajo es:

$$E = \frac{I}{R^2}$$

$E$  es la iluminación y se mide en **lux** (lx);  $I$  es la intensidad luminosa, es decir, la cantidad de **flujo luminoso**, y se mide en candelas (cd);  $R^2$  es el área iluminada y se mide en metros cuadrados ( $m^2$ ) y  $R$  es la distancia desde la fuente luminosa hasta la superficie iluminada, es decir, la altura, y se mide en metros (m).

Consideren que 1 lumen (lm) = 1 candela (cd).

Las áreas del parque que se alumbrarán son la de corredores, de juegos, el quiosco y el estacionamiento.

a) Para el área del quiosco, colocarán lámparas a una altura ( $R$ ) de 4 m, con una intensidad luminosa ( $I$ ) de 7 200 cd, cada una.

• ¿Cuál es el área ( $R^2$ ) que iluminará cada lámpara? \_\_\_\_\_

• ¿Cuál es la iluminación ( $E$ ) de cada lámpara? \_\_\_\_\_

b) En el área de corredores, las lámparas se instalarán a 3 m de altura ( $R$ ) y darán una iluminación ( $E$ ) de 330 lx, cada una.

• ¿Cuál es el área ( $R^2$ ) que iluminará cada lámpara? \_\_\_\_\_

• ¿Cuál es la intensidad luminosa ( $I$ ) de cada una? \_\_\_\_\_

c) Para el área de estacionamiento, se colocarán lámparas que pueden alumbrar un área ( $R^2$ ) de  $49 m^2$  y darán una iluminación ( $E$ ) de 119 lx, cada una:

• ¿Cuál es la intensidad luminosa ( $I$ ) de cada lámpara? \_\_\_\_\_

• ¿Cuál es la altura ( $R$ ) a la que se encuentra cada lámpara? \_\_\_\_\_

d) En el área de juegos, utilizarán lámparas que darán una iluminación ( $E$ ) de 280 lx y una intensidad luminosa ( $I$ ) de 18 000 cd.

• ¿Cuántos metros cuadrados ( $R^2$ ) alumbrará cada lámpara? \_\_\_\_\_

• ¿A qué altura ( $R$ ) colocarán cada una? \_\_\_\_\_

• Comenten sus respuestas y, con la guía del profesor, expliquen cómo resolvieron los problemas de los puntos 1 y 2.

### 3. Analicen las estrategias aplicadas en los problemas y respondan.

a) ¿Qué característica en común tienen las expresiones algebraicas que modelan los problemas? \_\_\_\_\_

b) Si la operación inversa de la suma es la resta y la de la multiplicación es la división, ¿cuál es la operación inversa de la raíz cuadrada? \_\_\_\_\_

c) ¿Qué operación inversa se utiliza para determinar el valor de la literal en cada uno de los siguientes casos?

- $5 - x = 18$       •  $900 = 75x$       •  $144 = x^2$       •  $\sqrt{x} = 5$

© Nueva México

## Glosario



**lux.** Es igual al cociente de un lumen entre un metro cuadrado.

**flujo luminoso.** Es la potencia emitida por una fuente luminosa; su unidad de medida es el lumen (lm).



Si la raíz cuadrada de un número también se puede escribir como  $r^{\frac{1}{2}}$ , ¿qué operación se realiza si esta se eleva al cuadrado, es decir,  $(r^{\frac{1}{2}})^2$ ? ¿cuál es el resultado de dicha operación? \_\_\_\_\_

- Validen las respuestas de los incisos anteriores y comenten si usaron operaciones inversas para resolver los problemas.



### Analiza y resuelve las operaciones.

Determina el valor de la literal en cada caso.

- |                           |                            |
|---------------------------|----------------------------|
| a) $x^{\frac{1}{2}} = 8$  | d) $101 = t^2 + 1$         |
| b) $\sqrt{72} = \sqrt{m}$ | e) $256 = 8\sqrt{8x}$      |
| c) $256 = 8\sqrt{r}$      | f) $19c^2 + 5 = 3c^2 + 69$ |

Escribe en tu cuaderno el procedimiento que seguiste.

## 2. Ecuaciones de segundo grado II



1. Escribe la expresión algebraica que modela cada situación y resuelve.

- Cuando un número se eleva al cuadrado, después se triplica y posteriormente se le suma 5, el resultado es 680.
  - Expresión algebraica que modela la situación: \_\_\_\_\_
  - ¿De qué número se trata? \_\_\_\_\_
- Si un número se eleva al cuadrado y se duplica su valor, el número que se obtiene es 5 000.
  - Expresión algebraica que modela la situación: \_\_\_\_\_
  - ¿De qué número se trata? \_\_\_\_\_
- Un número se eleva al cuadrado, después se cuadruplica, posteriormente, se le suma el mismo número y se obtiene como resultado 264.
  - Expresión algebraica que modela la situación: \_\_\_\_\_
  - ¿De qué número se trata? \_\_\_\_\_

- Compara tus respuestas y procedimientos con los de un compañero.

2. Revisen sus resultados y contesten lo siguiente en su cuaderno.

- ¿Los tres problemas se modelan mediante una ecuación en la que alguno de sus términos se encuentre elevado al cuadrado?
- ¿Qué diferencias hay entre las ecuaciones que modelan los problemas anteriores?
- ¿Qué operaciones inversas son necesarias para resolverlos?

- Comenten sus respuestas y, con ayuda del profesor, concluyan. Si es necesario, corrijan.

### 3. Resuelvan el problema.

Jesús adquirió una casa que tiene un jardín con forma de triángulo rectángulo. Se sabe que el área del jardín es de 42 m<sup>2</sup> y que la altura tiene 5 m más que la base.

a) ¿Cuál de los siguientes razonamientos relaciona la información del problema con la fórmula para calcular el área del triángulo?

- |  |   |  |
|--|---|--|
| i. $b = h + 5$<br>$a = \frac{b(h + 5)}{2}$ | ii. $b = h - 5$<br>$a = \frac{b(h - 5)}{2}$ | iii. $b = h - 5$<br>$a = \frac{b(b + 5)}{2}$ |
|--|---|--|

- ¿Algunos de los términos de la expresión algebraica se encuentran elevados al cuadrado? \_\_\_\_\_
- Dada la expresión algebraica, ¿con cuál de los procedimientos es posible resolverla: mediante tanteo u operaciones inversas? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es la medida de la altura y de la base? \_\_\_\_\_

- Justifiquen su procedimiento y validenlo con la ayuda del profesor.

### Practica

1. Resuelve los siguientes ejercicios. Una vez que concluyas, compara tus resultados con los del resto del grupo.

- |                          |                                   |  |
|--------------------------|-----------------------------------|--|
| a) $x^2 + 8 = 33 - 3x^2$ | c) $-101 + 10t^2 = t^2 - 1$       | e) $\sqrt{72} = \sqrt{m} + 3$            |
| b) $256 = \sqrt{r} + 8$  | d) $4\sqrt{81y} = 10 + 2\sqrt{y}$ | f) $19c^2 + \sqrt{5} = 3c^2 + \sqrt{69}$ |

### Analicen lo que se solicita y respondan en su cuaderno.

- Elijan un ejercicio de los que resolvieron en la sección "Practica" y escriban un problema que pueda modelarse con él.
- Anoten lo que entienden por *ecuación de segundo grado* o *ecuación cuadrática* y escriban tres expresiones algebraicas, de las trabajadas en la lección, que representen dichas ecuaciones.

4. Revisen su tarea y, con la supervisión del profesor, validen sus resultados y respondan.

- ¿Qué expresiones algebraicas están elevadas al cuadrado?
- ¿En qué se diferencian las expresiones de los incisos a y c?
- Si la expresión *f* se simplifica, ¿en qué se diferencia respecto de la del inciso b, es decir, qué operaciones tiene cada una en ambos miembros de la igualdad?

- Para cada caso, ¿con qué operación inversa se pueden resolver?



TIC

Entra a:

<http://www.telesecundaria.sep.gob.mx/>

Elige "Materiales Educativos Audio-visuales", haz clic en "TERCER GRADO" y después selecciona la opción "Matemáticas III". En la barra derecha escoge "Bloque 2" y busca en la barra de títulos el recurso "Ecuación cuadráticas" ahí podrás ver el video explicativo para consolidar lo que se estudió en la lección. (consulta: 22 de diciembre de 2016, 11:50 horas)



### 3. Ecuaciones de segundo grado III



1. Discutan y resuelvan los problemas. Justifiquen sus respuestas.

a) Joaquín pinta al óleo y piensa vender sus obras para abrir una cuenta de ahorro. Acaba de concluir una obra de dos piezas, con diferente área, que se muestran a la izquierda; ambas tienen la misma altura. Se sabe que la medida del área que ocupan ambas piezas es de  $12 \text{ m}^2$  y que el área de la pieza rectangular es de  $3 \text{ m}^2$ .

• Subraya la expresión algebraica que modela la suma de las áreas de ambas piezas.

- i.  $12 = 3 - x^2$                       ii.  $x^2 - 3 = 12$   
 iii.  $x^2 + 3 = 12$                       iv.  $x^2 = 12 \times 3$

• ¿Cuál es el perímetro de cada pieza? \_\_\_\_\_

b) Las pinturas que se muestran a la izquierda también son obra de Joaquín. Las piezas tienen las siguientes características:

- i. Ambas tienen la misma altura.  
 ii. En la pieza rectangular el ancho es  $0.5 \text{ m}$  menor que la altura.  
 iii. El área total de ambas piezas es de  $7 \text{ m}^2$ .

• Si  $c$  representa la medida del lado del cuadrado, ¿qué expresión algebraica modela el área de la pieza cuadrada? \_\_\_\_\_

• Elige la expresión algebraica que modela el área de la pieza rectangular.

- i.  $c(c - 0.5) = c - 5c$                       ii.  $c(c - 0.5) = 2c - 0.5$   
 iii.  $c(c - 0.5) = c^2 - 0.5$                       iv.  $c(c - 0.5) = c^2 - 0.5c$

• ¿Cuál es el perímetro de cada pieza? \_\_\_\_\_

■ Con la ayuda de su profesor revisen y justifiquen cómo resolvieron los problemas.

2. Respondan en el cuaderno.

- a) En el problema del inciso a se proporciona la medida del área de la pieza rectangular y el área total de ambas piezas. ¿Qué operación inversa permite obtener la medida del lado del cuadrado?  
 b) En el inciso b, a partir de la expresión que modela el área de la pieza cuadrada es posible obtener la expresión del área de la pieza rectangular. ¿Qué expresión algebraica modela el área de ambas piezas?

- i.  $2c^2 - c = 7$     ii.  $2c^2 - 5c = 7$     iii.  $2c^2 - 0.5c = 7$     iv.  $c^2 - 0.5c = 7$

c) ¿Es válido resolver la ecuación anterior mediante tanteo? Expliquen por qué.



**Educación financiera.** El ahorro consiste en guardar una cantidad, preferentemente fija, que puedes incrementar en la medida en que reduzcas gastos innecesarios. Este hábito te ayudará a alcanzar metas a corto y mediano plazo o a crear un fondo para emergencias.



3. Expongan el resultado de su tarea y justifiquen sus respuestas.



- a) Comparen los problemas que plantearon y analicen si se modelan mediante la expresión algebraica que eligieron.  
 b) Comparen la siguiente información con el concepto que escribieron. Si lo consideran necesario complementen su trabajo.

### Ecuación de segundo grado o ecuación cuadrática

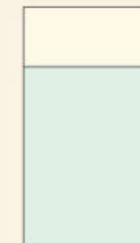
En estas ecuaciones, uno de los términos tiene una literal elevada al cuadrado y este término tiene el mayor exponente. Una ecuación cuadrática con todos sus elementos se escribe  $Ax^2 + Bx + C = 0$ ; puede faltar el término lineal  $Bx$  o el término independiente  $C$ , pero no puede faltar el término  $Ax^2$ , por lo que el coeficiente  $A$  tiene que ser diferente de cero y puede ser un número positivo o negativo.

- c) En su cuaderno, escriban una ecuación cuadrática que modele un problema y obtengan el resultado describiendo su procedimiento.  
 ■ Revisen los problemas y procedimientos que aplicaron y, con ayuda del profesor, válidenlos.

### Validemos lo aprendido

1. Analiza el problema y responde en tu cuaderno.

La imagen del lado derecho muestra la forma de un terreno que tiene un área de  $192 \text{ m}^2$ , donde la medida del largo es tres veces la medida del ancho; de la sección azul se sabe que su largo es  $\frac{3}{4}$  el largo de todo el terreno.



- a) ¿Cuál es la expresión algebraica que modela el área total del terreno?  
 b) ¿Cuál es la expresión algebraica que modela el área de la sección verde?  
 c) ¿Cuáles son las dimensiones de largo y ancho de todo el terreno?

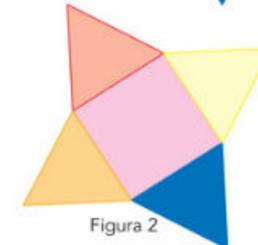
Analicen y resuelvan el problema.

Roberto le ayuda a su hermana Paola a elaborar algunos desarrollos planos, como los que se muestran en las figuras 1 y 2. Roberto le pregunta a Paola cuál es el criterio para elaborarlos. Ella le responde que deben ser iguales entre sí.

Figura 1



Figura 2



- a) ¿Los desarrollos planos cumplen con el criterio de Paola?  
 b) ¿Qué entiendes por que sean iguales?



**Educación en valores.** La colaboración y el apoyo en la realización de las tareas fomenta los valores de unión y solidaridad entre los miembros de la familia y de la comunidad.

# Congruencia y semejanza

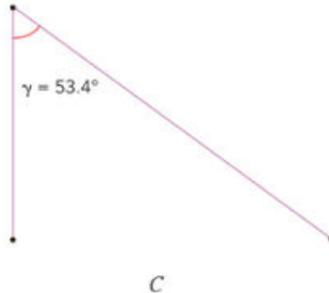
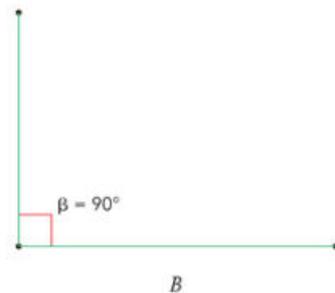
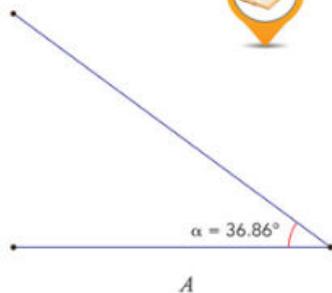
Eje: Forma, espacio y medida

Tema: Figuras y cuerpos

Contenido: Construcción de figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y análisis de sus propiedades

## 1. Congruencia

1. Completa los triángulos de acuerdo con los datos que se proporcionan.



### Glosario

**ángulos homólogos.** Son aquellos que, dadas dos figuras, ocupan la misma posición relativa.

$\alpha$  (alfa),  $\beta$  (beta),  $\gamma$  (gama),  $\delta$  (delta),  $\epsilon$  (épsilon) y  $\varphi$  (fi), entre otras más. Letras del alfabeto griego que se utilizan en geometría para indicar ángulos.

- ¿Qué tipo de triángulos construiste? \_\_\_\_\_
- Ubica en los triángulos B y C los **ángulos homólogos** a  $\alpha$ . Llámalos  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ . Mide los ángulos y compáralos. ¿Cómo son los tres ángulos? \_\_\_\_\_
- Ubica los ángulos homólogos a  $\gamma$  en los triángulos A y B. Llámalos  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$ . ¿Cómo son las medidas de los tres ángulos? \_\_\_\_\_
- Compara las medidas de los lados de los triángulos. ¿Cómo son los lados de los tres triángulos? \_\_\_\_\_
- ¿Cómo son los triángulos que construiste? \_\_\_\_\_

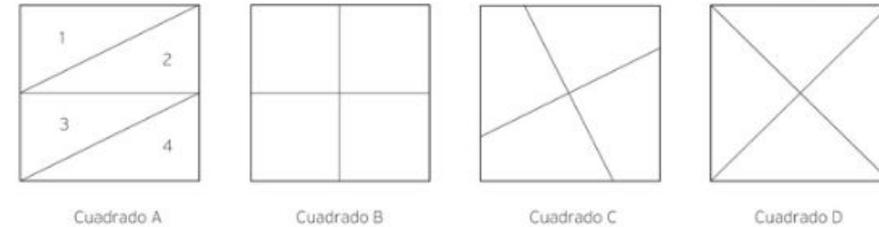
2. En tu cuaderno, traza los siguientes triángulos.

- Triángulo ABC: 7 cm, 12.2 cm y un ángulo de  $55^\circ$
- Triángulo DEF: 10 cm, 12.2 cm y un ángulo de  $35^\circ$
- Triángulo GHI: 10 cm, 7 cm y un ángulo de  $90^\circ$

- ¿Cómo son los ángulos internos de los tres triángulos? \_\_\_\_\_
  - ¿Cómo son sus lados? \_\_\_\_\_
  - ¿Cómo son los triángulos que trazaste? \_\_\_\_\_
- De acuerdo con el análisis de los dos casos anteriores, ¿qué datos permiten comprobar que dos o más figuras son iguales?

© Nueva México

3. Analicen las figuras que se forman en el interior del cuadrado A, completen la tabla y respondan.



Polígonos que se forman en el interior del cuadrado A			
Figura	Tipo de polígono	Medida de los ángulos internos	Medida de los lados
1			
2			
3			
4			

- En su cuaderno, hagan una tabla como la anterior para analizar las figuras que se formaron en el interior de los otros cuadrados.
  - ¿Cómo son las figuras que se formaron al dividir cada cuadrado? \_\_\_\_\_
- ¿Qué características deben tener dos o más figuras para afirmar que son iguales? \_\_\_\_\_
  - Comparen su respuesta con la siguiente información. Compléntenla si lo consideran necesario.

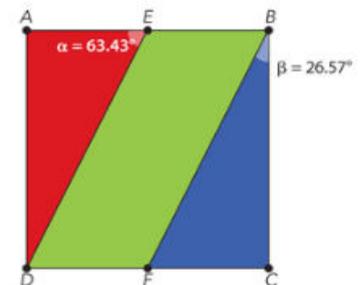
### Figuras congruentes

Dos figuras son congruentes cuando la medida de sus lados y ángulos son las mismas. El símbolo que indica que dos figuras son congruentes es  $\cong$ .

4. En su cuaderno, construyan una figura congruente a la que se muestra del lado derecho.

Consideren que en el cuadrado ABCD, E es el punto medio de AB y F es el punto medio de DC.

- ¿Los triángulos ADE y BCF son congruentes? Sustenten su respuesta con argumentos geométricos.
- Si se traza el segmento de recta DB, ¿los triángulos DBF y BED son congruentes? Argumenten geoméricamente.
- Argumenten por qué su construcción es congruente con la que se muestra en el libro.





5. Revisen su tarea y comenten si los desarrollos planos son congruentes. Argumenten geoméricamente.



Haz en tu cuaderno lo que se solicita.

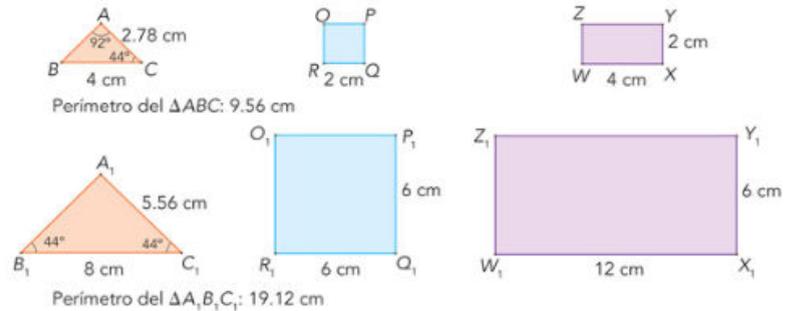
- Escribe qué entiendes por semejanza.
- ¿Es posible construir dos triángulos cuyos ángulos internos sean iguales, pero que las medidas de sus lados sean diferentes?
- Realiza las construcciones posibles.

Para la siguiente clase, trae tu juego de geometría.

## 2. Semejanza



1. Analicen las figuras y, con base en la información que se proporciona, determinen si son semejantes. Respondan las preguntas y justifiquen sus respuestas.



- Analicen la pareja de triángulos y respondan.
  - ¿Cuánto mide el lado  $AB$  del  $\Delta ABC$ ? \_\_\_\_\_
  - ¿Cuánto mide el lado  $A_1B_1$  del  $\Delta A_1B_1C_1$ ? \_\_\_\_\_
  - ¿Cómo es la medida de cualquiera de los lados del  $\Delta A_1B_1C_1$  con respecto a la medida de sus correspondientes en el  $\Delta ABC$ ? \_\_\_\_\_
  - Establezcan si la medida del lado  $AC$  del  $\Delta ABC$  es proporcional a la medida del lado  $A_1C_1$  del  $\Delta A_1B_1C_1$ . Justifiquen. \_\_\_\_\_
  - Determinen si los ángulos internos de  $\Delta ABC$  y  $\Delta A_1B_1C_1$  son iguales, respectivamente. Argumenten. \_\_\_\_\_
- Escriban las razones de la medida de los lados de los cuadrados  $OPQR$  y  $O_1P_1Q_1R_1$  y determinen si son proporcionales.

$$\frac{O_1P_1}{OP} =$$

$$\frac{P_1Q_1}{PQ} =$$

$$\frac{Q_1R_1}{QR} =$$

$$\frac{R_1O_1}{RO} =$$

© Nueva México

- ¿Cómo es el cociente de las medidas de las longitudes de los lados de los cuadrados  $OPQR$  y  $O_1P_1Q_1R_1$ ? \_\_\_\_\_
- Escriban las razones de la medida de los lados de los rectángulos  $WXYZ$  y  $W_1X_1Y_1Z_1$ . Determinen si son proporcionales. Argumenten. \_\_\_\_\_
  - En grupo, analicen la siguiente información:

## Figuras semejantes



Se dice que dos figuras son semejantes cuando:

La medida de sus ángulos internos se conserva.

Las medidas de sus lados correspondientes son proporcionales.

A la relación proporcional que hay entre dos lados correspondientes de dos figuras semejantes se le conoce como **razón de semejanza**.

El símbolo para identificar que dos figuras son semejantes es  $\sim$ .

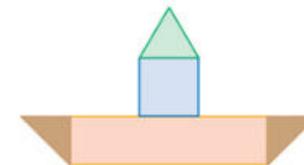
- Con base en la información anterior, determinen si el par de triángulos son semejantes; hagan lo mismo para los cuadrados y los rectángulos. Argumenten sus respuestas.

2. Revisen su tarea y, con ayuda del profesor, respondan.

- Comparen su definición de semejanza con la del recuadro anterior; si es necesario, complementen la suya.
- Revisen sus construcciones y, con base en lo trabajado en la sesión, argumenten qué condiciones cumplen estas para determinar si son semejantes o congruentes.

3. Haz lo que se solicita y responde las preguntas. Justificalas.

Traza en tu cuaderno tres figuras, como la que se muestra, con las siguientes razones de semejanza:  $\frac{6}{8}$ ,  $\frac{5}{5}$  y  $\frac{3}{2}$ .



- ¿En qué caso se obtuvo una figura congruente? Argumenta. \_\_\_\_\_
- Comparte tu trabajo con tus compañeros y comenta tus respuestas. Con ayuda del profesor, lleguen a acuerdos.

© Nueva México



4. Analicen el siguiente problema y realicen lo que se pide.

Un fotomural es una fotografía de grandes dimensiones que se imprime en vinilo adhesivo y se usa para decorar interiores.

En la tabla se muestra la medida estándar de una fotografía y las opciones de tamaños en que esta puede reproducirse. Analicen los datos y complétenla.

Fotografía	Estándar	Opción A	Opción B	Opción C	Opción D
Largo (cm)	10		100		
Ancho (cm)	15	135		240	375

a) Establezcan la razón de semejanza de cada opción.

Opción A: \_\_\_\_\_

Opción B: \_\_\_\_\_

Opción C: \_\_\_\_\_

Opción D: \_\_\_\_\_

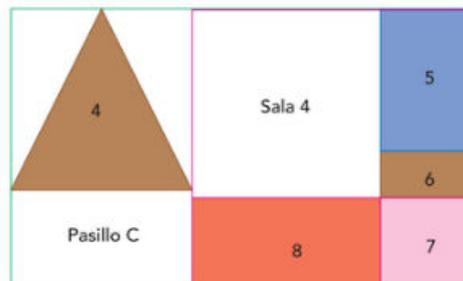
b) Escriban las medidas del largo y ancho de un fotomural que se imprimió con razón de semejanza de 17.2. \_\_\_\_\_

■ En grupo, revisen sus resultados, comenten sus procedimientos y corrijan si es necesario.

### Practica

1. Analiza el esquema, haz lo que se solicita y responde las preguntas. El esquema que se muestra representa la sala de un museo.

a) Reproduce en tu cuaderno el esquema con razón de semejanza de  $\frac{9}{4}$ .



b) ¿Las figuras resultantes serían de menor, igual o mayor tamaño? \_\_\_\_\_

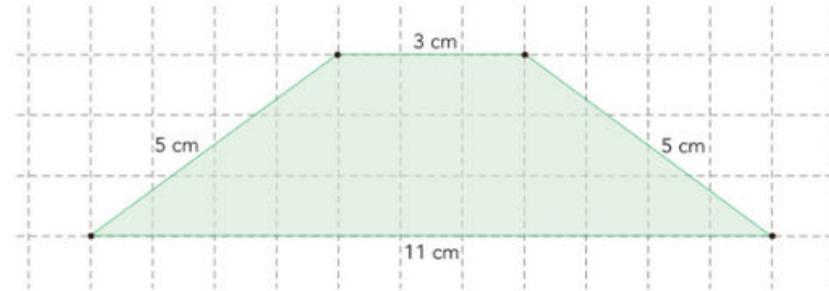
© Nueva México

c) Argumenten por qué son semejantes. \_\_\_\_\_

d) ¿Los rectángulos 5 y 8 son semejantes? \_\_\_\_\_

■ Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Valídalas con ayuda del profesor.

2. Traza un trapecio isósceles semejante al que se muestra, con razón de semejanza de  $\frac{1}{4}$ .



a) ¿Cómo es la medida de los ángulos internos de los trapecios? \_\_\_\_\_

b) Si se desea construir un trapecio semejante a los anteriores, pero cuya base mayor mida 38.5 cm, ¿cuál es la razón de semejanza que debe aplicarse? \_\_\_\_\_

c) ¿Cuáles serían las medidas de sus lados? \_\_\_\_\_

■ Compara tus respuestas y procedimientos con los de tus compañeros.

Analiza y resuelve el problema. Justifica tus respuestas y escríbelas en tu cuaderno.

Guadalupe proyecta una sombra al colocarse a un costado del poste de un reloj de sol. Si quiere conocer la distancia que hay desde la punta de su cabeza hasta el punto donde termina la sombra, ¿qué cálculos debe hacer? Considera que Guadalupe mide 1.55 m y el poste tiene 30 cm de altura.



a) Observa los trazos de la derecha en los que se indican las medidas de la sombra que proyecta el reloj y resuelve.

Sombra proyectada por Guadalupe.





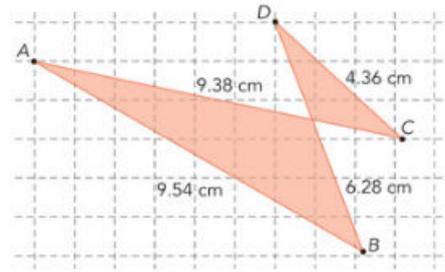
TIC

Entra al sitio:  
<http://www.telesecundaria.sep.gob.mx/>  
 Elige "Materiales Educativos Audiovisuales", haz clic en "TERCER GRADO" y después selecciona la opción "Matemáticas III". En la barra derecha escoge "Bloque 2" y busca en la barra de títulos el recurso "Polígonos semejantes", ahí podrás ver el video explicativo para consolidar lo estudiado en la lección. (consulta: 22 de diciembre de 2016, 12:00 horas)



### 3. Congruencia y semejanza

- En el cuaderno, hagan los trazos que se indican.
  - Dos triángulos equiláteros congruentes.
  - Dos polígonos irregulares congruentes, cuya medida de uno de sus lados sea 12 cm.
  - Dos pentágonos semejantes con razón de semejanza  $\frac{3}{5}$ .
  - Tracen una figura semejante a la dada con razón de semejanza 2.4.



- Tracen otra figura semejante a la anterior, cuya medida del lado  $AB$  sea 3.18 cm.
- Establezcan la razón de semejanza y determinen la medida de los lados de la figura resultante. Revisen en grupo sus construcciones, argumenten si cumplen con las condiciones solicitadas. Corrijan si lo consideran necesario.

- Valida la veracidad de las afirmaciones. En caso de que sean falsas, escribe la propuesta que las haga verdaderas.

	F o V	Propuesta
Dos figuras semejantes también son congruentes.		
Dos figuras que son congruentes también son semejantes.		
Dadas dos figuras semejantes, estas tienen ángulos internos correspondientes de igual medida y lados correspondientes proporcionales.		
Dos figuras congruentes tienen lados correspondientes de igual medida, pero la medida de los ángulos internos es diferente.		

© Nueva México



- Expongan el resultado de su tarea, justifiquen sus respuestas.

- ¿Cómo son los triángulos que modelan la situación: congruentes o semejantes? \_\_\_\_\_
  - ¿Cuál es la razón de semejanza entre los lados correspondientes de ambas figuras? \_\_\_\_\_
  - Mencionen las medidas que obtuvieron y el procedimiento que emplearon para obtenerlas. \_\_\_\_\_
- Con ayuda de su profesor validen sus procedimientos. Redacten un procedimiento para construir figuras semejantes y congruentes.

### Validemos lo aprendido

- Realiza lo que se pide. Al terminar comparte tus resultados con tus compañeros para validar tus respuestas.

- ¿Un triángulo con un ángulo de  $35^\circ$  y otro de  $45^\circ$  es semejante a otro triángulo con un ángulo de  $35^\circ$  y otro de  $100^\circ$ ? Trázalos y comprueba tu respuesta.
- ¿Un triángulo cuyas medidas de sus lados son 11 cm, 12 cm y 16.2 cm es semejante a otro cuyos lados miden 46.2 cm, 50.4 cm y 68.04 cm? Validen su respuesta. \_\_\_\_\_

### En tu cuaderno, resuelve el problema. Argumenta tus respuestas.

Como parte de una tarea, Antonio debe hacer cuatro triángulos congruentes con las siguientes características:

- Que sean triángulos rectángulos.
- Que dos de sus ángulos midan  $45^\circ$ .

Con la información que cuenta Antonio:

- ¿Es posible trazar cuatro triángulos congruentes?
- ¿Qué información podría asegurar que los triángulos que tracen todos los alumnos del grupo de Antonio sean congruentes?



© Nueva México

# Criterios de congruencia y semejanza de triángulos

Eje: Forma, espacio y medida

Tema: Figuras y cuerpos

Contenido: Explicación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada



## 1. Criterios de congruencia

- Utiliza tu juego de geometría, haz los trazos y resuelve el problema en tu cuaderno. Justifica cada respuesta.

Ramón es herrero y le encargaron construir varios columpios. Para calcular sus costos, hizo un esquema como el de la imagen de la izquierda, se lo entregó a Joaquín, su ayudante, y le dijo:

- Para cada columpio necesitamos dos estructuras triangulares  $ABC$  y  $DEF$  reforzadas, con las mismas medidas.
- Cada estructura triangular debe tener al menos dos barras a manera de refuerzos (como los segmentos  $KL$  y  $MN$  en el  $\Delta ABC$ ).

- De acuerdo con la descripción de Ramón, ¿cómo son entre sí los triángulos  $ABC$  y  $DEF$ ?
- ¿Cómo es la medida de los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$ ?
- Se sabe que el  $\Delta ABC$  y el  $\Delta DEF$  tienen dos lados congruentes y el ángulo comprendido entre ellos también es congruente; por tanto, ¿podemos decir que  $\Delta ABC$  y  $\Delta DEF$  son congruentes? Sustenta.

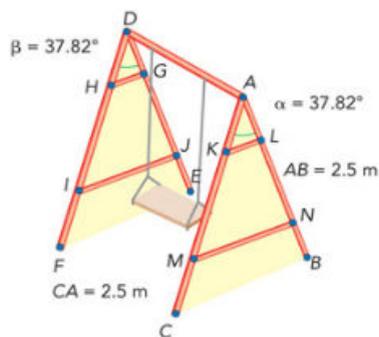
Joaquín le aseguró a Ramón que las estructuras triangulares  $ABC$  y  $DEF$  son congruentes. Subraya los argumentos que puede usar Joaquín para sustentar la congruencia.

- Tienen los tres lados congruentes o iguales.
- Tienen los tres ángulos internos correspondientes congruentes.
- Tienen dos lados congruentes.
- Tienen dos ángulos congruentes y un lado congruente.
- Tienen dos lados congruentes y el ángulo entre estos lados es congruente.
- Tienen un ángulo y un lado congruente.
- Su razón de semejanza es mayor que 1.

- ¿Cuál de los argumentos anteriores no es suficiente para afirmar que dos triángulos son congruentes?
- Escribe una condición que permita asegurar que dos triángulos son congruentes.

- Socialicen sus argumentos y, en grupo, verifiquen que sus respuestas sean correctas.

Diagrama geométrico



- Hagan los trazos de manera individual en su cuaderno. Luego analícenlos en parejas y respondan.

- Tracen el  $\Delta ABC$  cuyas medidas son 16 cm, 17.5 cm y 12.5 cm.
  - Comparen sus  $\Delta ABC$ . ¿Cómo son entre sí? \_\_\_\_\_
  - Si se compararan todos los  $\Delta ABC$  trazados en el salón, ¿cómo serían? \_\_\_\_\_
  - ¿Es posible construir dos triángulos congruentes si se conoce la medida de sus tres lados? Expliquen. \_\_\_\_\_

- Tracen el  $\Delta DEF$  que tiene un lado de 20 cm y otro de 16 cm, y el ángulo entre ellos es de  $60^\circ$ .
  - Comparen sus  $\Delta DEF$ . ¿Cómo son entre sí? \_\_\_\_\_
  - Si se compararan con todos los triángulos  $DEF$  trazados en el salón, ¿cómo serían? \_\_\_\_\_
  - ¿Es posible construir dos triángulos congruentes si se conoce la medida de dos de sus lados y el ángulo comprendido entre estos? Expliquen. \_\_\_\_\_

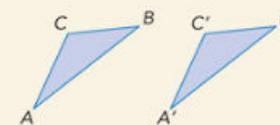
- Tracen el  $\Delta GHI$ , que tiene un ángulo de  $130^\circ$  y otro de  $15^\circ$ . El lado entre ellos mide 12 cm.
  - Comparen sus triángulos y expliquen cómo son entre sí. \_\_\_\_\_
  - Argumenten si una manera de construir dos triángulos congruentes es conocer la medida de dos de sus ángulos y la de uno de sus lados. \_\_\_\_\_

- Con la guía de su profesor, compartan sus explicaciones. Enuncien reglas según lo que observaron en cada caso sobre la información para construir triángulos congruentes.

- Lean la información y hagan lo que se indica.

## Criterios de congruencia de triángulos

**Lado-lado-lado (LLL).** Dos triángulos son congruentes cuando los tres lados del primero son congruentes con los tres lados del segundo. Para indicar esta relación se usa el símbolo  $\cong$ , que significa "congruente". Por ejemplo, en los triángulos de la derecha:



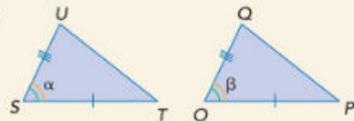
$$AB \cong A'B', BC \cong B'C' \text{ y } CA \cong C'A'$$



## Criterios de congruencia de triángulos

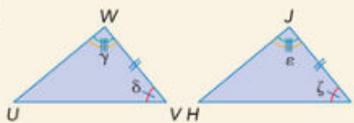
**Lado-ángulo-lado (LAL).** Dos triángulos son congruentes cuando dos lados de uno y el ángulo comprendido entre estos son congruentes con los lados y ángulos correspondientes de un segundo triángulo.

$\Delta STU \cong \Delta OPQ$ , ya que  $SU \cong OQ$ ;  $ST \cong OP$ , y  $\alpha \cong \beta$ .



**Ángulo-lado-ángulo (ALA).** Dos triángulos son congruentes cuando la medida de dos ángulos y el lado comprendido entre estos es congruente con dos ángulos y el lado comprendido entre estos en un segundo triángulo.

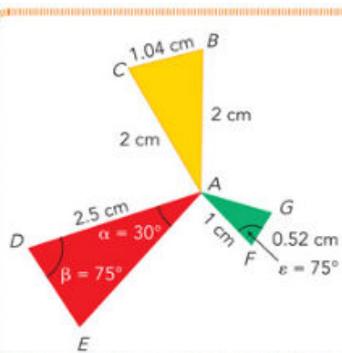
$\Delta UVW \cong \Delta HIJ$ , ya que  $VW \cong IJ$ ; y los ángulos  $\gamma \cong \epsilon$ ,  $\delta \cong \zeta$



- a) Retomen sus respuestas de las actividades 1 y 2 y, con base en lo anterior, contesten en su cuaderno.
- ¿Las reglas que plantearon, respecto de si es posible o no construir los triángulos bajo ciertas condiciones, coinciden con la información anterior?
  - ¿Qué criterio describe los triángulos de la actividad 1? ¿Por qué?

### 4. Revisen la tarea y resuelvan en su cuaderno.

- a) ¿Antonio cuenta con la información suficiente para trazar triángulos congruentes? Si no, ¿qué dato le falta y qué criterio puede aplicar?
- Tracen el triángulo con la información que han incorporado. Comparen los triángulos y determinen su congruencia.
- Comenten sus respuestas y, con ayuda del profesor, discutan lo siguiente. Acuerden una conclusión y tomen nota en su cuaderno.
- ¿Es posible determinar la congruencia de dos triángulos si solo se conoce la medida de dos lados?
  - ¿Y si solo se conoce la medida de un lado y la de un ángulo?
  - ¿Y si se conoce solo la medida de dos ángulos?



Traza en tu cuaderno triángulos semejantes a los que se muestran con las siguientes condiciones.

En todos los casos los lados de los triángulos deben crecer en la misma proporción.

- Que la medida de  $\overline{AB}$  del  $\Delta ABC$  sea 4 cm.
- Que la medida de  $\overline{FG}$  de  $\Delta AFG$  aumente cuatro veces.
- Si a la medida  $\overline{AD}$  del  $\Delta ADE$  se le suma 1.5 cm, ¿cómo son los triángulos que se trazaron: semejantes o congruentes?

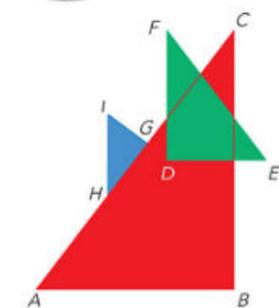
© Nueva México

## 2. Criterios de semejanza

### 1. Analiza la figura y argumenta.

Bibi acompañó a su primo Aurelio al Museo de Arte Moderno, que se encuentra en la Ciudad de México. A ella le llamaron la atención algunas pinturas de arte abstracto y la relación entre las figuras que las componen. Por ello, Aurelio le pintó un óleo basado en triángulos y le aseguró que todos estos son semejantes; sin embargo, Bibi afirma que Aurelio está equivocado. Observa el dibujo y las medidas de los triángulos pintados por Aurelio

$\Delta ABC$	$\Delta DEF$	$\Delta GHI$
$\overline{AB} = 0.3 \text{ m}$	$\overline{DE} = 15 \text{ cm}$	$\overline{HI} = 0.125 \text{ m}$
$\overline{BC} = 0.4 \text{ m}$	$\overline{EF} = 25 \text{ cm}$	$\overline{IG} = 0.075 \text{ m}$
$\overline{AC} = 0.5 \text{ m}$	$\overline{DF} = 20 \text{ cm}$	$\overline{GH} = 0.10 \text{ m}$



- a) Comprueba que los triángulos son semejantes.

- Comprueba que  $\Delta ABC \sim \Delta DEF$  y  $\Delta GHI \sim \Delta DEF$
- ¿Cómo lo comprobaste? \_\_\_\_\_
- ¿Se puede afirmar que  $\Delta ABC \sim \Delta GHI$ ? ¿Por qué? \_\_\_\_\_

- b) Traza un triángulo con las siguientes medidas y llámalo  $KLM$ .

$$\overline{KL} = 3 \text{ cm}, \overline{LM} = 4 \text{ cm} \text{ y } \overline{KM} = 5 \text{ cm}$$

- ¿ $\Delta KLM \sim \Delta ABC$ ? Justifica. \_\_\_\_\_
  - ¿ $\Delta KLM \sim \Delta DEF$  y  $\Delta GHI$ ? ¿Por qué? \_\_\_\_\_
- En grupo, con la guía de su profesor, hagan lo siguiente.
- Expliquen sus respuestas de las actividades anteriores y mencionen si Aurelio estaba en lo correcto al decir que todos los triángulos son semejantes. Validen sus argumentos.
  - Analicen: Si la medida de los lados de los triángulos que han trazado varía de manera proporcional, ¿qué datos no han variado para que los triángulos sean semejantes?

2. Tracen en su cuaderno los triángulos  $STR$  y  $XYZ$ . Cada integrante debe realizar sus propios trazos.

- $\Delta STR$ :  $\alpha = 110^\circ$  y  $\beta = 40^\circ$
- $\Delta XYZ$ :  $\epsilon = 30^\circ$ ,  $\phi = 80^\circ$ ;  $\gamma = 70^\circ$

- a) Comparen los triángulos  $STR$  que trazaron. ¿La medida de los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  se mantuvo en cada triángulo? \_\_\_\_\_

- b) Registren las medidas de los lados de los triángulos que trazaron en el equipo y establezcan la razón de semejanza que hay entre estos. \_\_\_\_\_



TRS

**Educación vial.** Antes de visitar un lugar desconocido, es necesario informarse acerca de las distintas rutas para llegar, de las características de los sistemas de transporte y de las reglas que se deben seguir para usarlos correctamente.

- ¿La razón de semejanza es la misma para los otros dos lados del triángulo  $STR$ ? \_\_\_\_\_
  - Si se traza un triángulo  $STR$  con razón de semejanza 0.88, ¿cómo son las medidas de los lados del triángulo que se trazaría: mayores o menores que las del triángulo original? Argumenten. \_\_\_\_\_
  - ¿Sucede lo mismo con la medida de los ángulos? ¿Por qué? \_\_\_\_\_
- c) Comparen su triángulo  $XYZ$  con el triángulo que trazó cada integrante del equipo.
- ¿Cómo son los triángulos que trazaron: congruentes o semejantes? Argumenten. \_\_\_\_\_
- d) ¿Los triángulos  $STR$  y  $XYZ$  son semejantes o congruentes? Justifiquen. \_\_\_\_\_
- Socialicen sus respuestas y lleguen a acuerdos sobre las condiciones mínimas para que dos figuras sean semejantes.

3. Lean la información y luego respondan.

### Criterios de semejanza de triángulos

Los **criterios de semejanza de triángulos** permiten determinar que dos triángulos son semejantes, o que dadas ciertas condiciones se pueden trazar únicamente triángulos semejantes.

**Ángulos correspondientes iguales.** Dos triángulos son semejantes cuando al menos dos ángulos de uno son iguales a sus correspondientes en el otro.

**Lados correspondientes proporcionales.** Dos triángulos son semejantes cuando las medidas de los tres lados de un triángulo y sus lados correspondientes en el otro son proporcionales.

Si en una pareja de triángulos dos lados correspondientes son proporcionales y el ángulo comprendido entre estos es de igual medida, entonces los triángulos son semejantes.

- a) ¿Cuál de los criterios anteriores se aplicó en el problema 1? Argumenten. \_\_\_\_\_
- b) ¿Qué criterios se aplicaron en el problema 2? \_\_\_\_\_

© Nueva México

- c) Con ayuda de su profesor, revisen las condiciones que plantearon al final de la actividad 2 y valídenlas con la información teórica que se proporcionó.

4. Revisen la tarea y respondan.

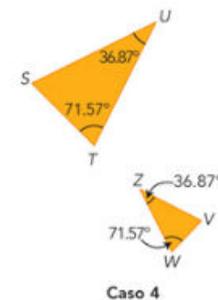
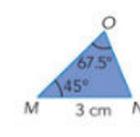
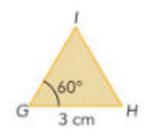
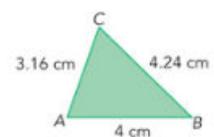
- a) ¿Qué criterio es posible utilizar para verificar que los triángulos que trazaron son semejantes? \_\_\_\_\_
- b) ¿Cómo son los triángulos que obtuvieron? Expliquen. \_\_\_\_\_
- Analicen sus respuestas y, con ayuda del profesor, concluyan acerca de estas preguntas. Acuerden una conclusión y tomen nota en su cuaderno.
- ¿Es posible determinar la semejanza de dos triángulos si solo se conoce la medida de dos lados que son proporcionales?
  - ¿Y si únicamente se conoce la medida de dos ángulos que son correspondientes entre sí?

BAE

Consulta en la serie Libros del Rincón la obra *Juegos matemáticos. Rompecabezas de cifras y números para agudizar el ingenio*, de Derrick Niederman, colección Espejo de Urania. En la página 48 se plantea un problema que podrás resolver aplicando lo que aprendiste sobre semejanza de triángulos.

### Practico

1. Analiza las parejas de figuras y responde en tu cuaderno.



- a) ¿Qué parejas de triángulos son semejantes?
- b) ¿Qué criterio de semejanza utilizaste para analizar cada caso?
- c) Elige un caso en el que los triángulos no sean semejantes. Selecciona un triángulo y traza en tu cuaderno un triángulo semejante a ese con razón de semejanza 1.5.

En tu cuaderno, traza un triángulo isósceles con los datos que se proporcionan.

- Medida del lado desigual: 5 cm
- Ángulo opuesto al lado desigual:  $45^\circ$

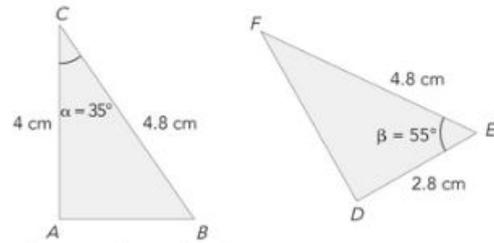
- a) ¿Puede trazarse solo un triángulo? \_\_\_\_\_
- b) ¿Es posible construir triángulos semejantes al que trazaste? \_\_\_\_\_

© Nueva México

### 3. Congruencia o semejanza



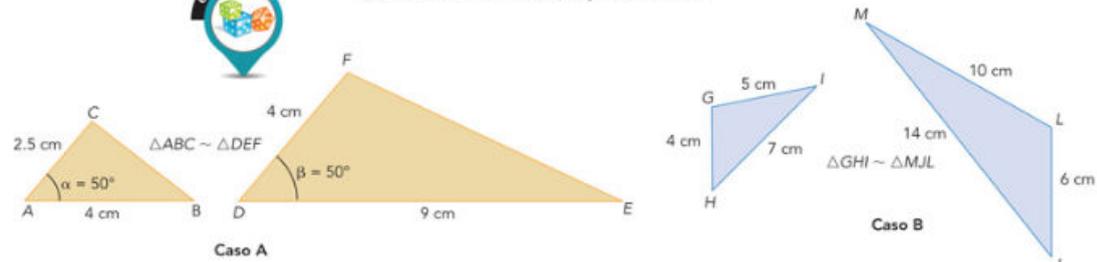
1. Analiza los triángulos y justifica tus respuestas.



- ¿Cómo son los triángulos: congruentes o semejantes? \_\_\_\_\_
- ¿Para determinar la congruencia entre los triángulos es necesario aplicar uno o más criterios? \_\_\_\_\_
- ¿Qué criterio te permite saber si los triángulos anteriores son semejantes? \_\_\_\_\_
- ¿Todos los triángulos congruentes son semejantes? Argumenta. \_\_\_\_\_
- ¿Todos los triángulos semejantes son congruentes? Argumenta. \_\_\_\_\_



2. Analicen los casos y resuelvan.



- Determinen si ambos triángulos son semejantes y expliquen qué criterio usaron para ello.
  - Caso 1 \_\_\_\_\_
  - Caso 2 \_\_\_\_\_



3. Revisen las respuestas de las actividades anteriores y resuelvan.

- En la actividad 1, ¿qué criterio permite verificar la congruencia? \_\_\_\_\_
- Retomen la actividad 2. Consideren que  $ABC$  es el triángulo original y tracen en el cuaderno dos triángulos semejantes a este con razón de semejanza 2.25 y 1.6, respectivamente.

© Nueva México



Entra al sitio:  
<http://www.telesecundaria.sep.gob.mx/>  
 Elige "Materiales Educativos Audiovisuales", haz clic en "TERCER GRADO" y después selecciona la opción "Matemáticas III". En la barra derecha escoge "Bloque 2" y busca en la barra de títulos el recurso "Semejanza de triángulos", ahí podrás ver el video explicativo para consolidar lo estudiado en la lección.  
 (consulta: 22 de diciembre de 2016, 12:40 horas)

• Consideren que  $MJL$  es el triángulo original. Si se sabe que la razón a establecer es entre  $\overline{JL}$  y su correspondiente en el  $\Delta GHI$ , ¿cuáles deben ser las medidas de los lados del triángulo semejante? \_\_\_\_\_

4. Revisen la tarea. Comparen los triángulos que trazaron y respondan.

- ¿Cómo son los triángulos que trazaron: semejantes o congruentes? \_\_\_\_\_
  - ¿Lo anterior se cumple para cualquier triángulo con dichas condiciones? Argumenten aplicando los criterios que aprendieron en la lección. \_\_\_\_\_
- Con ayuda de su profesor, revisen en grupo sus respuestas hasta que todos estén de acuerdo. Concluyan al respecto de la congruencia y semejanza de triángulos y toma nota en tu cuaderno.

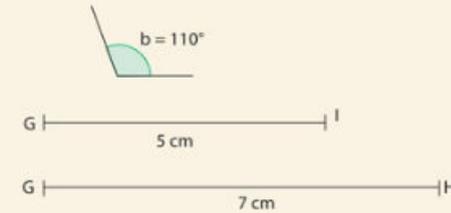
### Validemos lo aprendido



Analiza, discute y resuelve.

1. Traza el  $\Delta GHI$  con la siguiente información:

- $\angle \beta = 110^\circ$ , se ubica en el vértice  $G$ .
- Lado  $GI = 5$  cm
- Lado  $GH = 7$  cm



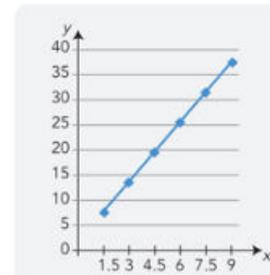
- ¿Es posible trazar más de un triángulo? ¿Por qué? \_\_\_\_\_
  - Compara tu trabajo con el de tus compañeros y respondan:
    - ¿Todos los triángulos que construyeron son congruentes? \_\_\_\_\_
    - ¿Construyeron triángulos semejantes? \_\_\_\_\_
- Validen sus respuestas aplicando los criterios que aprendieron en esta lección.

Analiza la información y haz lo que se solicita.

Escribe un problema que se resuelva usando la tabla; otro con la gráfica y otro que se modele con la expresión algebraica. Agrega las unidades que relaciones, según sea el caso.

12	60
24	120
36	180
48	240
60	300

$$y = 5x$$



# Representaciones gráficas, tabulares y algebraicas

Eje: Manejo de información

Tema: Proporcionalidad y funciones

Contenido: Análisis de representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas) que corresponden a una misma situación. Identificación de las que corresponden a una relación de proporcionalidad

## 1. Variación lineal



1. Analiza el problema y responde. Justifica cada respuesta.

- Don Alejandro colocará loseta a los pisos de las 10 casas de una nueva construcción. Cada caja de losetas cubre  $1.5 \text{ m}^2$  y cada casa requiere de  $81 \text{ m}^2$  de loseta. Una persona coloca una caja de losetas en 1 h y su cuadrilla de trabajadores coloca  $54 \text{ m}^2$  de loseta en un día de trabajo (9 h).
- Completa la tabla de la izquierda, en ella se relacionan los días y la cantidad de loseta que colocan.
  - ¿Cuántos días tardarían en entregar las 10 casas? \_\_\_\_\_
- ¿Cuántos metros cuadrados de loseta se colocan en una hora?
  - En tu cuaderno elabora una tabla que relacione los metros cuadrados que se colocan por cada hora trabajada en un día.
  - ¿Cuántas horas de trabajo se requieren para entregar tres y cinco casas? \_\_\_\_\_
- Don Alejandro decide ampliar su equipo de trabajo, de manera que logren colocar en un día  $90 \text{ m}^2$  (al ampliar el equipo, las horas de trabajo hombre por día equivalen a 15).
  - ¿Cuántos días tardarían en entregar las 10 casas? \_\_\_\_\_
  - ¿Los metros cuadrados de loseta que colocan en una hora cambian o se mantienen? \_\_\_\_\_

Día	Loseta ( $\text{m}^2$ )
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

2. Resuelvan el problema y justifiquen sus respuestas.

Aurelio trabaja en una ensambladora de automóviles y se dedica a conectar el equipo de audio. Para ganar el bono de productividad que otorga la empresa al final de cada mes debe instalar, al menos, 132 equipos. La gráfica muestra cuántos automóviles ha equipado en el mes. Consideren que este mes trabajará 22 días y que el trabajo es constante.



- Agreguen los títulos correspondientes a la gráfica.
    - Según la gráfica y los días que trabajará en el mes, ¿Aurelio llegará a la meta de 132 equipos? \_\_\_\_\_
    - ¿A cuántos automóviles les conecta el audio en un día? \_\_\_\_\_
- Validen los resultados con ayuda del profesor.

© Nueva México

3. Analicen los problemas anteriores. Después resuelvan en su cuaderno.

- Del problema de don Alejandro, ¿qué expresión algebraica modela los metros cuadrados de loseta que se colocan por hora?
  - Si lo anterior se grafica, ¿qué tipo de gráfica se obtiene?
  - ¿La expresión algebraica anterior modela las horas para terminar las 10 casas?
- Para el problema de Aurelio, elaboren una tabla a partir de la gráfica.
  - ¿Cuál es la expresión algebraica que modela la cantidad de sistemas de audio que Aurelio conecta en un día?
- Comparen las expresiones algebraicas que escribieron en los incisos a y b. ¿Cómo son entre sí? Argumenten.
  - ¿Qué tipo de relación de proporcionalidad modelan?
  - Mencionen al menos dos características de la relación de proporcionalidad que representan los problemas.

4. Revisen su tarea y, con ayuda del profesor, respondan.

- ¿Los problemas que escribieron cumplen con las condiciones dadas? Argumenten. \_\_\_\_\_
  - ¿Los problemas son de proporcionalidad o solo son de relación lineal? Justifiquen. \_\_\_\_\_
- Con ayuda del profesor, concluyan si es posible representar una misma situación de distintas maneras.

Determina qué expresiones algebraicas modelan una situación de proporcionalidad. Justifica tu elección.

a)  $\frac{120}{x} = y$    b)  $0.5x + 8 = y$    c)  $50 - \frac{120}{x} = y$    d)  $16x + 5 = 2y + 5$

## 2. Variación proporcional

1. Resuelve el problema en tu cuaderno. Justifica tus respuestas.

Jacinto vio una película en la que aparecían trenes de vapor. Ya en la escuela, le preguntó a su profesor de Física cómo funcionaban, y este le comentó:

—Los trenes de vapor utilizaban pistones o flechas que se sujetaban a las ruedas. El vapor, producido por madera o carbón, llega con cierta presión, volumen y una temperatura constante, al compartimento de la flecha de modo que, esta se recorre para que la rueda dé vuelta. Al girar la rueda, el pistón ejerce cierta presión ( $P$ ) que hace que se expulse el vapor, disminuyendo su volumen ( $V$ ) en el compartimento. A medida que el tren tiene una mayor velocidad, la presión del pistón aumenta, lo cual hace que el vapor disminuya cada vez más.

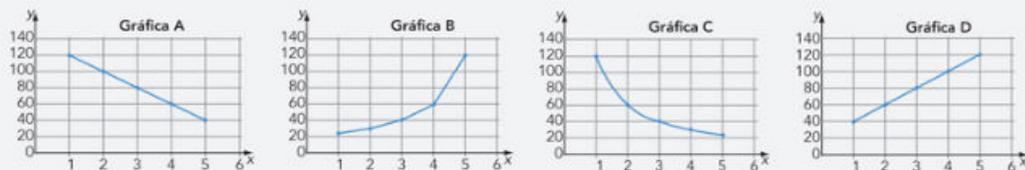
© Nueva México



## Glosario

**atm.** Abreviatura de la unidad de presión (atmósfera), equivalente a 1.01 bar.

El profesor le explicó que lo anterior obedecía a la ley de Boyle, que se describe con la expresión  $P_1 V_1 = P_2 V_2$ , a temperatura constante. Con base en lo anterior, si se tiene una presión inicial:  $P_1 = 12 \text{ atm}$  y  $V_1 = 10 \text{ L}$ , que son constantes al igual que la temperatura, y una presión final  $P_2$  que se inicia en 1 atm y aumenta en 1 atm hasta 6 atm. Analiza las siguientes gráficas:



- ¿Cuál de las gráficas modela la situación descrita?
- ¿Qué sucede con el volumen  $V_2$ ?
- ¿Qué variable se ubica en el eje de las abscisas?
- ¿Cuál se ubica en el eje de las ordenadas?

### 2. Resuelvan lo que se solicita. Justifiquen sus respuestas.

Miguel lleva como taller Electrotecnia. El profesor le dejó de tarea exponer por medio de una gráfica el comportamiento de la **ley de Ohm**, que describe la intensidad de la corriente eléctrica ( $I$ ) que circula por un conductor eléctrico, y que se escribe como  $V = IR$ .

- Si el voltaje se mantiene constante a 120 V, y se utiliza una resistencia variable ( $R$ ) de 1 ohm ( $\Omega$ ) que aumenta de 1 en 1 hasta 6  $\Omega$ , ¿cuál es el comportamiento de la corriente eléctrica? \_\_\_\_\_
- Para describir el comportamiento de la corriente eléctrica, elaboren en su cuaderno una tabla que relacione la corriente y la resistencia.

### 3. Con ayuda de su profesor, revisen y justifiquen lo realizado en los puntos 1 y 2 y respondan lo siguiente.

- ¿El problema de la ley de Boyle y el de la relación de la resistencia eléctrica con respecto a la corriente eléctrica representan una relación proporcional?
  - Si la respuesta anterior fue afirmativa, ¿qué tipo de relación proporcional representa cada una? \_\_\_\_\_
- ¿El tipo de gráfica que modela el primer problema también puede modelar el segundo? \_\_\_\_\_
  - De acuerdo con lo anterior, ¿la tabla que elaboraron para la relación de la corriente eléctrica puede funcionar para el de la ley de Boyle? \_\_\_\_\_
  - ¿Cómo son entre sí las expresiones que modelan ambos casos? \_\_\_\_\_

© Nueva México

### 4. Revisen su tarea y, con ayuda del profesor, respondan en su cuaderno.

- ¿Qué expresión modela una relación de proporcionalidad directa?
  - ¿Qué expresión modela una relación de proporcionalidad inversa?
  - ¿Qué expresión, aunque es una función lineal, no es de proporcionalidad?
- Comenten con su profesor si una misma expresión puede modelar más de una situación.

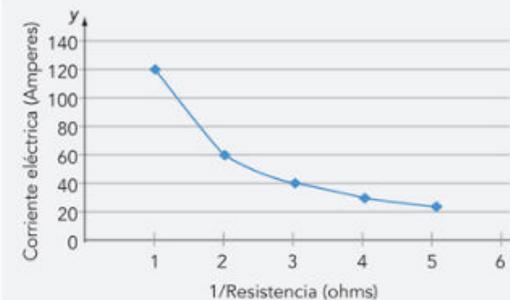
## Practica

### 1. Analiza las gráficas y responde.

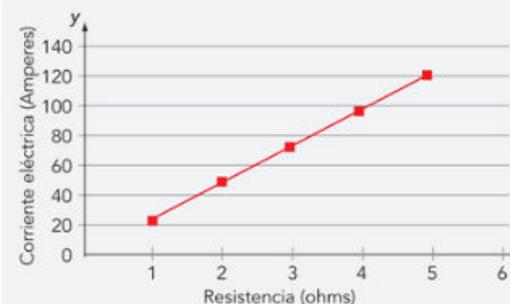
- ¿Cuál es el voltaje resultante en cada una de las variaciones que se muestran?
- ¿Qué tipo de relación es la variación que se muestra en color rojo?
- A partir de la ley de Ohm ( $V = IR$ ), ¿es posible obtener ambas variaciones?
- Elabora una tabla que modele ambas variaciones y valida la respuesta dada en el inciso b.

Justifica tus respuestas y, con ayuda del profesor, compártelas con el resto del grupo.

#### Variación de la resistencia eléctrica



#### Variación de la resistencia eléctrica



### Responde en tu cuaderno. Justifica tus respuestas.

- ¿Qué entiendes por una relación de proporcionalidad directa?
- Si una relación proporcional...
  - se grafica, ¿qué características tiene la gráfica?
  - se escribe como una expresión algebraica, ¿qué características tiene?
- La expresión  $y = 5x + 10$ , ¿representa una relación proporcional?
- ¿Todas las gráficas de proporcionalidad son lineales?

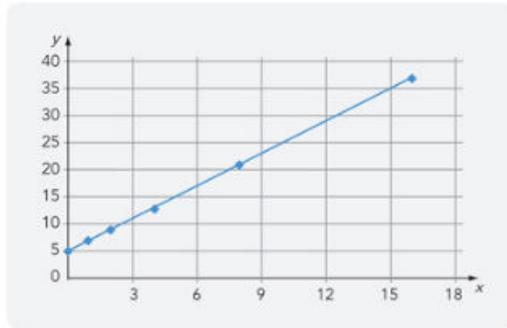
© Nueva México

### 3. ¿Lineal y además proporcional?



1. Resuelve lo que se solicita. Justifica tus respuestas.

a) Escribe un problema que se pueda modelar con la expresión algebraica, con la tabla y con la gráfica que se muestran; uno para cada caso.



$$y - 5 = 2x$$

0.8	6.6
3	11
3.8	12.6
6	17
6.8	18.6
9	23
9.8	24.6

b) ¿El problema para la gráfica modela una relación de proporcionalidad?

c) ¿Qué representación modela una función lineal? \_\_\_\_\_

d) Si los datos de la tabla se grafican, ¿la gráfica pasa por el origen?



2. Analicen y resuelvan, argumenten sus respuestas.

A continuación se muestran tres expresiones algebraicas, dos tablas y una gráfica, analícenlas y respondan.

i.  $y = 0.9x$       ii.  $\frac{15}{x} = y$       iii.  $\frac{1}{3}y + 5 = x + 6$

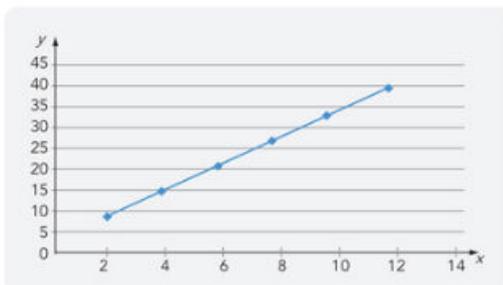


Tabla 1		Tabla 2	
10	9	2	9
20	18	4	15
30	27	6	21
40	36	8	27
50	45	10	33
60	54	12	39

a) ¿Qué expresión algebraica y qué tabla se modelan con la gráfica?

• ¿La gráfica es de relación proporcional? ¿Por qué? \_\_\_\_\_

b) ¿Con qué expresión algebraica se relaciona la otra tabla? \_\_\_\_\_

• Elaboren en su cuaderno la gráfica de la expresión algebraica y de la tabla que relacionaron. Mencionen si se trata de una relación de proporcionalidad.

3. Comparen su tarea y las actividades 1 y 2 y, con ayuda del profesor, analicen la información y respondan.



### Variación proporcional



Cuando dos cantidades están relacionadas de tal forma que al variar una cantidad la otra también varía en la misma proporción, dicha relación puede ser de proporcionalidad directa o inversa. Si se trata de una relación de proporcionalidad directa, es una función lineal, pero no toda función lineal es de proporcionalidad. Si esta relación se grafica, la recta siempre pasa por el origen del plano cartesiano y su expresión algebraica se puede modelar como  $y = kx$ . La gráfica de una relación proporcional inversa es una curva, y su expresión algebraica es  $y = \frac{k}{x}$ .

a) Comparen las respuestas de la tarea con la información teórica y, de ser necesario, complementen la información que obtuvieron.

b) Los problemas que escribieron en la actividad 1, ¿se pueden modelar con cualquiera de las tres representaciones?

• ¿Por qué no representan una relación de proporcionalidad?

c) De lo que han resuelto en la actividad 2, ¿cuál de las expresiones algebraicas es una función lineal, pero no es de proporcionalidad?

■ Con ayuda del profesor validen sus respuestas y concluyan.

### TIC

Ingresa al sitio:

[portacademico.cch.unam.mx/alumno/aprende/matematicas/](http://portacademico.cch.unam.mx/alumno/aprende/matematicas/)

Selecciona el recurso "Variación proporcional". Ahí encontrarás información teórica y ejercicios para que practiques el contenido de la lección.

(consulta: 22 de diciembre de 2016, 16:30 horas)

### Validemos lo aprendido



Resuelve el problema y responde en tu cuaderno.

La gráfica se relaciona con una de las expresiones algebraicas que se muestran:

•  $(\frac{1}{2})y = 5x$       •  $5y - 10 = 75x + 10$

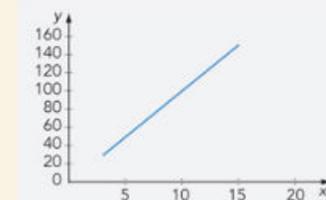
a) Elaboren un registro tabular que corresponda a cada expresión algebraica.

b) ¿Cuál de las dos expresiones es una relación de proporcionalidad inversa?

c) ¿Qué expresión algebraica modela la gráfica?

d) Escriban un problema que pueda modelarse con la gráfica, la expresión algebraica y las tablas correspondientes.

Validen sus respuestas. Compartan con el resto del grupo lo que realizaron con la ayuda de su profesor.



Responde en tu cuaderno lo que se solicita.

Carlos tiene que elaborar una tabla que muestre la medida de los lados de un rectángulo que tiene de perímetro 150 cm y en el que se obtenga el área máxima.

a) ¿Cuál es la expresión que modela el perímetro del rectángulo, si sus lados se modelan con las literales  $d$  y  $e$ ?

b) ¿Cuál es la expresión algebraica que modela el área del rectángulo?

# Variación cuadrática

Eje: Manejo de la información

Tema: Proporcionalidad y funciones

Contenido: Representación tabular y algebraica de relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas



## 1. Variación de lado y altura

1. Analiza la situación y responde. Justifica tu respuesta.

Ramón es diseñador y está elaborando un logotipo que será parte de un anuncio. El cliente le comentó que desea que la figura principal del logotipo sea un triángulo cuya altura mida el doble de la medida de la base, y pidió que le mostrara diversos triángulos para elegir alguno considerando el área que ocupará. Ramón piensa hacer varias figuras y elaboró la siguiente tabla para integrar los datos de las áreas.

a) Escribe en la tabla los valores para la base.

Expresión para el área del triángulo		
Base	Altura	Área
1	2	1

b) A partir de la fórmula del área del triángulo, escribe una expresión para calcular el área de los triángulos de la situación anterior en función de la medida de la altura. \_\_\_\_\_

c) Completa la tabla y responde.

Expresión dada en la condición inicial		
Altura	Base	Área = $\frac{h^2}{4}$
1	1	0.25
2		
3		
4		
5		
6		
7		

• ¿Se cumple la condición de que “la medida de la altura es el doble de la medida de la base”? ¿Por qué? \_\_\_\_\_

© Nueva México

2. Resuelvan el problema y justifiquen sus respuestas.

a) La tabla de la derecha presenta la relación que hay entre la altura y la base de diferentes triángulos. ¿Qué relación hay entre la medida de la base y la altura? \_\_\_\_\_

b) Comparen la información mostrada con la de las tablas que completaron de manera individual. ¿El área de los triángulos de esta tabla será la mitad de lo que obtuvieron en las tablas anteriores? \_\_\_\_\_

c) Con las condiciones dadas en este problema, ¿es posible escribir el área en función de la medida de la base? \_\_\_\_\_

• ¿Cuál de las siguientes expresiones algebraicas permite modelar el área con las condiciones que se muestran en el registro tabular de la derecha?

i.  $A = \frac{b}{4}$     ii.  $A = 2b$     iii.  $A = \frac{b^2}{4}$     iv.  $A = \frac{b^2}{2}$

• Expliquen por qué. \_\_\_\_\_

d) De la expresión que eligieron, ¿algún término se encuentra elevado al cuadrado? \_\_\_\_\_

• ¿En qué se diferencian la expresión que eligieron y la expresión  $\frac{h^2}{4} = A$ ? \_\_\_\_\_

e) A partir de la expresión que eligieron, completen la tabla.

3. Revisen las dos actividades anteriores y respondan.

a) Analicen la información de la tabla de la derecha. Completen la información faltante.

• ¿Qué condición relaciona la medida de la base y la altura de cada triángulo? \_\_\_\_\_

• ¿Cuál de las siguientes expresiones algebraicas permite determinar el área de un triángulo en función de su base?

i.  $A = \frac{b}{4}$     ii.  $A = 2b$     iii.  $A = \frac{b^2}{4}$     iv.  $A = \frac{b^2}{2}$

■ Con la ayuda de su profesor, comenten las semejanzas entre las expresiones con las que modelaron el área de los triángulos en las tres actividades y concluyan a qué se deben.



Base b	Altura h	Área del triángulo
1	0.5	
2	1	
3	1.5	
4	2	
5	2.5	
6	3	
7	3.5	



Base b	Altura h	Área del triángulo
1		0.5
2		2
3		4.5
4		8
5		12.5
6		18
7		24.5

4. Revisen su tarea y, con ayuda del profesor, respondan en su cuaderno.

- a) Si utilizan solo números naturales, ¿cuál es la medida menor que puede tener el ancho del rectángulo?
- Conforme varía la medida del ancho, ¿qué sucede con el área del rectángulo?
  - Al ir variando las medidas del largo y ancho del rectángulo, ¿en qué momento comienza a disminuir el área? ¿A qué se debe?
  - Si se quiere escribir una expresión algebraica que modele la variación de la medida del ancho en función del largo para obtener el área del rectángulo, ¿cuál de estos procedimientos permite obtenerla?

Procedimiento 1	Procedimiento 2
e es ancho d es largo p es perímetro (150 cm)	e es ancho d es largo p es perímetro (150 cm)
$p = 2e + 2d$ $p - 2d = 2e$ $\frac{p - 2d}{2} = e$ $\frac{150 - 2d}{2} = e$ $\frac{2(75 - d)}{2} = e$ $75 - d = e$ 75 - d = e es la medida del ancho en función del largo.	$p = 2e + 2d$ $p = (2d + 2e)$ $\frac{p}{2} = e + d$ $\frac{p}{2} - d = e$ $\frac{150}{2} - d = e$ $75 - d = e$ 75 - d = e es la medida del ancho en función del largo.
Área del rectángulo: $d \cdot e = A$ $d \cdot (75 - d) = A$ $75d - d^2 = A$ La expresión es: $75d - d^2 = A$	Área del rectángulo: $d \cdot e = A$ $d \cdot (75 - d) = A$ $150d - d = A$ La expresión es: $149d = A$

- ¿Con cuál procedimiento no se puede obtener la expresión algebraica? ¿Por qué?

b) Con base en la expresión algebraica que eligieron, elaboren en su cuaderno una tabla en la que usen números decimales hasta decimos y determinen qué medidas permiten obtener el área máxima del rectángulo.

■ Discutan lo siguiente con su profesor, acuerden una conclusión al respecto y escríbanla en su cuaderno.

- Con base en lo que hicieron para obtener el área de un triángulo y la expresión del área de un rectángulo, si una de las medidas se encuentra en función de la otra, ¿qué tipo de expresión algebraica se obtiene?

**Analiza el problema, resuélvelo y justifica tus respuestas.**

Un rectángulo tiene las siguientes condiciones: "La medida del lado mayor es el doble de la medida del lado menor".

- a) ¿Qué expresión algebraica permite modelar su área?  
b) En tu cuaderno, haz un registro tabular que considere las medidas del lado menor desde 1 cm hasta 10 cm.

**2. Variación cuadrática en función de un dato**

1. Resuelve el siguiente problema. Justifica tus respuestas.

Hernando tiene en su jardín un espacio con flores y árboles, mientras que en otra parte tiene solo pasto. En el jardín hay un aspersor giratorio, como el que se muestra a la derecha, que Hernando utiliza para regar.

a) El aspersor riega áreas circulares que se van incrementando conforme la presión del agua aumenta.

- ¿Qué expresión algebraica modela el área de riego del aspersor?
- ¿Qué representa la literal de la expresión?

b) Analiza y completa la información de la tabla de la derecha.

- A medida que aumenta el alcance del aspersor, ¿el área que cubre también es mayor?
- Si el alcance del aspersor aumenta al doble, ¿el área que cubre también aumenta al doble?
- ¿Qué característica tiene la expresión que relaciona el alcance del aspersor y el área que cubre?

i. Es lineal y proporcional.      ii. Solo es lineal.      iii. Es cuadrática.

c) De la expresión que relaciona el alcance y el área:

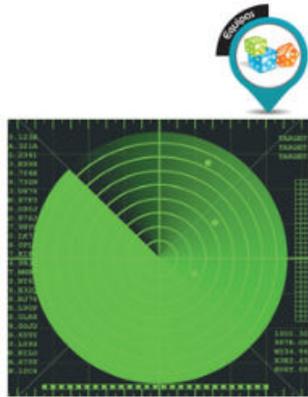
- ¿Cuál es la constante?
- ¿Cuáles son las variables que dependen una de la otra?
- ¿De qué manera la constante influye en el resultado?

■ Comenten sus respuestas con ayuda de su profesor y acuerden cuáles son las correctas.



Aspersor giratorio

Alcance del aspersor (cm)	Área que cubre el aspersor (m <sup>2</sup> )
10	
20	
	0.282744
	0.502656
50	
60	
70	
80	
90	
100	



**Radar.** Es un sistema que usa ondas electromagnéticas para medir distancias, altitudes, direcciones y velocidades de distintos objetos.

Perímetro (km)	Área (km <sup>2</sup> )
1 692	
1 504	
1 316	
1 128	
940	
752	
564	
376	
188	2 812.58



2. Analicen y resuelvan lo que se solicita. Justifiquen sus respuestas.

Como parte de un paseo escolar, Antonio visitó un centro meteorológico en el que le mostraron la pantalla de un radar y le explicaron su funcionamiento. En la pantalla del radar se muestran nueve circunferencias concéntricas a la misma distancia entre sí; el centro es el punto donde se encuentra el radar y cada circunferencia cubre un área que se mide desde la ubicación del radar. El ingeniero les dio la longitud real de la circunferencia mayor que se muestra en el radar, que es de 1 692 km.

- ¿Cuál es el área máxima que cubre el radar? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es el radio de la circunferencia que cubre el área máxima? \_\_\_\_\_
- Completan la tabla de la izquierda. Si lo consideran necesario, cópienla en su cuaderno y agreguen columnas para añadir información.
  - En las expresiones para calcular el perímetro y el área de un círculo, ¿alguna literal está elevada al cuadrado? \_\_\_\_\_
  - ¿A partir de la medida del radio de una circunferencia se pueden determinar el perímetro y el área del círculo que delimita? \_\_\_\_\_
  - Si la longitud de una circunferencia disminuye a la mitad, ¿el área del círculo también se reduce a la mitad? \_\_\_\_\_

■ Con la ayuda de su profesor, revisen y justifiquen lo realizado en las actividades previas.

3. Respondan las preguntas.

- Dada una expresión como el perímetro de un círculo:  $2\pi r$  y el área:  $A = \pi r^2$ :
  - Si el radio se duplica, ¿el perímetro y el área aumentan también al doble? \_\_\_\_\_
  - ¿En qué aspectos se diferencian las expresiones anteriores? \_\_\_\_\_
- Con la ayuda de su profesor, justifiquen sus respuestas. Discutan cómo varían los datos en los casos anteriores y registren sus conclusiones en el cuaderno.

© Nueva México

4. Revisen su tarea y, con ayuda del profesor, respondan las preguntas.

- ¿En qué difieren la expresión que se emplea para calcular el área de un rectángulo y la expresión para calcular el área de un círculo? \_\_\_\_\_
  - ¿Cuál es la constante en la expresión para calcular el área de un círculo? \_\_\_\_\_
    - ¿Cuál es la constante en la expresión del problema de la tarea? \_\_\_\_\_
- Discutan en grupo las conclusiones que se pueden obtener acerca de las actividades de esta sesión. Una vez que todos estén de acuerdo, toma nota en tu cuaderno.

Practica

- Analiza la siguiente expresión y responde las preguntas.  
Se tiene la expresión algebraica  $x^2 - 40$ , si los valores que puede tomar  $x$  están entre 0 y 10 y de uno en uno:
  - ¿Los valores que se obtendrán solo son positivos? \_\_\_\_\_
  - ¿Los valores que se obtendrán solo se incrementan? \_\_\_\_\_
  - Elabora en tu cuaderno un registro tabular y valida tus respuestas en grupo.

Reflexiona y expresa tus ideas en cada pregunta.

- ¿Qué entiendes por una función cuadrática?
- ¿Cuál es la diferencia entre una función lineal y una cuadrática?

3. Función cuadrática

1. Analiza y resuelve lo que se solicita. Justifica tus respuestas.

Carlos fue a un espectáculo de motocross. En este, las motocicletas realizan recorridos sobre pistas de arena irregulares, con montículos y pocos tramos con superficie plana, como se muestra en la imagen. En la escuela, Carlos le comentó este evento a su profesor, y este le dijo que el tiempo que una motocicleta tarda en tocar el piso después de un salto se puede determinar mediante la función:  $y = h - (\frac{1}{2})gt^2$ , donde  $h$  es la altura de donde salta la motocicleta,  $g$  es la aceleración de la gravedad en la Tierra que tiene un valor de  $9.8 \text{ m/s}^2$ ,  $t$  es el tiempo transcurrido en segundos, mientras que  $y$  es la altura de la motocicleta en función del tiempo que transcurre hasta que toca el piso.



Práctica de motocross.



**Educación vial.** Cuando asistas a un evento masivo, ubica las salidas de emergencia, así como los servicios básicos, como telefonía y sanitarios. Al salir, sigue las instrucciones para que el desalojo del lugar sea ordenado.

- a) Usando la función dada, determina el tiempo en que la motocicleta toca el piso si salta desde 2 m, 4 m, 8 m y 10 m. Haz una tabla en tu cuaderno para cada caso; considera 0 segundos y usa intervalos de 0.1 s.
- ¿En qué intervalos de segundos la motocicleta toca el piso cuando cae de una altura de 2 m? \_\_\_\_\_
  - Con base en la respuesta anterior, si la motocicleta tarda el doble de tiempo en caer, ¿saltó desde una altura de 4 m? \_\_\_\_\_
  - ¿Entre qué intervalos de tiempo toca el piso en cada caso? \_\_\_\_\_
  - Qué diferencia encuentran entre una expresión lineal como  $y = kx$  y una expresión cuadrática como  $y = kx^2$ ? \_\_\_\_\_
- Con la guía de su profesor, discutan las preguntas anteriores. Luego escribe la conclusión grupal en tu cuaderno.

2. Lean el texto y, con ayuda de su profesor, realicen lo que se pide.

### Función cuadrática

Una función es una relación entre dos conjuntos de cantidades que varían una en función de la otra. En una **función cuadrática**, la variable independiente está elevada al cuadrado y su coeficiente no puede ser cero. Además, puede tener tres términos: el término cuadrático (que siempre tiene que existir), el lineal y el independiente; lo anterior permite que en función de los valores que adquiera la variable independiente se puede analizar el comportamiento de la variable dependiente. La expresión algebraica que modela una función cuadrática es:

$$y = ax^2 + bx + c, \text{ o bien, } f(x) = ax^2 + bx + c$$

- a) Con base en lo anterior, completen la información de su tarea.  
 b) Escriban en su cuaderno las funciones de los problemas de los que han trabajado en la lección. Compárenlas y discutan:
- ¿Qué término falta en todas las funciones? \_\_\_\_\_

3. Analicen la información y resuelvan. Justifiquen sus respuestas.

a) Escriban en cada registro tabular la función que le corresponde.

i.  $y = x^2$

1	2
2	6
3	12
4	20
5	30

ii.  $y = x^2 + x + 1$

1	1
2	4
3	9
4	16
5	25

iii.  $y = x^2 + x$

1	3
2	7
3	13
4	21
5	31

© NuevaMéxico



Ingresa al sitio:

[portalacademico.cch.unam.mx/alumno/aprende/matematicas2](http://portalacademico.cch.unam.mx/alumno/aprende/matematicas2)

Da clic en "Funciones de segundo grado". Con este recurso podrás realizar actividades relacionadas con el contenido de la lección.

(consulta: 22 de diciembre de 2016, 9:40 horas)

- En las tablas, ¿qué columna representa a la variable independiente y cuál a la variable dependiente? \_\_\_\_\_
  - ¿Qué diferencia encuentran entre las funciones  $i$  y  $ii$ ? \_\_\_\_\_
  - ¿Cómo se refleja dicha diferencia en los datos de las tablas? \_\_\_\_\_
- b) De las funciones  $y = 2x^2$ ;  $y = 3x^2$  obtengan en su cuaderno una tabla si la variable independiente varía de 0 a 5.
- Compáren cómo varía  $y$  en cada caso respecto a la función  $y = x^2$ : \_\_\_\_\_
  - Si los coeficientes 2 y 3 que se encuentran en las expresiones  $y = 2x^2$ ;  $y = 3x^2$  son constantes, ¿qué relación tienen con aquellas expresiones que tienen como coeficiente 1? \_\_\_\_\_
  - Analicen los problemas resueltos a lo largo de la lección e identifiquen aquellos en los que la expresión algebraica tiene una constante y contrástenlos con la tabla que obtuvieron.

■ Con la ayuda de su profesor, comenten sus respuestas. Lleguen a acuerdos y escriban sus conclusiones en su cuaderno.

### Validemos lo aprendido

1. En tu cuaderno, resuelve lo que se solicita. Justifica tus respuestas.

Una empresa pretende introducir al mercado un nuevo producto, para ello ha proyectado el gasto de producción en cada hora, lo cual se ha modelado mediante la expresión:  $c(t) = 25t^2 + t + 1900$ , donde  $t$  es el tiempo en horas.

- a) ¿Qué interpretación le pueden dar a  $c(t)$ ?  
 b) Si el costo sobrepasa los \$9 000.
- ¿cuántas horas de trabajo deben transcurrir?
  - ¿cuál es el costo si transcurren 27 h?
- c) Elabora en tu cuaderno un registro tabular que relacione la función dada y valida tus respuestas.

Analicen la información y realicen lo que se solicita.

Ramiro y Arturo son carpinteros y están ofreciendo sus servicios en una unidad habitacional que se está entregando. Ramiro le dice a Arturo que por el número de casas que se entregarán el próximo fin de semana, tiene una probabilidad mayor a 70% de conseguir un cliente; mientras que Arturo le comenta que tres de cada cinco personas a las que ofrece sus servicios aceptan.

- a) ¿Quién de los dos tiene mayor probabilidad de conseguir más clientes?

# Eventos mutuamente excluyentes, complementarios e independientes

Eje: Manejo de la información

Tema: Nociones de probabilidad

Contenido: Conocimiento de la escala de la probabilidad. Análisis de las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes



## 1. Escala de probabilidad

### 1. Resuelve los problemas. Justifica tus procedimientos empleados.

Joshua trabaja en una concesionaria automotriz y lleva un registro mensual de las unidades vendidas. Al revisar los datos anuales para estimar las ventas probables del siguiente año, obtuvo estas conclusiones:

- Es probable que la concesionaria venda 0.8 de las camionetas de carga; 12% de las camionetas familiares y  $\frac{8}{100}$  camiones.
- La probabilidad de vender autos marca Luxe es de 0.02.
- La probabilidad de vender autos marca Prestige es de 60%.
- La probabilidad de vender autos marca Discret es  $\frac{4}{10}$ .
- La probabilidad de vender autos marca Favorit es 90%.

- Compara la probabilidad de venta de los autos y contesta.
  - Según los incisos *iii* y *v*, ¿qué es más probable: vender autos de la marca Prestige o Favorit? Explica. \_\_\_\_\_
  - ¿Qué tipo de camioneta tiene mayor probabilidad de ser vendida: la de carga o la familiar? \_\_\_\_\_
  - De todos los vehículos, ¿cuál tiene mayor medida de probabilidad de ser vendido? \_\_\_\_\_
  - ¿Cuál es la representación fraccionaria y en porcentaje de la probabilidad 0.02, que corresponde a los autos de la marca Luxe? \_\_\_\_\_
- Analiza las diferentes representaciones utilizadas para expresar la probabilidad en cada caso. Después escribe en tu cuaderno si son equivalentes o no y por qué.



### 2. Lean y respondan. Justifiquen sus respuestas.

Una agencia de excursiones investigó cómo pasaban sus vacaciones los jóvenes. Encontró que la probabilidad de que viajen al extranjero es 0.3; de que hagan viajes nacionales, 45%, y de que no viajen es  $\frac{2}{8}$  del total.

- Según los resultados, ¿qué tipo de viajes debe ofrecer la agencia en mayor cantidad: nacionales o extranjeros? \_\_\_\_\_
- De las tres medidas, ¿cuál es menor y cuál es mayor? \_\_\_\_\_

© Nueva México

La agencia intenta que la mayoría de sus visitantes compre un viaje; por ello, lleva el registro de clientes. Luego de atender a 100 clientes, sus resultados fueron: 15 viajan a la playa, 70 a la montaña y 15 a ciudades.



- Si se elige a uno de los clientes, ¿cuál es la probabilidad de que salga de vacaciones? \_\_\_\_\_ ¿Y cuál es la probabilidad de que no salga de vacaciones? \_\_\_\_\_
- ¿Qué significa que la probabilidad de que un cliente compre un paquete sea 0? \_\_\_\_\_ ¿Qué significa si la probabilidad es 1? ¿Y si es 100%? \_\_\_\_\_

### 3. Con la ayuda del profesor comparen y justifiquen sus respuestas de la tarea y de las actividades 1 y 2. En parejas, respondan las preguntas.

- Al usar expresiones decimales o fraccionarias, ¿alguna probabilidad puede ser menor que 0? ¿Alguna puede ser mayor que 1? ¿Por qué? \_\_\_\_\_
- Usando expresiones en porcentaje, ¿alguna probabilidad puede ser mayor que 100%? ¿Por qué? \_\_\_\_\_
- Con base en sus respuestas, ¿entre qué números se encuentra la escala de probabilidad? \_\_\_\_\_

### 4. Lean la información y discútanla en grupo.

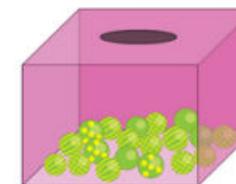
#### Escala de probabilidad

Al representar probabilidades, ya sea como número decimal, fracción o porcentaje, se usa la escala numérica mayor que 0 y menor que 1 para dar una medida de qué tan posible es que suceda la situación. Si la probabilidad es 0, significa que esa situación no ocurrirá, es decir, es un evento imposible, y por tanto, no depende de la probabilidad. En cambio, si la medida es 1, la situación seguro ocurrirá, es decir, es un evento seguro y tampoco depende de la probabilidad.

- Comparen si lo expuesto en la información anterior se cumplió en las actividades 1 a 3. Escriban en su cuaderno sus conclusiones.

#### Observa la urna y resuelve lo que se solicita.

- Determina el espacio muestra de la experiencia aleatoria de extraer de la urna una bola.
- Determina un evento con probabilidad 0, uno con probabilidad 1, y otros con probabilidad entre 0 y 1.





## 2. Eventos complementarios e independientes

1. Lean la situación y respondan. Justifiquen sus respuestas.

Rolando está en la aduana del aeropuerto y cruzará por un semáforo en el que al oprimir un botón se enciende aleatoriamente una luz roja o verde. Si la luz es roja, debe detenerse para una inspección de su equipaje; si es verde, puede continuar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que, al pasar Rolando, se encienda la luz roja? \_\_\_\_\_ ¿Y de que se encienda la luz verde? \_\_\_\_\_

b) ¿Pueden encenderse al mismo tiempo la luz roja y la verde? \_\_\_\_\_

c) Si antes de Rolando había siete personas, ¿cuál es la probabilidad de que a la persona 1 le haya salido luz verde? ¿Y la probabilidad de que les haya salido luz verde a las personas 4, 5, 6 y 7? \_\_\_\_\_

- ¿La probabilidad anterior es  $\frac{1}{2}$ , mayor que  $\frac{1}{2}$  o menor que  $\frac{1}{2}$ ? Expliquen. \_\_\_\_\_
- Comparen las probabilidades. ¿Cómo son? \_\_\_\_\_

2. Revisen y justifiquen las respuestas de los problemas anteriores y respondan en su cuaderno lo siguiente.

a) Del problema anterior, consideren que el espacio muestra de "Pasar por el semáforo y ver el color que enciende" es:  $E = \{\text{rojo, verde}\}$ .

- El evento A: se enciende la luz en rojo, es decir,  $A = \{\text{rojo}\}$ , es un **evento simple**. ¿Qué otro evento es simple?

b) Analicen la siguiente información y respondan.

### Eventos complementarios

Cuando se tienen dos o más situaciones probables y los posibles resultados no pueden ocurrir al mismo tiempo, pero la suma de dichas probabilidades es 1, se dice que son eventos complementarios.

- ¿Por qué no pueden prenderse al mismo tiempo la luz roja y la verde? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es el resultado de sumar la probabilidad de que el semáforo se encienda en rojo y se encienda en verde? \_\_\_\_\_

■ Con base en sus respuestas anteriores, determinen si los eventos "obtener luz verde" u "obtener luz roja" son complementarios y expliquen por qué.

### Glosario

**evento simple.** Subconjunto del espacio muestra formado por un solo elemento.



3. Revisen su tarea y, con ayuda del profesor, respondan las preguntas.

a) Consideren los siguientes eventos asociados con la experiencia aleatoria "extraer una bola de la urna" y obtengan la probabilidad de ocurrencia de cada uno.

Evento	Probabilidad
A: se extrae una bola rayada	$P(A) =$
B: se extrae una bola lisa	$P(B) =$
C: se extrae una bola cuadrículada	$P(C) =$
D: se extrae una bola con círculos	$P(D) =$
E: se extrae una bola cualquiera	$P(E) =$
F: se extrae una bola rayada o cuadrículada	$P(F) =$
G: se extrae una bola con círculos o lisa	$P(G) =$

b) Determinen si los eventos F y G son complementarios y expliquen por qué. \_\_\_\_\_

c) Discutan lo siguiente.

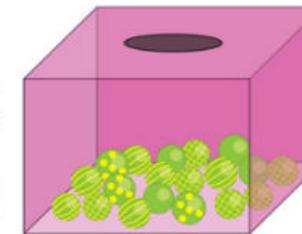
- ¿Se pueden dar al mismo tiempo los eventos A y B? \_\_\_\_\_
- ¿Pueden ocurrir al mismo tiempo los eventos B y C? \_\_\_\_\_
- ¿El resultado del evento B depende del resultado del evento A? ¿Por qué? \_\_\_\_\_
- ¿El resultado del evento C depende del resultado del evento B? Expliquen. \_\_\_\_\_
- ¿El resultado del evento D depende del resultado del evento C? Argumenten. \_\_\_\_\_

d) Comenten sus respuestas en grupo con la finalidad de que sean correctas. Luego revisen la siguiente información.

### Eventos independientes

Los eventos independientes son aquellos en los que la probabilidad de que ocurra un evento no es afectada por el resultado de otro.

■ Con ayuda de su profesor, hagan lo siguiente. Comparen sus respuestas e identifiquen cuáles de los eventos analizados en esta sesión son imposibles, cuáles son seguros y cuáles son complementarios. Tomen nota en su cuaderno.



## Practica

- Resuelve en tu cuaderno. Comenta tus respuestas en grupo y justificalas. En un hotel hay 54 habitaciones; 20 tienen balcón y ventanal, 20 tienen jacuzzi y ventanal, y 14 solo tienen ventanal, es decir, no tienen jacuzzi ni balcón. El gerente guarda en una caja una copia de todas las llaves. Consideren los siguientes eventos si se toma una llave al azar: A) Tomar una llave de una habitación con balcón; B) Tomar una llave de una habitación con jacuzzi; C) Tomar una llave de una habitación con ventanal, y D) Tomar una llave de una habitación con balcón o con jacuzzi.
  - ¿Cuál es un resultado posible de los eventos A y D?
  - ¿Cuál es un resultado posible de los eventos B y D?
  - ¿Pueden darse al mismo tiempo los eventos A y B?



### Realiza en tu cuaderno lo que se solicita.

Investiga qué son los eventos mutuamente excluyentes. Después da ejemplos de ellos considerando la experiencia aleatoria de lanzar dos dados.

## 3. Eventos mutuamente excluyentes



- Compartan en grupo sus investigaciones y sus ejemplos de la tarea. Luego retomen los datos de la tabla de la página 57 y contesten.
  - ¿Se pueden dar los eventos A y C en una misma extracción? \_\_\_\_\_
  - ¿Los eventos A y B tienen resultados posibles comunes? \_\_\_\_\_
  - ¿Qué eventos tienen resultados posibles comunes? \_\_\_\_\_
  - ¿Cuál es el resultado posible de los eventos C y E? \_\_\_\_\_
  - ¿Los eventos analizados en los incisos anteriores son mutuamente excluyentes? \_\_\_\_\_
  - Socialicen sus respuestas y verifiquen que sean correctas. En grupo analicen la siguiente información.

## Eventos mutuamente excluyentes

Los eventos mutuamente excluyentes son aquellos que no tienen elementos comunes. Por ejemplo, en la actividad de la urna, dados los eventos A: "extraer una bola rayada (br)"; y B: "se extrae una bola lisa (bl)", los elementos de A son {br, br, br, br, br, br}; los de B son {bl, bl, bl, bl}. A y B son mutuamente excluyentes porque no tienen elementos comunes. En cambio, si el evento H se define como: "se extrae una bola rayada o lisa" y F, como: "se extrae una bola rayada o cuadrículada (bc)", los elementos de H son {br, br, br, br, br, bl, bl, bl, bl} y los elementos de F son {br, br, br, br, br, bc, bc, bc, bc, bc}. Estos eventos tienen seis elementos en común: {br, br, br, br, br, br}, entonces H y F no son mutuamente excluyentes.

- A partir del experimento "lanzamiento de dos dados y tres monedas", den ejemplos de eventos independientes, eventos mutuamente excluyentes y eventos complementarios.

© Nueva México

- Analicen y escriban el tipo de evento que corresponde.

- Experimento: lanzamiento de un dado y dos monedas.
  - Los eventos:  $B = \{(6, S, S)\}$  y  $C = \{(4, A, A)\}$  son \_\_\_\_\_ porque \_\_\_\_\_
- Experimento: lanzamiento de dos dados y una moneda.
  - Los eventos:  $B = \{(5, 5, S)\}$  y  $C = \{(5, 5, S), (6, 6, S), (4, 4, S)\}$  son \_\_\_\_\_ porque \_\_\_\_\_

- Compartan y justifiquen sus respuestas de las actividades 2 y 3.

- Comparen los argumentos que cada equipo dio para ejemplificar los eventos mutuamente excluyentes, los eventos complementarios y los eventos independientes.
- En grupo, discutan acerca de los diferentes tipos de eventos que vieron en esta lección. Escribe las conclusiones en tu cuaderno.

## Validemos lo aprendido

Analicen, discutan y resuelvan lo que solicita.

- Experimento: Extracción de una ficha de una urna con 12 fichas blancas, 4 rojas, 5 verdes y 15 moradas.

Evento A = {(roja, verde, morada)}    Evento B = {(blanca, roja)}

Los eventos son: \_\_\_\_\_ porque: \_\_\_\_\_

Evento C = {(roja, morada)}    Evento D = {(blanca, verde)}

Los eventos son: \_\_\_\_\_ porque: \_\_\_\_\_

Evento E = {(12 blancas, 4 rojas)}

Evento F = {(5 verdes, 15 moradas)}

Los eventos son: \_\_\_\_\_ porque: \_\_\_\_\_

Analiza y responde en tu cuaderno.

Alfonsina va a diseñar una encuesta sobre las preferencias alimentarias de los alumnos de tercero de secundaria.

- Si fueras Alfonsina, ¿qué tipo de preguntas harías?
- ¿Cuántas preguntas estarías dispuesto a responder en la encuesta?
- ¿Qué características deben tener los encuestados por Alfonsina?

© Nueva México



TIC

Entra a:

[http://www3.gobierno-decanarias.org/medusa/agrega/visualizar/es/es-ic\\_2010051013\\_9135453/false#](http://www3.gobierno-decanarias.org/medusa/agrega/visualizar/es/es-ic_2010051013_9135453/false#)

Con este recurso podrás realizar actividades relacionadas con el contenido de la lección. (consulta: 22 de diciembre de 2016, 13:30 horas)



TRS

**Educación para la salud.** Investigar sobre las preferencias alimentarias de los alumnos permite a los encuestados reflexionar sobre qué tipo de nutrición llevan y comprender que una dieta sana y equilibrada es fundamental para desarrollar y fortalecer la salud física.



# Diseño de una encuesta

Eje: Manejo de la información

Tema: Análisis y representación de datos

Contenido: Diseño de una encuesta o un experimento e identificación de la población en estudio. Discusión sobre las formas de elegir el muestreo. Obtención de datos de una muestra y búsqueda de herramientas convenientes para su presentación

## 1. El Inegi y las encuestas



1. Discutan el siguiente planteamiento, respondan las preguntas y argumenten sus respuestas.

Bibi trabaja en el Instituto Nacional de Estadística y Geografía (Inegi) y tiene que diseñar una encuesta dirigida a los adolescentes. Tiene algunas ideas, pero no sabe por dónde empezar. Así que anotó en una lista las acciones que debe realizar:

- Fijar costos
- Seleccionar un tema
- Proponer un objetivo
- Definir a los encuestados
- Determinar el medio para realizar la encuesta (correo electrónico, teléfono, hoja, etcétera)
- Diseñar un logo que identifique a los encuestadores que colaborarán con ella

- a) Si tú y tus compañeros colaboraran con Bibi, ¿cuál de las acciones de la lista considerarían como la más importante?
  - Numeren las seis acciones que anotó Bibi, de la más importante a la de menor importancia.
  - ¿Piensan que todas las acciones consideradas son necesarias para el diseño de la encuesta? ¿Cuáles no lo serían? \_\_\_\_\_

- b) ¿Consideran que hay otras acciones necesarias que no se incluyeron en la lista de Bibi? ¿Cuáles? \_\_\_\_\_

2. Realicen lo que se solicita. Justifiquen sus respuestas.

En una reunión de capacitación le explicaron a Bibi que para diseñar la encuesta, debía tomar uno de los seis temas generales que propone la página del Inegi: [www.inegi.org.mx/](http://www.inegi.org.mx/).

- |                        |                                 |
|------------------------|---------------------------------|
| • Ciencia y tecnología | • Ocupación y empleo            |
| • Economía             | • Población, hogares y vivienda |
| • Medio ambiente       | • Sociedad y gobierno           |

© NuevaMéxico



Consulta en la serie Libros del Rincón la obra *Mantente saludable: un plan personal*, de Laura Vargas Parada, colección Espejo de Urania, y obtén información para diseñar una encuesta relacionada con la cultura de la salud.



- a) ¿Qué tema piensan que debería escoger Bibi? \_\_\_\_\_
- b) ¿Por qué piensan que el Inegi propone esos seis temas generales? \_\_\_\_\_
- c) ¿A quiénes les interesa conocer los resultados de las encuestas? \_\_\_\_\_
- d) Seleccionen un tema de los propuestos por el Inegi, analicen los subtemas correspondientes y propongan un tema específico para diseñar una encuesta:
  - ¿Qué aspectos consideraron para seleccionar el tema general de su encuesta? \_\_\_\_\_
  - ¿Qué temas de interés identificaron en los subtemas? \_\_\_\_\_
  - ¿Por qué piensan que su tema específico puede ser de interés para otras personas? \_\_\_\_\_
  - Al diseñar su encuesta y aplicarla, ¿los resultados obtenidos para quiénes pueden ser de utilidad? \_\_\_\_\_

■ Con ayuda del profesor, revisen las respuestas de las actividades 1 y 2.

3. Contesten en su cuaderno las siguientes preguntas.

- a) De acuerdo con lo realizado en la actividad 1, ¿qué lugar de importancia darían a la tarea seleccionar un tema?
- b) En el momento de seleccionar un tema para diseñar una encuesta, ¿qué recomendaciones darían a quien pretenda realizarla?
- c) Si identificaron acciones que no son necesarias para el diseño de una encuesta, ¿cuáles fueron?
  - ¿Puede prescindirse de la acción diseñar un logo?
- d) ¿Qué actividades incluyeron en su lista de acciones?
  - ¿Qué tipo de preguntas valdría la pena incluir: preguntas abiertas, de opción múltiple u otras?

■ Analicen las respuestas y, con ayuda del profesor, lleguen a acuerdos.

### Realicen lo que se solicita.

- a) Si está dentro de sus posibilidades, acudan a un lugar donde cuenten con atención a los usuarios, como un banco, una tienda departamental, clínicas, gimnasios, entre otros, e indaguen si en esos lugares aplican encuestas a sus clientes. En caso afirmativo, pregunten el objetivo de estas y cómo las aplican.
- b) En caso de que solo tengan acceso a medios electrónicos o impresos, busquen información acerca de cuáles son los objetivos de realizar una encuesta y la manera en que se llevan a cabo.
- c) Registren sus resultados en su cuaderno.

© NuevaMéxico





**Educación ambiental.** Conocer los factores naturales, sociales, culturales y económicos que influyen en el ambiente y reconocerse como parte de él permite incentivar comportamientos favorables para la participación social, informada, crítica y reflexiva del entorno natural y social.

## 2. Poblaciones y muestras

### 1. Analicen y resuelvan. Justifiquen sus respuestas.

Bibi seleccionó el tema para su encuesta, cuyo propósito será *determinar cuánto preocupa a los adolescentes el cuidado del medio ambiente, y qué acciones realizan para cuidarlo.*

- a) ¿A qué tema general del Inegi corresponde? \_\_\_\_\_
- ¿Piensan que es un tema de interés para los adolescentes mexicanos? \_\_\_\_\_
  - ¿Piensan que el propósito es claro? ¿Qué se puede saber mediante una encuesta? \_\_\_\_\_
  - ¿Por qué piensan que una vez que se definió el tema específico se debe establecer un propósito? \_\_\_\_\_
  - ¿Qué pasaría si una encuesta no tuviera un propósito definido? \_\_\_\_\_
- b) ¿A cuántos adolescentes debe encuestar? \_\_\_\_\_
- ¿Entre qué rango de edades puede entrevistar? \_\_\_\_\_
  - ¿Puede entrevistar solo a hombres o a mujeres? \_\_\_\_\_
  - ¿Cómo puede seleccionar a los adolescentes para encuestar? \_\_\_\_\_
  - ¿En qué lugares y en qué horario puede acceder a ellos? \_\_\_\_\_

De acuerdo con datos del Inegi, en 2010 en México, la población de jóvenes de entre 15 y 29 años era de 29 706 560; de ellos, quienes tienen entre 15 y 19 años (considerados adolescentes) representan 37.2% de la población joven. Respondan en su cuaderno.

Fuente: [www.inegi.org.mx/inegi/contenidos/espanol/prensa/contenidos/Articulos/sociodemograficas/mexico-jovenes.pdf](http://www.inegi.org.mx/inegi/contenidos/espanol/prensa/contenidos/Articulos/sociodemograficas/mexico-jovenes.pdf)  
[www.inegi.gob.mx/inegi/contenidos/espanol/prensa/Contenidos/estadisticas/2006/jovenes06.pdf](http://www.inegi.gob.mx/inegi/contenidos/espanol/prensa/Contenidos/estadisticas/2006/jovenes06.pdf) (Fecha de consulta: 25 de abril de 2013).

- a) De acuerdo con los datos del Inegi, ¿cuántos adolescentes había en México en 2010?
- b) Conociendo el dato anterior, ¿cuántos adolescentes puede considerar Bibi para que la información sea representativa?
- ¿La mitad de adolescentes en México?
  - ¿Más de la mitad?, ¿menos de la mitad? ¿Una tercera parte?
  - ¿Los adolescentes de una entidad, por ejemplo, de Veracruz?
  - ¿Pueden considerar encuestar adolescentes de todas las entidades de manera proporcional?

© Nueva México



### 2. Analicen las preguntas y respondan en el cuaderno.

- a) De la actividad 1, expongan por qué consideran que el tema que eligieron es de interés para los adolescentes mexicanos.
- ¿Consideran que a los adolescentes les preocupa el cuidado del medio ambiente?
  - ¿Pueden los adolescentes realizar acciones preventivas para cuidar el ambiente?
  - ¿La información que se proporcione a los adolescentes contribuye a la sensibilización sobre el cuidado del medio ambiente?
- b) Establezcan un propósito para la encuesta que están diseñando. Socialícenlo y verifiquen que sea claro y viable.
- c) Consideren como población a los sujetos que reúnen las características para ser encuestados de acuerdo con el tema elegido.
- ¿Qué características debe tener la población que están considerando?
  - ¿La población puede ser todos los alumnos de tercero de secundaria de su escuela?
  - Una parte de la población se considera una muestra. ¿Un solo grupo de su escuela puede ser una muestra de la población?
  - ¿Cuántos alumnos, en este caso, o elementos pueden ser considerados una muestra de la población?
- Comenten sus respuestas. Con ayuda del profesor, establezcan acuerdos.

### 3. Revisen su tarea y, con ayuda del profesor, respondan en su cuaderno.

- a) Escriban la importancia de contar con un propósito claro y viable en una encuesta.
- ¿Cada propósito es similar o debe tener especificaciones con respecto al tipo de encuesta que se aplica?
  - ¿Qué relación hay entre el propósito y el diseño de la encuesta?
  - Si es necesario, replanteen el propósito de la encuesta.

### 4. Analicen y resuelvan el problema. Justifiquen sus respuestas.

El gerente de un hotel quiere hacer una encuesta entre sus clientes para valorar la calidad del servicio. En el hotel están hospedadas 150 personas, y piensa que, al encuestar a 50 de ellas, puede identificar los problemas o deficiencias en el servicio.

- a) ¿Cuál es el propósito de la encuesta a realizar por el gerente? \_\_\_\_\_
- b) ¿Cuál es la población de la encuesta? \_\_\_\_\_
- c) ¿Cuál es la muestra? \_\_\_\_\_
- Con base en lo trabajado hasta este momento, evalúen si el gerente obtendrá información relevante para evaluar la calidad de su servicio. Con ayuda del profesor lleguen a acuerdos.



© Nueva México



## TIC

Ingresa a [www.profesorenlinea.cl/matematica/Graficos.html](http://www.profesorenlinea.cl/matematica/Graficos.html). Ahí encontrarás información teórica para profundizar en el tema de la lección. (consulta: 22 de diciembre de 2016, 10:00 horas)

### Realicen en su cuaderno lo que se solicita.

Establezcan en un cuadro como el siguiente los avances del diseño de su encuesta:

Tema específico:	
Propósito:	
Características de la población:	
Características de la muestra:	
Tipo y número de preguntas:	
Periodo de aplicación de la encuesta (días, horas, etc.):	
Otras:	

### 3. Datos de una muestra y su presentación

1. Expongan el resultado de su tarea, realicen lo que se pide con ayuda de su profesor y lleguen a consensos.

a) Analicen la información para complementar el diseño de su encuesta:

#### Población y muestra

Una **encuesta** es un instrumento de recolección de datos que considera a una **muestra representativa** de una **población** específica. Una población es un grupo de elementos que comparten características específicas. Una **muestra** es una parte de los elementos de una población, se dice que es representativa cuando incluye al menos 10% de la población a la que pertenece. Con los resultados (cuantitativos y cualitativos) de una encuesta aplicada a una muestra representativa se pueden establecer generalizaciones para la población considerada. La muestra puede seleccionarse por medio de diversos métodos de muestreo:

- Aleatorio simple: se selecciona una muestra  $n$  de una población de  $N$  unidades; cada elemento tiene la misma probabilidad de ser seleccionado.
- Aleatorio sistemático: se organizan todos los elementos de la población, y con base en una regularidad o periodicidad se identifican los elementos que conformarán la muestra.
- Aleatorio estratificado: se trata de establecer categorías (estratos) que tienen una característica específica: por ejemplo, estratificar según la profesión, la edad, el sexo, el estado civil, etc. La muestra debe estar conformada por todos los estratos establecidos.

Fuente: [www.estadistica.mat.uson.mx/Material/elmuestreo.pdf](http://www.estadistica.mat.uson.mx/Material/elmuestreo.pdf) (Fecha de consulta: 29 de mayo de 2013).

- b) Escriban dos ejemplos para cada tipo de muestreo.  
c) Ajusten el diseño de su encuesta seleccionando uno de los tres métodos; consideren que sea el más pertinente a lo que realizarán.

© Nueva México

2. Realicen las siguientes acciones y contesten lo que se solicita.

- a) Presenten al grupo el diseño de su encuesta con los ajustes solicitados. Si no hay más comentarios o modificaciones, aplíquenla.
- b) Una vez aplicada la encuesta, contesten lo siguiente:
- ¿Cómo pueden organizar los datos recabados?
  - ¿Qué método de registro es más adecuado emplear: una tabla de datos, una gráfica, un documento escrito?
  - Según el método elegido, ¿qué forma de representar la información es la más adecuada?
  - ¿Qué ventajas o desventajas tiene usar una gráfica de barras, de pastel, poligonal o histograma?
- Organicen sus resultados y preséntenlos de manera cuantitativa.

#### Practico

1. Busquen en medios electrónicos o impresos al menos tres encuestas.
- a) Identifiquen la población, la muestra, el objetivo, el método de muestreo empleado y la manera de comunicar los resultados. Comparen sus resultados con el resto del grupo.

3. Con la ayuda de su profesor revisen y comparen los resultados de su encuesta con el grupo. Luego respondan.

a) ¿Qué tipo de representación cuantitativa emplearon para comunicar sus resultados? ¿Fue clara? ¿Fue adecuada?

■ Con base en la información recabada, establezcan conclusiones.

#### Validemos lo aprendido

1. Analiza y responde.

- a) Si en una encuesta el muestreo no es representativo, ¿qué consecuencias se pueden tener en el momento de establecer conclusiones?
- b) Si la muestra considera 99% de la población, ¿los resultados pueden ser confiables?

#### Realiza lo que se solicita.

Existen diversos programas para la computadora, como la hoja de cálculo electrónica o de geometría dinámica. Auxíliate con cualquiera de ellos y determina cuál de las listas de coordenadas que se muestran corresponde a una función lineal o a una de proporcionalidad.

Lista 1. A: (2, 4), B: (4, 6), C: (6, 8). Lista 2. A: (2, 4), B: (3, 6), C: (4, 8)

© Nueva México

## UNIDAD 1: Tipos de sangre

La sangre, aunque a simple vista parece igual, no lo es, pues contiene componentes como glóbulos rojos, glóbulos blancos, plaquetas y plasma, y existen en ella proteínas y azúcares, llamados *marcadores* o *antígenos*, que indican si los glóbulos rojos nos pertenecen. De esto depende que en una transfusión la sangre sea aceptada o no. Para saberlo, se agrupa la sangre en función de los marcadores que contiene.

Los cuatro grupos principales de sangre son los siguientes:

- Tipo A. Este tipo de sangre solo tiene un marcador conocido como "A".
- Tipo B. Este tipo de sangre solo tiene un marcador conocido como "B".
- Tipo AB. Este tipo de sangre tiene tanto marcadores A como marcadores B.
- Tipo O. Este tipo de sangre no tiene marcadores A ni B.

1. Al hacer el registro del tipo de sangre de una persona con la tipología anterior, solo existen cuatro resultados posibles:

- Evento 1: sangre tipo A
- Evento 2: sangre tipo B
- Evento 3: sangre tipo AB
- Evento 4: sangre tipo O

Estos eventos son:

- a) complementarios.
- b) mutuamente excluyentes.
- c) independientes.
- d) complementarios y mutuamente excluyentes.

Justifica tu respuesta. \_\_\_\_\_

2. Junto con el tipo de sangre se registra el factor Rh, el cual puede ser positivo o negativo. Tomando en cuenta el factor Rh, ¿cuántos son los eventos simples del registro de sangre de una persona?

- a) 4                      b) 8                      c) 12                      d) 16

Respuesta. \_\_\_\_\_

3. Tomando en cuenta cómo se registra la sangre en su nomenclatura completa, por ejemplo, *A Rh positivo*, ¿cómo son los eventos mencionados en la pregunta anterior?

- a) Complementarios
- b) Mutuamente excluyentes
- c) Independientes
- d) Ninguno de los anteriores

Justifica tu respuesta. \_\_\_\_\_

La hemofilia es una enfermedad que se desarrolla principalmente en los varones y es transmitida por la madre. Las mujeres portadoras del gen defectuoso raramente la desarrollan. Supongamos que se registra el sexo de una persona o si la persona padece hemofilia.

4. Al escoger a alguien dentro de una población, ¿la probabilidad de que una persona padezca hemofilia cambia dependiendo de si la persona es varón? \_\_\_\_\_

5. ¿Qué probabilidad es mayor: que la persona padezca hemofilia o que sea varón? Explica. \_\_\_\_\_

## UNIDAD 2: Lanzamiento de monedas

Considera lanzar una moneda dos veces, y define dos eventos de la siguiente manera:  
 Evento A: observar sol en el primer lanzamiento.  
 Evento B: observar sol en el segundo lanzamiento.

1. Señala con una ✓ si las siguientes afirmaciones son falsas (F) o verdaderas (V).

La probabilidad de que ocurra el evento A es $\frac{1}{2}$ , y la probabilidad de que ocurra el evento B es $\frac{1}{2}$ .	F	V
Si ocurre el evento A, seguramente ocurrirá el evento B.	F	V
Los eventos A y B son independientes.	F	V
La probabilidad del evento B no cambia la ocurrencia del evento A.	F	V
Si ocurre el evento B, seguramente ocurrió el evento A.	F	V

Sea el evento C obtener águila en el tercer lanzamiento.

2. ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra el evento C? Justifica tu respuesta. \_\_\_\_\_

3. ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra el evento C si antes ocurren los eventos A y B? Justifica tu respuesta. \_\_\_\_\_

4. Después de cuatro lanzamientos, ¿cuál es la probabilidad de que se obtengan tres águilas? Describe lo que hiciste para obtener la respuesta. \_\_\_\_\_

5. ¿Cuál es la probabilidad de que se obtengan tres soles?

Luego de resolver la evaluación, expongan sus respuestas. Si las tuyas no coinciden con las de tus compañeros, argumenta las estrategias que seguiste. Con ayuda del profesor lleguen a conclusiones.



Revisen la tarea y compartan con el grupo sus respuestas. Con la ayuda de su profesor lleguen a consensos y contesten las preguntas.

- ¿Cuál es la expresión algebraica que modela cada una de las funciones?
- ¿Qué programa han utilizado para modelar las coordenadas de cada lista?
  - Si no fuera posible utilizar los software propuestos, ¿cómo obtendrían el resultado en cada caso?

## Funciones lineales en una hoja electrónica de cálculo



1. Para llevar a cabo la siguiente actividad necesitarán una computadora con hoja electrónica de cálculo.

- En una hoja electrónica de cálculo escriban las listas de coordenadas 1 y 2 de la tarea, como se muestra en la figura 1.
  - En el menú "Insertar", elijan la opción "Gráfico" y seleccionen "Dispersión" como se muestra en la figura 2.

	A	B	C	D	E	F
1						
2						
3						
4	2		4	2		4
5	4		6	3		6
6	6		8	4		8
7						
8						
9						
10						
11						

Figura 1

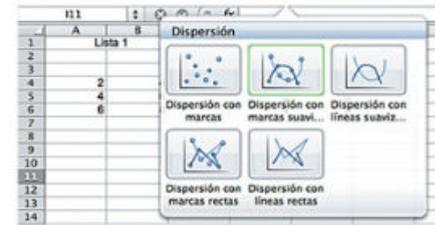


Figura 2

- Seleccionen el tipo de gráfico; en seguida aparecerá un recuadro en blanco, como se muestra en la figura 3.
  - Sobre este den clic con el botón derecho del ratón y se activará un nuevo menú: elijan la opción "Seleccionar datos".
  - Se abrirá una ventana que lleva por nombre "Seleccionar datos de origen", ahí elijan la acción "Agregar".
  - Den clic en la celda que corresponde a "Nombre:" y seleccionen la celda donde escribieron Lista 1.
  - Den clic en la celda que corresponde a Valores de X y seleccionen las celdas A2 hasta A9.
  - Den clic en la celda que corresponde a Valores de Y y eliminen la expresión  $=\{1\}$  después seleccionen las celdas B2 hasta B9 y den clic en Aceptar.
- De la gráfica que obtuvieron, ¿qué datos se ubicaron sobre el eje de las abscisas?



Figura 3

© Nueva México

b) Repitan lo realizado en el inciso a, pero ahora introduzcan los valores de la lista 2.

c) Analicen los datos de las listas 1 y 2 y sus gráficas correspondientes.

d) Seleccionen los datos de la lista 2, después ubiquen el cursor en el contorno de la esquina derecha inferior de la celda E6 y arrastren el cursor hacia la parte de arriba y posicionen el cursor en la celda E2, tal como se muestra en la figura 4.

C	D	E	
	Lista 2		
	2	4	
	3	6	
	4	8	

Figura 4

- ¿Qué datos muestra la hoja de cálculo en las celdas D2, E2 y D3, E3?
  - ¿Qué sucede con la gráfica?
- e) Repitan lo hecho en el inciso d para la lista 1 y respondan las preguntas.
- f) Seleccionen cada lista y arrastren los datos hasta A9, B9 y D9, E9, ¿qué sucede con las gráficas?
- Con base en las gráficas resultantes, ¿pueden identificar a simple vista qué tipo de función representan los datos y sus gráficas correspondientes de las listas 1 y 2?
  - Encuentren las expresiones que representan los datos de las listas 1 y 2. Verifiquen que sean correctas.

## Funciones lineales en geometría dinámica

2. Para llevar a cabo la siguiente actividad necesitarán una computadora que tenga instalado GeoGebra.

Si no lo tienen descarguen gratis este software de [www.geogebra.org/download](http://www.geogebra.org/download) y hagan lo que se les pide.

a) Al abrir el programa, visualizarán en la parte superior izquierda de la pantalla dos secciones "Vista Algebraica" y "Vista Gráfica".

- En el menú principal del programa den clic en el comando "Vista" y seleccionen la opción "Hoja de Cálculo". Aparecerá una pantalla como se muestra en la figura 5.

- En las celdas de la hoja electrónica A1, B1; A2, B2; A3, B3 capturen las coordenadas de la lista 1 con base en la figura 1.
- Capturen las coordenadas de la lista 2 en las celdas C1, D1; C2, D2; C3, D3. Con base en la figura 1.

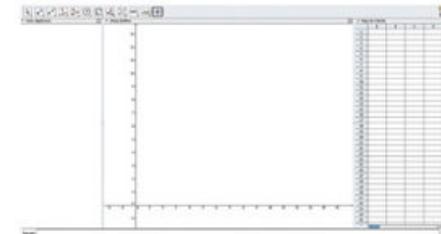
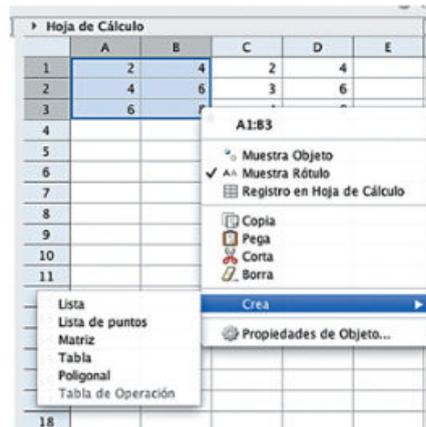


Figura 5

© Nueva México

- ii. Seleccionen los datos que corresponden a la lista 1 y con el botón derecho del ratón den clic; se mostrará un menú, elijan "Crea" y seleccionen "Lista de puntos", como se muestran en la figura 6. Utilicen  para poder mover la "Vista Gráfica".
  - ¿Qué es lo que se muestra en la "Vista Algebraica" del programa? ¿Y en la "Vista Gráfica"?
  - ¿Cómo se relacionan los puntos  $A = (2,4)$ ,  $B = (4,6)$  y  $C = (6,8)$  que se muestran en la "Vista Algebraica" con respecto a lo que se muestra en la "Vista Gráfica"?

Figura 6



- Den clic en el icono  y en "Vista Gráfica" seleccionen con el puntero el punto A y elimínenlo. ¿Qué sucede en la "Vista Algebraica" y en la hoja electrónica?
- Opriman las teclas  $ctrl + z$ ; ahora, eliminen el dato que se encuentra en B2 de la hoja de cálculo. ¿Qué sucede en la "Vista Algebraica" y en la "Vista Gráfica"? De nuevo opriman las teclas  $ctrl + z$ .

- iii. Para la lista 2, realicen lo que hicieron en el inciso ii.
  - ¿Qué puntos se ubicaron para la lista 2?
  - ¿Qué tienen en común los puntos A y D que se muestran en la "Vista Algebraica"?
- iv. Seleccionen la función "Recta que pasa por Dos puntos", como se muestra en la figura 7.



Figura 7

- Señalen los puntos B y C. ¿Qué ocurrió en la "Vista Gráfica"?
  - ¿Qué nuevo objeto se muestra en la "Vista Algebraica"?
  - La expresión algebraica que se agregó ¿corresponde a la que obtuvieron en grupo?
- v. Escriban esta nueva expresión en su cuaderno de la forma  $y = mx + b$ .
    - ¿Qué valores adquieren  $b$  y  $m$ ?
    - Si el valor de  $b$  lo ubican en la "Vista Gráfica", ¿a qué coordenada corresponde?
  - vi. Repitan lo hecho en el inciso iv para los puntos E y F y respondan las preguntas, escriban en su cuaderno la expresión que da el programa en la "Vista Algebraica" para que quede de la forma  $y = mx + b$ .

3. Compartan con el grupo sus resultados y con la ayuda de su profesor lleguen a conclusiones. Después realicen las siguientes actividades.

- a) Retomen la hoja de cálculo y hagan lo siguiente:
  - i. Renombren lo que han escrito en la celda A1 y llámenlo función 1.
    - Ubíquense en la celda A2, escriban el valor 0, en A3 escriban 1, en A4 escriban 2, así hasta A9 con el valor de 7.
    - En la celda A12, escriban  $x$ , y en la celda B12 escriban  $y$ .
    - En la celda B14 escriban la expresión  $y = mx + b$
    - En la celda A15 escriban " $m =$ "
    - En la celda A16 escriban " $b =$ "
  - ii. Repitan lo hecho en el inciso i, para la lista 2. Apóyense en la imagen 8.
  - iii. Para la función 1, escriban en la celda B15 el valor  $-1$  (parámetro  $m$ ) y en la celda B16 escriban el número 50 (parámetro  $b$ )

	A	B	C	D	E	F
1	función 1			función 2		
2	0	50		0	50	
3	1	40		1	51	
4	2	48		2	52	
5	3	47		3	53	
6	4	46		4	54	
7	5	45		5	55	
8	6	44		6	56	
9	7	43		7	57	
10						
11						
12	$x$	$y$		$x$	$y$	
13						
14		$y = mx + b$			$y = mx + b$	
15	$m =$	-1		$m =$	1	
16	$b =$	50		$b =$	50	
17						

Figura 8

- En la celda B2 escriban " $=\$B\$15*A2+\$B\$16$ " y den Enter.
  - Den clic otra vez en la celda B2 y ubiquen el cursor en la esquina izquierda inferior y arrastren el cursor hasta la celda B9, figura 8.
- iv. Hagan lo mismo para la función 2, consideren que el parámetro  $m$  es 1 (E15) y el parámetro  $b = 50$  (E16) apóyense en la figura 8.
  - v. ¿Cómo son las gráficas que se obtienen para las funciones 1 y 2? Escriban un problema que pueda modelarse con la función 1 y con la función 2 respectivamente.
- b) Introduzcan los parámetros  $m = 0$  y  $b = 5$ , para la función 1 y para la función 2,  $m = 0.1$  y  $b = 5$ 
    - i. ¿Qué sucede con las gráficas?
    - ii. ¿Cómo es la gráfica de la función 1?
  - c) Escriban los parámetros correspondientes para la función 1 y 2 de manera que  $m$  de la función 1 sea 10 veces mayor que el parámetro  $m$  de la función 2, y que además ambos casos sean de proporcionalidad.
    - i. ¿Cuál es el valor del parámetro  $m$ , en cada función?
  - d) En GeoGebra escriban los datos de las funciones que trabajaron en la hoja de cálculo. Apóyense en la segunda actividad que hicieron en equipos.
    - Retomen el caso donde la función 1 es  $y = 0x + 5$  y la función 2 es  $y = 0.1x + 5$ .
    - De la función 2 varíen el parámetro  $m$ , de manera que sea menor; prueben con cinco valores. ¿Cuál es el comportamiento de la función con respecto a la función 1?
    - De la función 2 varíen el parámetro  $m$ , de manera que este sea cada vez mayor; prueben con cinco valores. ¿Cuál es el comportamiento de la función con respecto a la función 1?

Concluyan las ventajas que le encuentran a uno y a otro software. Registren sus conclusiones en su cuaderno.





### Pitágoras

(Samos, Grecia actual, alrededor de 572 a. de C. - Metaponto, Italia actual, 497 a. de C.)

Filósofo y matemático griego. Hay pocas referencias sobre su vida que pueden considerarse auténticas. En general, se cree que pasó su infancia en Samos y de ahí viajó por diferentes sitios del mundo antiguo hasta establecerse en Crotona (en la Italia actual), donde fundó una escuela filosófica y religiosa con la que atrajo numerosos seguidores.

La hermandad pitagórica estuvo rodeada de misterio; al parecer, los discípulos debían esperar años para conocer a Pitágoras y se les imponía conservar en secreto sus enseñanzas. Las mujeres podían formar parte del gremio (lo cual era poco común en la época).

Pitágoras y su comunidad desarrollaron toda una filosofía en torno al concepto de número, al cual consideraban la esencia de la Naturaleza, el principio de toda proporción, orden y armonía en el Universo.

Entre las investigaciones matemáticas de los pitagóricos se cuentan el estudio de los números pares e impares, los números primos, y los cuadrados, esenciales en la teoría de los números, con los cuales establecieron una base científica para las matemáticas. En geometría, su gran descubrimiento es el teorema de la hipotenusa, hoy conocido como teorema de Pitágoras, que establece que el cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados.

## Bloque

# 2

### Aprendizajes esperados

- Explica el tipo de transformación (reflexión, rotación o traslación) que se aplica a una figura para obtener la figura transformada. Identifica las propiedades que se conservan.
- Resuelve problemas que implican el uso del teorema de Pitágoras.

En el diseño y elaboración de los rehiletes se puede apreciar la aplicación de la simetría central y la rotación de figuras.

# Factorización

**Eje:** Sentido numérico y pensamiento algebraico  
**Tema:** Patrones y ecuaciones  
**Contenido:** Uso de ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización



TRS

**Educación para la salud.** La práctica constante de cualquier deporte aporta grandes beneficios a la salud en los aspectos fisiológicos (sistema circulatorio, aparato locomotor, metabolismo...), psicológicos y sociales. Hay diversos tipos de deportes. Infórmate sobre alguno que te interese y practícalo.

## Glosario

**factorizar.** Escribir un número o una expresión algebraica como el producto de sus factores.

### 1. Factor común

1. Resuelvan los problemas. Respondan en su cuaderno.

A Antonio le gusta el surf y quiere saber cuánto tarda un surfista desde el momento en que la ola lo empieza a elevar hasta que lo baja. Su amigo Aurelio le comentó que la expresión algebraica que sirve para modelar la situación es:  $-5t^2 + 60t = 0$ , donde  $t$  es el tiempo en segundos.

- ¿Qué tipo de expresión es la que modela el problema?
- ¿Cuál de los siguientes procedimientos consideran que ayuda a determinar el tiempo que tarda en subir y bajar de la ola un surfista?

Procedimiento 1	Procedimiento 2	Procedimiento 3
Por tanteo: sustituir $t$ con varios números hasta que se cumpla la igualdad.	Realizar un registro en una tabla de datos.	Usar operaciones inversas.

- ¿Qué valores debe adquirir  $t$  para que se cumpla la igualdad?
- Describan cada operación que realizaron para resolver el problema.

Alfonsina tiene que determinar las medidas de los lados de un rectángulo, cuya área es igual a cinco veces la medida de uno de sus lados al cuadrado, esto es igual a 60 veces la medida del mismo lado.

- ¿Cuál es la expresión algebraica que modela la condición dada?
- ¿Cuál es la medida de los lados del rectángulo?
- Describan las operaciones que utilizaron para resolver el problema.
- Comparen la expresión obtenida con la expresión del problema anterior. ¿Cómo son entre sí?

■ Con ayuda del profesor revisen, justifiquen y validen los resultados de los problemas anteriores.

- ¿Es posible utilizar un procedimiento distinto del que utilizaron para resolver los problemas planteados?
- Escriban en su cuaderno lo que entienden por **factorizar** por el término común.

■ Comparen sus procedimientos con los de otros equipos.

© Nueva México

2. Consideren los problemas anteriores y respondan en su cuaderno.



En el problema de Antonio, si el número 60 se escribe como el producto de dos factores en los que uno sea 5, ¿cuál será el otro factor? Justifiquen.

- Considerando lo anterior, ¿qué factor común pueden tener los dos términos de la expresión algebraica  $-5t^2 + 60t = 0$ ?
- Con base en la factorización del 60 y el factor común, escriban la expresión del problema como el producto de dos factores; utilicen la propiedad distributiva:  $ab + ac = a(b + c)$ . ¿Cuántos factores obtuvieron?

Consideren la operación:  $(8)(7) = 56$  y que al dividir ambos miembros de la igualdad entre  $8 \left( \frac{(8)(7)}{8} = \frac{56}{8} \right)$ , tenemos que  $7 = 7$ .

- En la expresión algebraica que factorizaron, dividan ambos miembros de la igualdad entre  $(t - 12)$ . ¿Qué expresión obtuvieron? ¿Qué valor adquiere  $t$ ?
  - Si ahora dividen ambos lados de la igualdad entre  $-5t$ , ¿qué expresión obtienen?, ¿cuál es el valor de  $t$ ?
  - ¿Los valores anteriores coinciden con su respuesta al problema?

Para el problema de Alfonsina, describan en cada paso del procedimiento lo que se realiza para determinar el valor de la literal.

	Procedimiento para resolver	Descripción del procedimiento
1	$5x^2 = 60x$	Ecuación original
2	$5x^2 = (12)(5)x$	
3	$5xx = (12)(5)x$	
4	$\frac{5xx}{5x} = \frac{(12)(5)x}{5x}$ , $x \neq 0$	
5	$x = 12$	

- ¿Qué diferencias encuentran respecto de la forma como resolvieron el problema? ¿Cómo son entre sí las expresiones algebraicas que obtuvieron al factorizar cada problema?
- Lean la siguiente información y complementen la que escribieron al final de la página anterior.

## Factorización de una ecuación cuadrática



La factorización de una ecuación cuadrática consiste en agrupar todos los términos en un lado de la igualdad y escribirlos como producto de dos factores. Para determinar las soluciones de la ecuación después de factorizar, se divide en ambos miembros de la igualdad entre el primer factor y se determina un valor para la literal; posteriormente, se dividen ambos miembros por el segundo factor y se determina el otro valor.

Por ejemplo, cuando los términos de una ecuación de segundo grado tienen un factor común:  $6x^2 - 6x = 0$ , se puede factorizar como:  $6x(x - 1) = 0$ . De la expresión factorizada se dividen entre  $6x$  ambos miembros de la igualdad, dando como resultado  $x - 1 = 0$ , por tanto,  $x = 1$ . El otro valor que puede adquirir  $x$  es cero.

Es importante saber que ningún número, ecuación o expresión algebraica puede ser dividida entre cero, pues si ese fuera el caso, se dice que se indetermina; es decir, no hay un resultado.

© Nueva México



3. Determina el valor o valores de la incógnita en cada caso, y si se trata de ecuaciones cuadráticas. Justifica tus respuestas.

- a)  $(9w^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16w^2} - 3w$       b)  $p^2 + 6p = 2p^2 + 5p$   
 c)  $2.8y^2 + y(1.4y - 8.4) = 0$       d)  $\frac{3}{4}q + \frac{6}{5}q^2 = -\frac{2}{10}q^2 + \frac{3}{2}q$

• ¿Qué ecuaciones se pueden factorizar por algún término común?

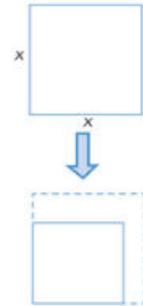
■ Compara tus respuestas con las de tus compañeros.



### Analiza y resuelve el problema.

Daniela tiene una fotografía cuadrada y la quiere colocar en un marco, pero necesita quitarle cierta longitud en sus dos dimensiones, como se muestra, de manera que la expresión que modele su área sea  $x^2 - 8x + 15$ .

- a) ¿Qué expresiones representan las dos dimensiones del rectángulo, es decir, las medidas de la fotografía recortada?  
 b) Verifica que al multiplicar las expresiones anteriores (la base por la altura) obtienes el área:  $x^2 - 8x + 15$ .



## 2. Factorizar trinomios cuadrados



1. Resuelvan los problemas. Justifiquen sus respuestas.

Enrique escribió la expresión  $4x^2 - 40x + 100$  para modelar el área de un cuadrilátero al que se le quita cierta área en cada uno de sus lados, mientras que Bibi escribió  $x^2 - 10x + 25$ .

- a) ¿Ambas expresiones son las mismas? ¿Por qué? \_\_\_\_\_  
 b) Representen gráficamente la expresión de Bibi.  
 c) Al factorizar la expresión escrita por Bibi, ¿cuántos términos tiene cada factor? \_\_\_\_\_  
 d) ¿Es posible factorizar la expresión escrita por Enrique? \_\_\_\_\_  
 e) ¿Cuántos términos tiene cada factor? \_\_\_\_\_

Aurelio escribió la expresión  $x^2 + 15x + 50$  para representar el área de un cuadrado al que se agrega cierta área en sus dos dimensiones.

- a) Modelen gráficamente la figura final de Aurelio.  
 b) Factoricen la expresión escrita por Aurelio. \_\_\_\_\_  
 c) ¿Cuántos términos tiene cada factor? \_\_\_\_\_  
 d) ¿Qué representan los factores obtenidos? \_\_\_\_\_

■ Comparen sus respuestas con las de otros compañeros y registren sus conclusiones.



2. Retomen los problemas anteriores y resuelvan.

a) De la expresión escrita por Enrique, ¿cuál es la raíz cuadrada del primer término y cuál la del tercer término? \_\_\_\_\_

• ¿Cuál de las siguientes expresiones modela el área del cuadrilátero?

- i.  $(2x - 10)(2x + 10)$       ii.  $(2x + 10)(2x - 10)$   
 iii.  $(2x + 10)(2x + 10)$       iv.  $(2x - 10)(2x - 10)$

• Describan cómo se obtiene el término  $-40x$  de la expresión escrita por Enrique.

b) De la expresión escrita por Bibi, ¿cuál es la raíz cuadrada del primer término? \_\_\_\_\_ ¿Cuál es la raíz cuadrada del tercer término? \_\_\_\_\_

• A partir de lo anterior determinen, cuál de los siguientes productos modela la expresión escrita por Bibi.

- i.  $(x - 5)(x + 5)$       ii.  $(x + 5)(x - 5)$   
 iii.  $(x + 5)(x + 5)$       iv.  $(x - 5)(x - 5)$

c) ¿Qué operación tendrían que realizar para simplificar la expresión escrita por Enrique, de manera que quede igual a la de Bibi? \_\_\_\_\_

d) De la expresión escrita por Aurelio, ¿cuál es la raíz cuadrada del primer término? \_\_\_\_\_

• ¿Qué números cumplen con la condición de que al multiplicarse resultan el tercer término (50) y al sumarse o restarse, dan el coeficiente del segundo término, es decir, 15? \_\_\_\_\_

• ¿Cuál de los productos modela la expresión escrita por Aurelio?

- i.  $(x - 5)(x + 10)$       ii.  $(x + 5)(x - 10)$   
 iii.  $(x + 10)(x + 5)$       iv.  $(x - 5)(x - 10)$

• Describan de qué manera se obtiene el término  $15x$  que se muestra en la expresión escrita por Aurelio.

3. Revisen su tarea y, con ayuda del profesor, resuelvan en su cuaderno.

a) ¿Qué hicieron para determinar la longitud de los lados de la fotografía?

b) Si el área de otro marco, en el cual Daniela quiere colocar otra fotografía, se modela con la expresión  $x^2 - 7x + 12$ , ¿cuántos centímetros disminuyó de largo y de ancho la fotografía?

c) El área del rectángulo anterior es  $x^2 - 7x + 12 = 702 \text{ cm}^2$ . Igualen a cero la expresión y calculen la medida del largo y del ancho la fotografía recortada.

d) ¿Qué procedimientos siguieron para encontrar la solución?



4. Analicen la información y realicen lo que se indica.

- ¿El problema de tarea tiene la misma estructura que el problema de Enrique y Bibi o que el problema de Aurelio? ¿Por qué?
- En el problema de Bibi la expresión que representa el área, igualada a cero, es  $x^2 - 10x - 56 = 0$ . Factoricen la expresión.
  - ¿Qué valores adquiere  $x$ ? ¿Cuál es el área de la figura final?
- En el problema de Aurelio, determinen el valor de  $x$ , consideren que el área total es igual a  $500 \text{ cm}^2$ .
  - Registren en su cuaderno cómo encontrar las soluciones de una ecuación cuadrática mediante factorización.

### Trinomios

Expresiones de la forma  $x^2 + 2xy + y^2$  o  $x^2 - 2xy + y^2$  son trinomios cuadrados perfectos, de suma o resta, y se pueden factorizar como  $(x + y)(x + y)$  y  $(x - y)(x - y)$  respectivamente.

Expresiones de la forma  $x^2 + (a + b)x + ab$  son trinomios cuadrados no perfectos y se factoriza como  $(x + a)(x + b)$ . Otro caso es el de la forma  $x^2 - x(a - b) - ab$  y al factorizarlo queda como  $(x - a)(x + b)$ .

- De las expresiones trabajadas en la lección, determinen cuáles son un trinomio cuadrado perfecto y cuáles no lo son.

### Practica

1. Factoriza las siguientes expresiones algebraicas.

- |                       |                      |                      |
|-----------------------|----------------------|----------------------|
| a) $d^2 - 6d - 27$    | b) $q^2 - 22q + 121$ | c) $6g^2 - 450g$     |
| d) $16s^2 - 32s + 16$ | e) $81u^2 - 117u$    | f) $4w^2 - 20w + 24$ |



**Analiza lo que se solicita y responde en tu cuaderno.**

Se tiene una loseta a la cual es necesario quitar una superficie en forma cuadrada, de tal forma que el área queda expresada como  $x^2 - 49$ .

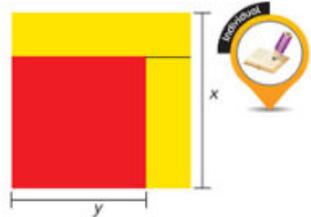
- ¿Qué expresión modela las medidas de los lados de la loseta?

### 3. Factorización de la diferencia de cuadrados

1. Analiza la información y resuelve. Justifica tus respuestas.

Israel recicla papel, vidrio y plásticos y con ello fabrica cuadros como la figura que se muestra a la izquierda. Como los clientes piden la parte roja de diferente tamaño, usa la expresión  $x^2 - xy + xy - y^2$  para modelar el área amarilla.

- ¿Cómo se puede simplificar la expresión anterior? \_\_\_\_\_



© Nueva México

TRS



**Educación ambiental.** Una práctica de cuidado del ambiente consiste en adquirir productos empacados con materiales reciclables. Con ello se contribuye a reducir el consumo de recursos naturales.

- Si con los rectángulos amarillos que se formaron en la ilustración, construyes solo uno, ¿qué expresiones modelan la medida de sus lados?
- Escribe la medida de los lados del cuadro como un producto. ¿Los factores son equivalentes a la expresión  $x^2 - xy + xy - y^2$ ?

2. Factoricen las siguientes expresiones algebraicas.

- $16k^2 - 64$     •  $t^2 - 81$     •  $9j^2 - 16$     •  $25f^2 - 100$

- ¿Cuántos términos tiene cada factor? \_\_\_\_\_
  - ¿Por qué los signos que separan a los términos de cada factor no pueden ser iguales? \_\_\_\_\_
  - ¿Alguna de las expresiones es equivalente a  $p^2 - 4$ ? \_\_\_\_\_
- Revisen en grupo su tarea y las actividades 1 y 2.

3. Analicen la información y respondan.

### Diferencia de cuadrados

Las expresiones algebraicas que se modelan de la forma  $x^2 - xy + xy - y^2 = x^2 - y^2$  y se factorizan como  $(x - y)(x + y)$ . A esto se le conoce como diferencia de cuadrados.

- ¿Qué diferencia hay entre las expresiones que han factorizado con respecto a las que se factorizan por medio del término común?
- ¿Qué diferencia hay entre las expresiones que han factorizado con respecto a las que factorizan a un trinomio cuadrado?

### Validemos lo aprendido

1. Resuelvan en su cuaderno lo que se solicita.

La expresión algebraica  $4x^2 - 16$  modela el área de un rectángulo.

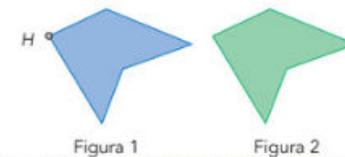
- Representa gráficamente el problema.
- ¿Cuáles son los factores de dicha expresión?
- ¿Es necesario factorizar el coeficiente del primer término?
- Dadas las condiciones del problema, ¿por qué la expresión  $x^2 - 4$  modela el problema?

- Con la ayuda de su profesor, validen sus respuestas con el resto del grupo.

**Analiza y resuelve el problema. Escribe las respuestas en tu cuaderno.**

Mide lo que consideres pertinente en las figuras 1 y 2 y contesta:

- ¿Las figuras son iguales? Justifica.
- ¿Cómo es la distancia entre los vértices correspondientes?



TIC



Entra al siguiente sitio web para que puedas practicar la factorización de expresiones algebraicas usando baldosas.  
[nvm.usu.edu/es/nav/frames\\_asid\\_189\\_g\\_2\\_t\\_2.html?open=activities&from=topic\\_t\\_2.html](http://nvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_189_g_2_t_2.html?open=activities&from=topic_t_2.html)  
 (consulta: 22 de diciembre de 2016, 10:30 horas)



# Propiedades de algunas isometrías

Eje: Forma, espacio y medida

Tema: Figuras y cuerpos

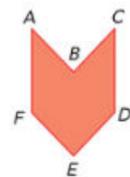
Contenido: Análisis de las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras

## 1. Traslaciones



### 1. Haz las actividades y responde.

Jesús pintará una cenefa como la que se muestra a la izquierda. La figura  $ABCDEF$  es el molde que utilizará.



- Numera las figuras de la cenefa; inicia de arriba hacia abajo.
- Nombra los vértices de las figuras de la siguiente manera:
  - Figura 1:  $A', B', C', D', E', F'$
  - Figura 2:  $A'', B'', C'', D'', E'', F''$
  - Figura 3:  $A''', B''', C''', D''', E''', F'''$
- Une con segmentos los vértices correspondientes de las figuras 1 y 2.
- Mide los segmentos y completa la tabla.

Segmentos	$A'A''$	$B'B''$	$C'C''$	$D'D''$	$E'E''$	$F'F''$
Medida (cm)						

- ¿Cómo son los segmentos entre sí? \_\_\_\_\_
- Une con segmentos los vértices correspondientes de las figuras 2 y 3. Médelos y compáralos con los obtenidos en el inciso anterior.
    - ¿Cómo es la distancia entre los vértices correspondientes de las figuras en ambos casos? \_\_\_\_\_
  - ¿Cómo son las medidas de los ángulos internos de las figuras 1, 2 y 3? \_\_\_\_\_
  - ¿Cómo son los lados correspondientes de las figuras 1, 2 y 3? \_\_\_\_\_
  - ¿Cómo son las figuras 1, 2 y 3: semejantes o congruentes? \_\_\_\_\_
  - Analiza la orientación de los vértices  $E', E''$  y  $E'''$ , y determina la orientación que tienen las figuras. \_\_\_\_\_
    - ¿Sucede lo mismo con los otros vértices correspondientes de las figuras? ¿Por qué? \_\_\_\_\_

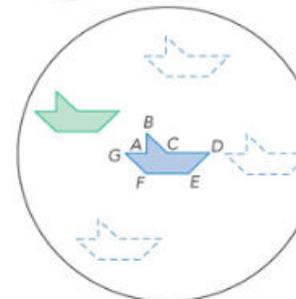
© Nueva México

- ¿Cuánto se movió la figura 1 respecto de la figura 2, y cuánto se movió la figura 2 respecto de la figura 3? \_\_\_\_\_
- Si las figuras 2 y 3 se trazan con respecto de la figura 1, ¿qué movimiento se aplicó a la figura 1? Argumenta. \_\_\_\_\_

### 2. Resuelvan el problema y respondan.

Joshua fabricará un reloj en el que el segundero tendrá un barco en el centro y otro en la punta de igual tamaño y forma.

La circunferencia de la derecha modela el reloj; la figura  $ABCDEFG$  es el barco que estará fijo en el centro. Las figuras punteadas indican el recorrido que seguirá el segundero.



- Numeren del 1 al 4, en sentido horario, las figuras que modelan el recorrido del segundero; comiencen por la figura verde.
  - En cada figura, ubiquen los vértices correspondientes a la figura original.
  - ¿Las figuras 1, 2, 3 y 4 son congruentes? \_\_\_\_\_
    - ¿Cómo son las figuras respecto de la figura original? \_\_\_\_\_
  - Determinen el centro de la circunferencia. ¿Qué vértice de la figura original coincide con el centro de la circunferencia? \_\_\_\_\_
    - Tracen los segmentos que unen el vértice que se ubica en el centro de la circunferencia con sus correspondientes en las figuras 1, 2, 3 y 4. ¿Los segmentos son congruentes? \_\_\_\_\_
    - Tracen los segmentos que unen los vértices de la figura original con sus correspondientes en cada figura y médanlos. ¿Las medidas de los segmentos coinciden con las que obtuvieron en la figura anterior? \_\_\_\_\_
  - Ubiquen los vértices correspondientes a  $D$  en cada figura, ¿en algún momento el vértice cambia de orientación? Argumenten. \_\_\_\_\_
- ### 3. Revisen las actividades anteriores y respondan en el cuaderno.
- ¿En qué casos las figuras conservaron sus propiedades?
  - ¿En qué casos las figuras cambiaron de orientación?
  - ¿Qué tipo de movimiento se realizó en la cenefa? ¿Y en el segundero? Argumenten.
  - ¿Es posible afirmar que en ambos casos se aplicó el mismo movimiento? Expliquen.
- Con ayuda de su profesor, discutan y acuerden sus respuestas. Escriban en su cuaderno su conclusión.



© Nueva México



#### 4. Revisen la tarea y respondan en el cuaderno.

- ¿Cómo son las longitudes de los segmentos de los vértices correspondientes de las figuras 1 y 2?
- ¿La figura 2 cambió de dirección respecto de la figura 1? Argumenten.
- Si prolongan cualquier lado de la figura 1 y el correspondiente de la figura 2, ¿cómo son entre sí dichos segmentos?
- ¿Qué movimiento se aplicó a la figura 2 respecto de la figura 1 y el vértice  $H$ ?
- Analicen la siguiente información.

### Traslación

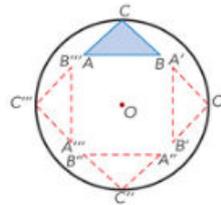


Cuando una figura se mueve en línea recta, conservando sus propiedades (medida de sus lados y ángulos) y la orientación que tiene la figura original se dice que se hizo una **traslación**.

- Con ayuda de su profesor, concluyan si los casos que analizaron en las actividades anteriores corresponden a una traslación y argumenten por qué.



#### Resuelve el problema y registra en el cuaderno tu respuesta.



Joshua fabricará un nuevo reloj con un triángulo en la manecilla del segundero. En el modelo de la izquierda, el triángulo  $ABC$  representa al segundero y los triángulos punteados, el recorrido.

- ¿El movimiento que realizará el triángulo del segundero es una traslación? Argumenta.

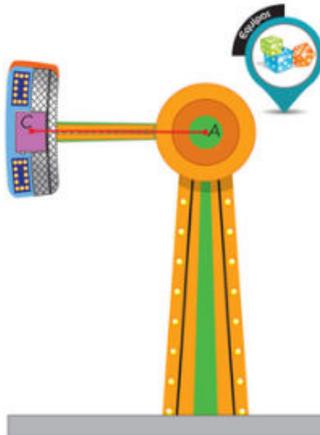
## 2. Rotaciones

### 1. Resuelvan el problema. Escriban sus repuestas en su cuaderno.

Aurelio fue a la feria y observó cómo funciona el juego conocido como "el martillo", que tiene la forma que se muestra en la imagen del lado izquierdo. Aurelio dice que una vez que la canastilla se traslade de un punto a otro, regresará a su punto original, de modo que los puntos  $A$  y  $C$  quedarán alineados verticalmente. El punto de origen es  $A$ .

- ¿Lo expresado por Aurelio es cierto? ¿Por qué?
- Tomen como referencia el lado anaranjado de la canastilla. Consideren  $A$  como punto de origen. ¿Ese lado cambia de posición si la alineación de los puntos  $A$  y  $C$  es horizontal de tal forma que la canastilla está del lado derecho o del izquierdo?
- ¿Cambia de posición si la alineación de los puntos  $A$  y  $C$  es vertical de tal forma que la canastilla esté abajo o arriba del punto  $A$ ?

© Nueva México



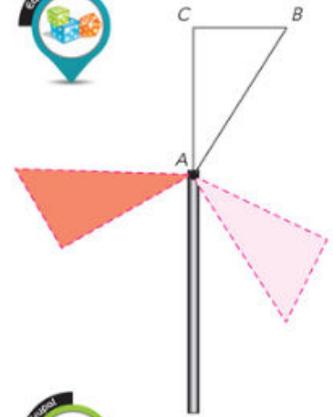
- Con base en las respuestas que dieron en los incisos  $b$  y  $c$ , ¿la canastilla cambia de forma en alguna posición en particular?
- Con base en las respuestas dadas en  $b$  y  $c$ , ¿la distancia desde cualquier punto de la canastilla, incluyendo la que hay del punto  $C$  al punto  $A$ , cambia según la posición en que se encuentre?

- Discutan con base en sus respuestas anteriores y expliquen si podemos decir que lo expresado por Aurelio es una traslación.

### 2. Resuelvan el problema. Escriban sus respuestas en su cuaderno.

La figura de la derecha muestra la hélice ( $\Delta ABC$ ) de un rehilete y el recorrido que debe seguir en sentido horario. Los triángulos punteados modelan algunas posiciones que tomará el triángulo al girar.

- En ambos triángulos, nombren los vértices correspondientes al  $\Delta ABC$ . ¿Cómo son los triángulos  $ABC$ ,  $AB'C'$  y  $AB''C''$ ?
    - ¿La orientación del  $\Delta ABC$  cambia conforme se mueve?
  - ¿Qué vértice es el punto de referencia para el movimiento de  $\Delta ABC$ ?
  - ¿Qué tipo de movimiento describe el recorrido de  $\Delta ABC$ ?
- Con ayuda de su profesor, justifiquen sus resultados.



### 3. Revisen las actividades anteriores y luego respondan lo siguiente.

- En el juego mecánico, ¿cuál es el punto de referencia para que la canastilla gire? \_\_\_\_\_
  - ¿La medida de los lados y ángulos internos de las figuras que analizaron cambiaron en algún caso? \_\_\_\_\_
  - ¿En algún caso las figuras cambiaron de orientación? \_\_\_\_\_
  - ¿Cuántos grados respecto al punto  $A$  gira la canastilla para quedar en forma vertical? \_\_\_\_\_
  - Respecto de la hélice, ¿cuánto debe girar  $\Delta ABC$  para quedar en la posición de  $\Delta AB'C'$  y  $\Delta AB''C''$ , respectivamente? \_\_\_\_\_
  - ¿Con qué punto de referencia se puede decir que  $\overline{AB} = \overline{AB'}$ ? \_\_\_\_\_
- Revisen sus respuestas y lleguen a acuerdos con ayuda de su profesor.

### 4. Retomen el problema que resolvieron de tarea y respondan en su cuaderno.

- ¿La medida de los lados y los ángulos internos del triángulo se modificó al moverse?
- ¿Respecto de qué punto de referencia gira el triángulo?
- ¿Los triángulos cambiaron de orientación?
- ¿Cuántos grados giró cada triángulo respecto de  $\Delta ABC$ ?

© Nueva México



### TIC



Entra a:  
[http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames\\_asid\\_207\\_g\\_1\\_t\\_3.html?open=activities&from=topic\\_t\\_3.html](http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_207_g_1_t_3.html?open=activities&from=topic_t_3.html) y haz las actividades para practicar el contenido de la lección.  
 (consulta: 22 de diciembre de 2016, 13: 55 horas)

- e) ¿Cuál es la distancia del punto de referencia a los vértices de  $\Delta A'B'C'$  y de  $\Delta A''B''C''$ ?
- f) Para validar sus respuestas hagan lo siguiente:
- Tracen la mediatriz de  $\overline{AA'}$ ,  $\overline{BB'}$ ,  $\overline{CC'}$ .
  - Tracen los segmentos de los vértices de los triángulos  $ABC$  y  $A'B'C'$  al punto de intersección de las mediatrices y mídanlos.
  - Mídan los ángulos que se forman en la intersección de las mediatrices con los vértices correspondientes.
- g) Analicen la información.

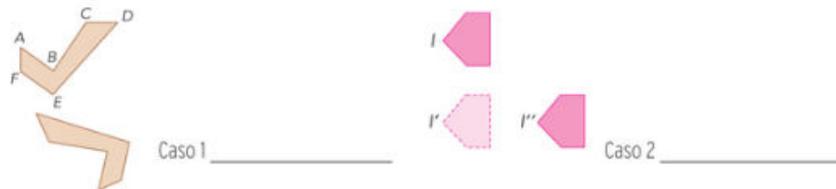
## Rotación

Cuando una figura se mueve con base en un punto de la misma o fuera de esta, de manera que la medida de sus lados y ángulos se conservan, pero su orientación cambia, se dice que a la figura se le ha aplicado una **rotación**. Cuando una figura ha sido rotada y no se indica el punto de rotación, basta con obtener la mediatriz de cuando menos dos vértices correspondientes para encontrarlo.

- Respondan las preguntas en su cuaderno y validen su trabajo.
- ¿Cuál es la diferencia entre traslación y rotación?
- Determinen y argumenten qué tipo de movimiento se realizó en cada uno de los problemas planteados en la lección.

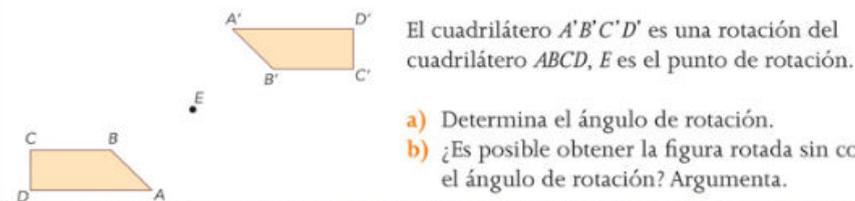
## Practica

1. Analiza los casos e identifica qué movimiento se aplicó en cada uno. Justifica con argumentos geométricos.



- a) En el caso 2, la figura punteada representa un paso intermedio para llegar a la figura final. ¿Qué procedimiento debe seguirse para evitar el paso intermedio? \_\_\_\_\_
- b) Compara tus resultados con los de tus compañeros y, con ayuda del profesor, lleguen a acuerdos.

Observa las figuras y resuelve. Registra tus respuestas en el cuaderno.



El cuadrilátero  $A'B'C'D'$  es una rotación del cuadrilátero  $ABCD$ ,  $E$  es el punto de rotación.

- a) Determina el ángulo de rotación.
- b) ¿Es posible obtener la figura rotada sin conocer el ángulo de rotación? Argumenta.

© Nueva México

## 3. Rotación y traslación

1. Analicen la situación y subrayen el procedimiento correcto.

Areli debe trazar una rotación de  $180^\circ$  de la figura  $ABCD$  respecto de  $E$ , sin utilizar instrumentos de medición de ángulos. ¿Cuál de los siguientes procedimientos puede realizar?

- i. Trazar un segmento perpendicular a  $\overline{CD}$  que pase por  $E$  y nombrarlo a dicha recta  $m$ ; trazar un segmento paralelo a  $\overline{CD}$  que pase también por  $E$  y nombrarlo  $n$ . Trazar el simétrico de  $ABCD$  tomando como eje de simetría a la recta  $n$  y nombrarlo  $A'B'C'D'$ ; después trazar el simétrico de  $A'B'C'D'$  considerando como eje de simetría la recta  $m$ , la figura resultante  $A''B''C''D''$  es la rotación de  $180^\circ$ .
- ii. Trazar una recta que pase por cada vértice y el punto  $E$ . Medir las distancias de cada vértice y el punto  $E$  para trasladarlas en sentido opuesto a la figura. Unir los vértices.
- a) Utilicen ambos procedimientos para validar su respuesta.

- Comenten sus respuestas con sus compañeros y, con ayuda del profesor, lleguen a acuerdos.

2. Revisen su tarea y respondan en el cuaderno. Argumenten.

- a) ¿Cómo determinaron el ángulo de rotación?
- b) ¿Con cuál de los procedimientos anteriores se puede determinar el ángulo de rotación de la figura?
- c) Analicen la información.

## Simetría central

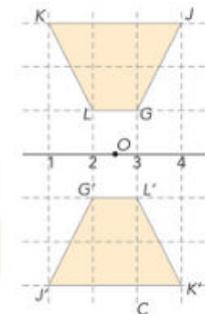
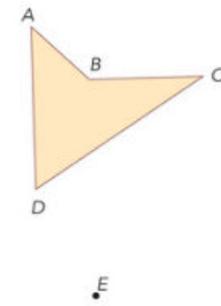
Cuando se aplica una rotación de  $180^\circ$  a una figura respecto de un punto se obtiene un caso especial de rotación que se conoce como **simetría central**, ya que la figura que se invierte conserva la distancia de cada vértice respecto del punto de rotación o centro de simetría y sus propiedades.

- Con base en la información anterior, ¿se puede afirmar que la figura que analizaron de tarea es un caso de simetría central?
- Escriban una conclusión acerca de las propiedades de la rotación y traslación de figuras. Socialícenla y validenla en grupo.

## Validemos lo aprendido

1. Analiza la figura de la derecha y describe al menos tres procedimientos para obtener la figura resultante.

Traza en tu cuaderno un cuadrilátero de 2 cm de lado. Diseña un teselado, aplicando la traslación del cuadrilátero.



# Movimientos en el plano

Eje: Forma, espacio y medida

Tema: Figuras y cuerpos

Contenido: Construcción de diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras

## 1. Movimientos en el plano

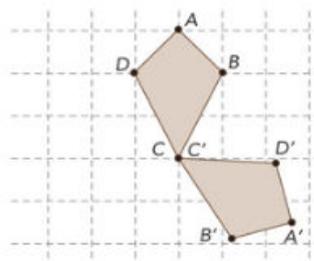
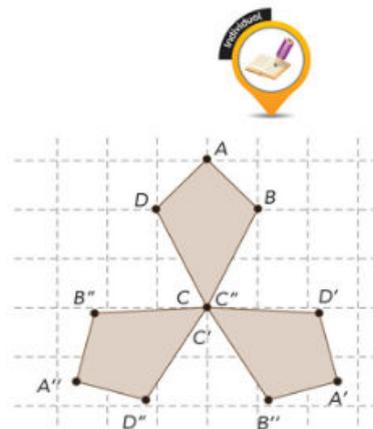
1. Usa tu juego de geometría y haz la siguiente actividad.

Como parte de una tarea, Carlos y sus compañeros deben diseñar un logotipo. El profesor solicitó que el logotipo sea elaborado a partir de aplicar transformaciones a una figura base. Como modelo, les mostró la imagen que se presenta a la izquierda.

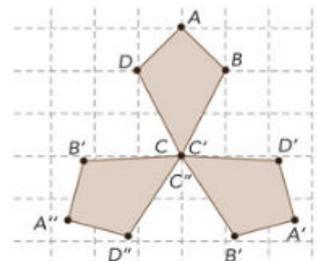
a) ¿Qué figuras geométricas identificas en el modelo? Describe sus características. \_\_\_\_\_

b) ¿Con qué tipo de transformación en el plano piensas que se puede construir el logotipo? Descríbela. \_\_\_\_\_

c) A continuación se muestra la construcción del logotipo. Completa las instrucciones para terminarlo.



El rombo  $ABCD$  es la figura base. A este se le aplica una \_\_\_\_\_ respecto al punto \_\_\_\_\_, de \_\_\_\_\_ grados hacia \_\_\_\_\_, y se obtiene el rombo  $A'B'C'D'$ .



Al rombo  $A'B'C'D'$  se le aplica una \_\_\_\_\_ respecto al punto \_\_\_\_\_, de \_\_\_\_\_ grados hacia \_\_\_\_\_, y se obtiene el rombo  $A''B''C''D''$ .

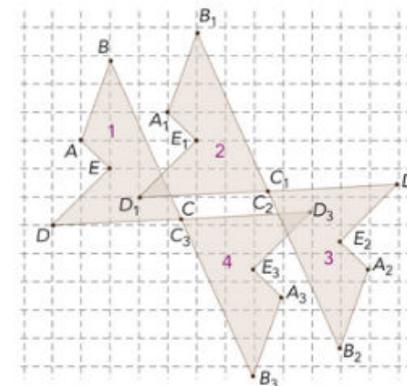
• ¿El logotipo únicamente se puede construir aplicando una sola simetría? Explica. \_\_\_\_\_

• Escribe otra manera de construir el rehilete usando al menos dos simetrías. \_\_\_\_\_

2. Lee y resuelve.

a) El siguiente diseño se construyó a partir del pentágono  $ABCDE$ . Analiza la construcción y contesta falso o verdadero.

- Al pentágono 1 se le aplicó una traslación hacia la derecha. \_\_\_\_\_
- Al pentágono 2 se le aplicó una simetría central respecto al punto  $C_1$ . \_\_\_\_\_
- Al pentágono 4 se le aplicó una simetría central respecto al punto  $C$ . \_\_\_\_\_
- A los pentágonos 1 y 2 se les aplicó una simetría axial. \_\_\_\_\_



b) Con base en lo anterior, escribe un procedimiento para construir el diseño combinando la simetría axial y la central.

3. Analicen los siguientes diseños y describan qué transformaciones se aplicaron para su construcción.

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

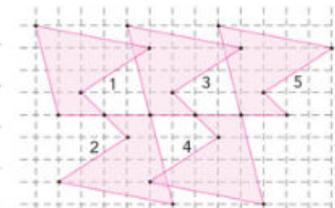
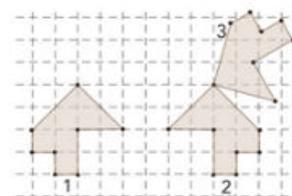
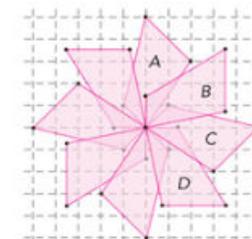
\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_



■ Escriban una conclusión acerca de lo realizado en la que describan cómo con las diversas simetrías se pueden construir diseños, dada una figura base. Valídenla con ayuda de su profesor.



En tu cuaderno, traza un teselado que cumpla con las siguientes condiciones:

- Que la figura base sea un cuadrilátero de 2 cm por lado.
- Que a partir de la figura base se forme el teselado aplicando únicamente rotaciones.

## 2. Patrones y rotaciones



1. Analicen el diseño, consideren que el cuadrado anaranjado es la figura base y resuelvan. Justifiquen sus respuestas.

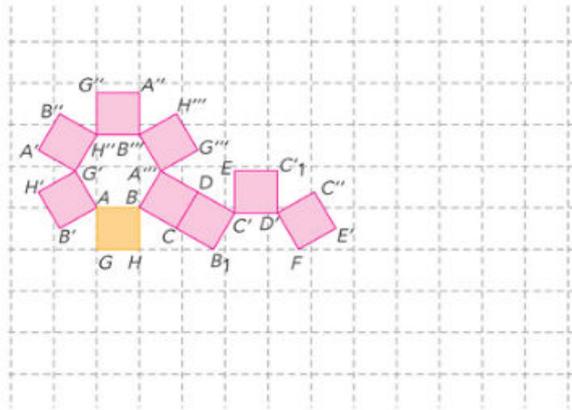
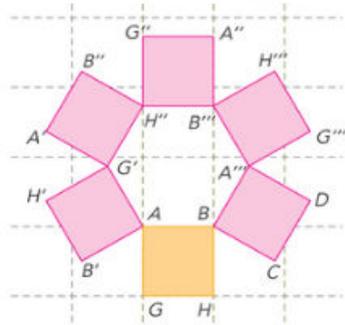
- A partir de la figura base, en sentido horario, nombren los cuadrados como 1, 2, 3... y así sucesivamente.
- ¿El cuadrado 1 es una traslación del cuadrado base? ¿Por qué? \_\_\_\_\_
- ¿Con base en qué punto del cuadrado anaranjado se movió el cuadrado 1? \_\_\_\_\_
- ¿Respecto del cuadrado anaranjado, en qué sentido y cuántos grados se movió el cuadrado 1? \_\_\_\_\_

2. Analicen el patrón y respondan.

En la retícula de la izquierda se muestra el diseño anterior y parte del patrón que se está construyendo con él. El último cuadrado que se trazó es  $D'C'E'F'$ .

- Traza los cuadrados que faltan para concluir el patrón.
  - ¿Qué tipo de movimiento es el que se aplicó a cada cuadrado? \_\_\_\_\_
  - Para mover cada uno de los cuadrados, ¿se utiliza un mismo punto de referencia? \_\_\_\_\_
  - ¿Cuántos grados giró cada cuadrado en la figura? \_\_\_\_\_

- Tracen un segmento de recta que pase por los puntos  $G$  y  $H$  del cuadrado anaranjado. Tomen como eje de simetría el segmento que trazaron y obtengan el simétrico del cuadrado anaranjado y de los cuadrados 1, 2, 3, 4 y 5. (Consideren la misma numeración que emplearon para la actividad 1).
  - ¿Qué tipo de simetría aplicaron? \_\_\_\_\_



3. Revisen las actividades anteriores y respondan lo siguiente en su cuaderno.

- ¿Qué tipo de movimientos se aplicaron a las figuras base para continuar con el patrón inicial?
- ¿Es posible obtener el patrón combinando diferentes tipos de simetría, como la axial y la central? Argumenten.

4. Revisen su tarea y respondan lo siguiente.

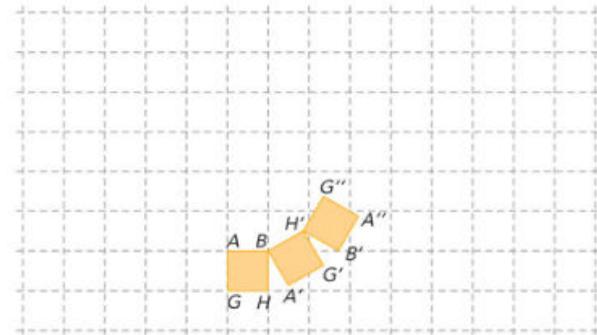
- ¿Obtuvieron un patrón similar al dado en las actividades 1 y 2? \_\_\_\_\_
  - ¿Qué ángulo de rotación consideraron? \_\_\_\_\_
  - ¿El punto de rotación es interno o externo al cuadrado? \_\_\_\_\_
- Discutan en grupo si es posible construir un diseño con una sola simetría o transformación (traslación, rotación o reflexión). Den ejemplos de ello. Concluyan al respecto con ayuda de su profesor.

## Practica



1. Analiza la figura; haz lo que se solicita.

En la retícula se trazará un patrón para armar un mosaico. Considera que el cuadrado  $ABHG$  es la figura base. Completa el patrón y obtén el mosaico.



- ¿Si se rota un cuadrado más y se aplica algún tipo de simetría es posible obtener el patrón que se requiere? ¿Por qué? \_\_\_\_\_
- Si lo anterior es afirmativo, ¿qué tipo de simetría se tendría que utilizar? \_\_\_\_\_
- Explica el procedimiento que debe seguirse. \_\_\_\_\_
- ¿Qué figura se obtiene al completar el patrón? \_\_\_\_\_
- ¿Con base en qué punto de referencia se han rotado los demás cuadrados? \_\_\_\_\_
- ¿Cuántos grados se ha rotado cada cuadrado? \_\_\_\_\_
- Con ayuda del profesor, compara tus resultados con el resto del grupo y concluyan.



### Haz los trazos en el cuaderno.

Traza un triángulo equilátero de 2 cm por lado y diseña un modelo para formar teselados. Utiliza al menos dos de los siguientes movimientos: simetría central o axial, traslación o rotación.

## 3. Movimientos y simetría

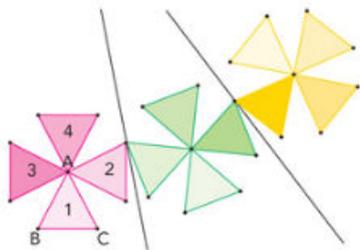


### 1. Hagan los trazos, respondan en el cuaderno y justifiquen.

Identifiquen el patrón dado entre el pentágono verde y el rojo.



- Trasladen el pentágono anaranjado siguiendo el patrón. ¿En qué dirección, distancia y respecto de qué punto se trasladará el pentágono?
- Roten el pentágono  $ABCDE$   $180^\circ$  respecto del punto  $J$ . Al pentágono resultante nómbrenlo 1.
- Si trasladan el pentágono 1 a la derecha, con base en la medida del  $\overline{AB}$ , ¿en qué posición queda el pentágono trasladado?
- Apliquen la simetría axial y tracen los simétricos de los pentágonos que se tienen, prolonguen  $\overline{AB}$  y considérenlo como eje de simetría.
- ¿Es posible aplicar simetría central para trazar el patrón dado? Argumenten.



### 2. Lean y resuelvan en su cuaderno.

La isometría de la izquierda se elaboró aplicando diversas simetrías al triángulo  $ABC$  o número 1.

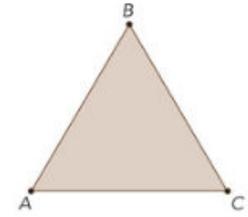
- ¿Qué simetría se aplicó para generar el triángulo 2? ¿Y el 3? \_\_\_\_\_
- ¿Para generar el triángulo 4 se puede aplicar una rotación con respecto al punto  $A$ ? ¿Con qué giro y en qué dirección? \_\_\_\_\_
- Una vez que se formó la cruz color de rosa, ¿qué simetría se aplicó para generar la cruz verde? \_\_\_\_\_
- ¿Para generar la cruz verde es necesario aplicar una simetría por triángulo o se puede aplicar una simetría al conjunto de los cuatro? \_\_\_\_\_
- ¿Qué simetría se aplicó para generar la cruz amarilla? \_\_\_\_\_

© Nueva México



### 3. Revisen su tarea y respondan en el cuaderno.

- Marquen los vértices  $A$ ,  $B$ , y  $C$  del triángulo construido. ¿Qué figura se obtiene si el triángulo  $ABC$  se rota cinco veces  $60^\circ$ , en el sentido que ustedes elijan, considerando su centro de rotación al vértice  $B$ ?
  - Considerando lo anterior, ¿cuántas rotaciones se disminuyen si además se aplican la simetría axial?
  - ¿Es posible trasladar la figura que se obtuvo para que cubra el plano? ¿En qué sentido, dirección y distancia se debe trasladar?
- Con ayuda del profesor, concluyan qué tipos de simetría y movimientos se pueden combinar para formar patrones. Acuerden una conclusión y escríbanla en su cuaderno.



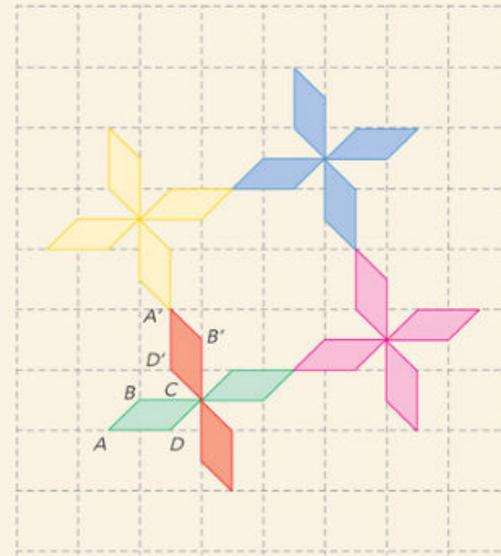
## Validemos lo aprendido



### 1. Analiza y resuelve.

En la construcción de la derecha, el cuadrilátero  $ABCD$  es la figura original.

- ¿Qué movimiento se hizo para obtener  $A'B'CD'$ ? Argumenta. \_\_\_\_\_
- ¿Qué movimientos se aplicaron para obtener las figuras color de rosa, azul y amarillo? \_\_\_\_\_
- ¿Es la única manera de obtenerlas? Argumenta. \_\_\_\_\_
- Compara tus respuestas con las de tus compañeros y, con ayuda del profesor, validenlas.



### Haz los trazos en tu cuaderno y responde.

- Traza tres circunferencias de 3 cm de radio.
- En cada circunferencia, traza la cuerda mayor. Los extremos de cada cuerda son vértices de un triángulo.
- Para cada circunferencia, ubica el tercer vértice en un punto diferente. Une los vértices y traza el triángulo que se forma.
- Traza un cuadrado sobre el lado mayor de cada triángulo. ¿Cuál es el área de cada cuadrado? ¿Para todos los triángulos se obtienen los mismos resultados?

© Nueva México



TIC



Entra al siguiente sitio web para que practiques la simetría axial. [nlvm.usu.edu/es/nav/frames\\_asid\\_298\\_g\\_4\\_t\\_3.html?open=activities&from=topic\\_t\\_3.html](http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_298_g_4_t_3.html?open=activities&from=topic_t_3.html) (consulta: 22 de diciembre de 2016, 1:30 horas)

# Relación de áreas en un triángulo rectángulo

Eje: Forma, espacio y medida

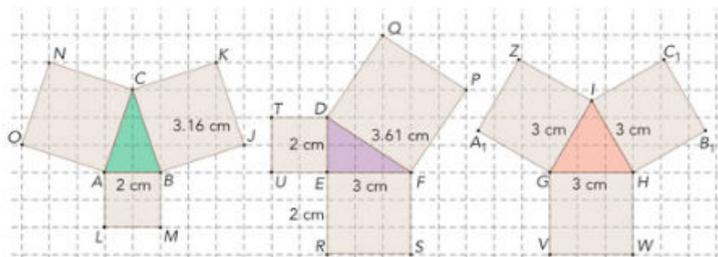
Tema: Medida

Contenido: Análisis de las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo

## 1. Suma del área de cuadrados



1. Calcula el área de cada uno de los cuadrados que se trazaron sobre los lados de los triángulos.



- a) ¿En cuál triángulo las áreas de todos los cuadrados son distintas?

- b) ¿En cuál triángulo las áreas de los cuadrados son iguales?

- c) ¿Qué relación encuentras entre las áreas de los cuadrados trazados en cada triángulo?

■ Con ayuda de su profesor, revisen sus respuestas.

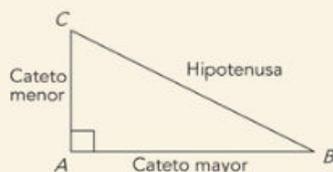
2. Lean la siguiente información y realicen lo que se les pide.



### Triángulo rectángulo

El lado de mayor longitud de un triángulo rectángulo se conoce como **hipotenusa**.

Los lados que forman el ángulo de  $90^\circ$  se llaman **catetos**. El cateto de mayor longitud se denomina **cateto mayor**, y el de menor longitud, **cateto menor**.



- Tracen en su cuaderno un triángulo rectángulo  $ABC$  cuyos catetos midan 8 cm y 7 cm, y un triángulo rectángulo  $DEF$  con catetos de 4 cm y 7 cm.
- En cada triángulo tracen un cuadrado sobre sus lados como en los triángulos de la actividad 1.

© Nueva México

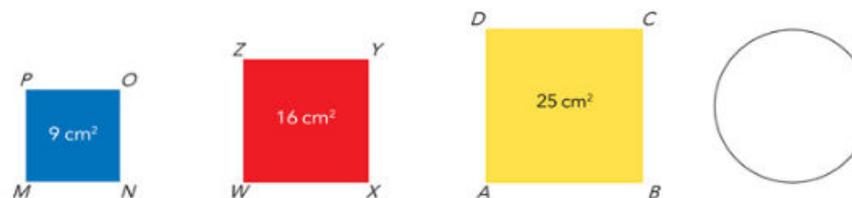
- Calculen las áreas de los cuadrados y respondan:

- a) ¿Qué relación encuentran entre las áreas de los cuadrados que se trazaron sobre los catetos y el de la hipotenusa? \_\_\_\_\_
- b) ¿Será válida esta relación para cualquier triángulo rectángulo?  
\_\_\_\_\_

■ Socialicen sus respuestas y escriban una conclusión acerca de la relación que existe entre las áreas de los cuadrados trazados en los lados de un triángulo rectángulo.

3. Hagan los trazos y escriban el procedimiento que siguieron.

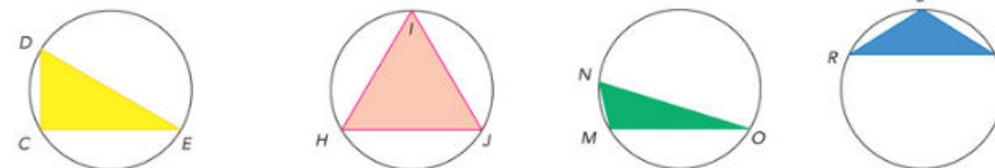
Tracen un triángulo rectángulo inscrito en la circunferencia. Consideren que la medida del lado de cada cuadrado es proporcional y que corresponde a las medidas de los lados del triángulo rectángulo.



- a) ¿A qué cuerda representa la hipotenusa del triángulo en la circunferencia? \_\_\_\_\_
  - b) ¿Existe alguna relación entre las áreas de los cuadrados de los catetos y el área del cuadrado de la hipotenusa? \_\_\_\_\_
  - c) ¿La relación que encontraron es la misma que hay entre las medidas de sus lados? \_\_\_\_\_
- Discutan sus respuestas y lleguen a una conclusión.

4. Haz lo que se solicita y responde.

Traza un cuadrado sobre los lados de los triángulos y obtén su área. Emplea una regla para determinar la medida de los lados.



- a) ¿Qué tipo de triángulo es cada uno de los que se muestran?
  - Triángulo  $DCE$ : \_\_\_\_\_
  - Triángulo  $HIJ$ : \_\_\_\_\_
  - Triángulo  $NMO$ : \_\_\_\_\_
  - Triángulo  $RST$ : \_\_\_\_\_

© Nueva México



### TIC

Entra al siguiente sitio web para que puedas repasar los elementos de un triángulo rectángulo. [portalacademico.cch.unam.mx/alumno/aprende/matemáticas2/triángulosrectangulos/page/0/1](http://portalacademico.cch.unam.mx/alumno/aprende/matemáticas2/triángulosrectangulos/page/0/1) (consulta: 22 de diciembre de 2016, 10:40 horas)

5. Revisen la tarea y respondan en el cuaderno. Con ayuda de su profesor, concluyan.

- ¿Cuál es el área del cuadrado que se ubica en la hipotenusa?
- ¿La relación entre las áreas de los cuadrados de los catetos y de la hipotenusa coincide con la que establecieron en las actividades anteriores?
- Subrayen el enunciado que describe la relación entre las áreas de los cuadrados de los catetos y de la hipotenusa.
  - La suma de las áreas de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa siempre y cuando el triángulo esté inscrito en una circunferencia.
  - La suma de las áreas de los cuadrados de los catetos de cualquier triángulo rectángulo corresponde al área del cuadrado de la hipotenusa.
- Si ninguno de los enunciados anteriores se cumple, escriban uno que describa la relación que se solicita.
  - Socialicen sus argumentos y escriban una conclusión general de lo estudiado.

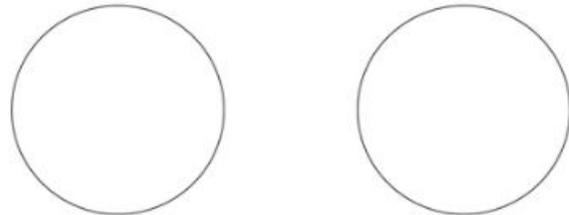
6. Con la ayuda de su profesor revisen las actividades anteriores y respondan. Lleguen a consensos y registren sus respuestas en el cuaderno.

- La relación que hay entre el área de los cuadrados que se construyen en los catetos del triángulo y el área del cuadrado que se ubica en la hipotenusa, ¿se aplica para cualquier triángulo rectángulo? ¿Por qué?
- Los triángulos rectángulos con los que han trabajado tienen la característica de que la hipotenusa corresponde al diámetro de la circunferencia. ¿Es posible trazar un triángulo rectángulo inscrito en una circunferencia, de manera que la hipotenusa no sea el diámetro? Argumenten.

#### Analiza y resuelve el problema.

La relación que encontraste entre las áreas de los cuadrados de los catetos de un triángulo rectángulo y el cuadrado de la hipotenusa, ¿se puede generalizar para cualquier triángulo inscrito en una circunferencia?

- Traza un triángulo equilátero y uno isósceles inscritos en una circunferencia y valida tu respuesta.



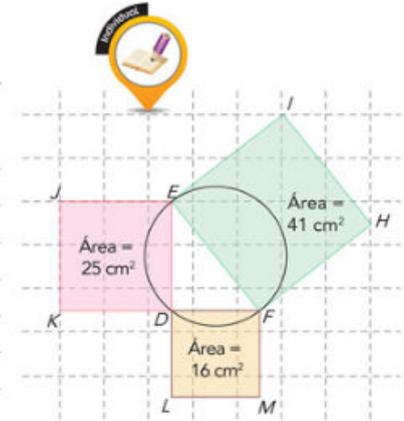
© Nueva México

## 2. Suma del área de cuadrados II

1. Analiza y responde.

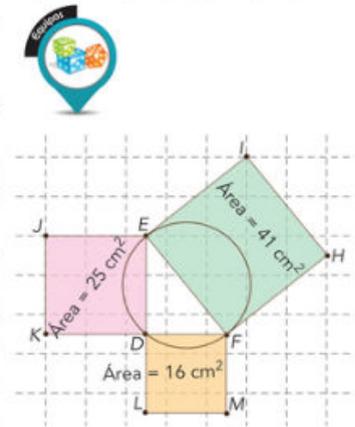
Tres cuadrados se trazaron de tal manera que forman un triángulo inscrito en la circunferencia.

- ¿Qué tipo de triángulo es el que se ha formado? \_\_\_\_\_
- Describe la relación entre las áreas de los cuadrados. \_\_\_\_\_
- ¿Cuáles son las medidas de los lados del triángulo? \_\_\_\_\_



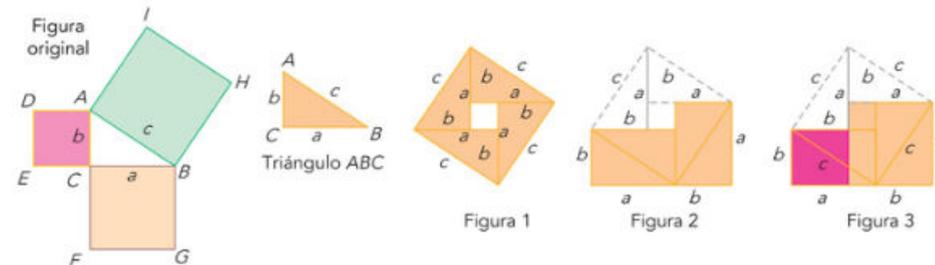
2. En una hoja blanca, tracen la figura de la derecha. Hagan lo que se indica y respondan.

- Tracen un segmento que pase por el centro del cuadrado del lado  $a$  que sea paralelo al lado  $c$  del triángulo rectángulo.
- Tracen un segmento que pase por el centro del cuadrado del lado  $a$  que sea perpendicular al segmento trazado anteriormente y recorten las piezas.
- Con las piezas obtenidas y el cuadrado de lado  $b$ , comprueben que la suma de las áreas de los cuadrados que se construyen en los catetos del triángulo rectángulo es igual al área del cuadrado que se construye en la hipotenusa. ¿Se cumple la afirmación anterior? Argumenten. \_\_\_\_\_



3. Analicen el procedimiento que siguió uno de los equipos y respondan.

El triángulo  $ABC$  es el mismo de la figura original, y el cuadrado que forma la figura 1 corresponde al que se traza sobre la hipotenusa.



- ¿De qué manera este procedimiento demuestra la relación entre las áreas de los cuadrados de los catetos con el cuadrado de la hipotenusa? \_\_\_\_\_
- Propongan otros procedimientos para demostrar esta relación. \_\_\_\_\_

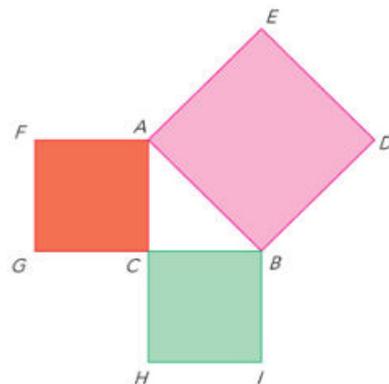
© Nueva México

## Practica

1. Analiza la figura y resuelve el problema.

Haz los trazos para comprobar que la suma de las áreas de los cuadrados rojo y verde corresponde al área del cuadrado rosa.

- ¿Es posible recurrir a la congruencia de triángulos para comprobar esta relación? \_\_\_\_\_
- ¿Cómo son los cuadrados  $CBIH$  y  $FACG$ ? \_\_\_\_\_
- Si trazas una diagonal en los cuadrados que se ubican en los catetos del triángulo, ¿cómo son los triángulos que se obtienen? \_\_\_\_\_
- Si trazas las dos diagonales del cuadrado  $ABDE$ , ¿cómo son los triángulos que se obtienen? \_\_\_\_\_
- ¿Los triángulos obtenidos en el inciso  $c$  se relacionan con el área del cuadrado rosa? \_\_\_\_\_



4. Revisen la tarea. Con ayuda del profesor concluyan.

- Muestren a sus compañeros los trazos que hicieron y expongan sus conclusiones.
- Expongan la relación, si la hay, entre las áreas de los cuadrados que construyeron sobre los lados de los triángulos.
- Analicen qué tipo de triángulo se forma cuando un lado del triángulo y el diámetro coinciden. Expliquen a qué se debe esto.

**Haz los trazos. Usa regla y compás.**

Reproduce en una hoja blanca la figura de la sección "Practica".

- Ubica los puntos medios de  $\overline{AC}$ ,  $\overline{GC}$ ,  $\overline{CH}$  y  $\overline{CB}$  e identifícalos como  $p$ ,  $q$ ,  $r$  y  $s$  respectivamente.
  - Traza segmentos paralelos a  $\overline{FA}$  que pasen por  $p$  y  $r$ .
  - También segmentos paralelos a  $\overline{BI}$  que pasen por  $q$  y  $s$ . Prolonga los segmentos de manera que se forme una retícula.
  - Considera la medida de los cuadrados y elabora una retícula para el resto de la figura.
- Justifica que el área de los cuadrados que se ubican en los catetos del triángulo rectángulo corresponde al área del cuadrado que se ubica en la hipotenusa.

© Nueva México

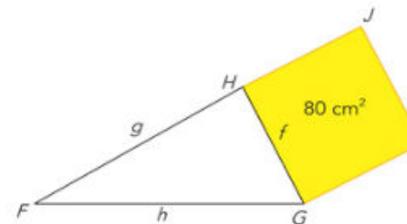
## 3. Suma del área de cuadrados III

1. Analiza el problema y resuelve.

Determina la medida del área de los cuadrados que tienen como lado el cateto  $g$  y la hipotenusa  $h$  del triángulo  $FHG$ . Considera que el área del cuadrado  $GJIH$  es la quinta parte del cuadrado que tiene como lado la hipotenusa y calcula:

- El área del cuadrado que tiene como lado el cateto mayor. \_\_\_\_\_
- El área del cuadrado que tiene como lado la hipotenusa. \_\_\_\_\_
- ¿Qué procedimiento seguiste para responder lo anterior? \_\_\_\_\_

■ Compara tu trabajo con el de tus compañeros y, con ayuda del profesor, comenten cómo el hecho de conocer la relación entre las áreas de los cuadrados de los catetos y de la hipotenusa permite encontrar algunos datos faltantes.



2. Revisen su tarea y, con ayuda del profesor, concluyan.

- ¿Con los trazos que hicieron fue posible demostrar la relación entre las áreas de los cuadrados de los catetos con el área del cuadrado de la hipotenusa? Argumenten.

## Validemos lo aprendido

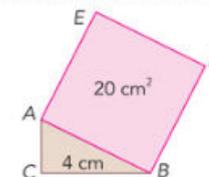
1. Analiza la afirmación y subraya los casos en los que se cumple. Argumenta.

"La suma de las áreas de los cuadrados que tienen como lado los catetos de un triángulo, es igual al área del cuadrado que tiene como lado la hipotenusa de dicho triángulo".

- En el caso de los triángulos isósceles, se cumple únicamente cuando la medida del lado desigual tiene una longitud mayor que los dos lados iguales.
- Si el triángulo se encuentra inscrito en una circunferencia y la hipotenusa corresponde al diámetro de la misma.
- Se cumple, solo si el triángulo es isósceles o escaleno, sin importar la medida de sus ángulos internos.
- Se cumple, solo si el triángulo es rectángulo.

© Nueva México

**Calcula el perímetro del triángulo  $ACB$ .  
Explica el procedimiento que seguiste.**



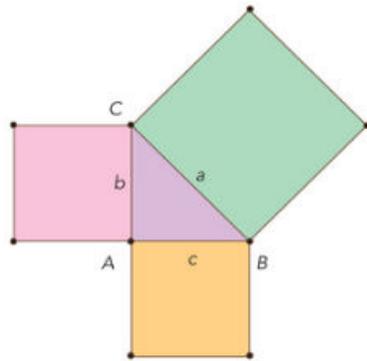
# Teorema de Pitágoras

Eje: Forma, espacio y medida

Tema: Medida

Contenido: Explicación y uso del teorema de Pitágoras

## 1. Teorema de Pitágoras I



Medidas de los lados			¿Cumple la igualdad planteada?
a	b	c	
4	4	5.6	
6	8	10	
16	8	17.89	

- Analiza la situación y responde. Justifica tu respuesta.
  - Escribe expresiones para determinar el área de cada uno de los cuadrados que se han trazado sobre los lados del  $\Delta ABC$ . Considera como medidas de sus lados  $a$ ,  $b$  y  $c$ .
    - ¿Qué relación existe entre las medidas de las áreas de los cuadrados trazados sobre los lados de  $\Delta ABC$ ? \_\_\_\_\_
    - Define como una igualdad la relación que se establece entre la medida de las áreas de los cuadrados que se trazaron sobre los lados del  $\Delta ABC$ . \_\_\_\_\_
    - ¿Qué valores numéricos pueden asignarse a las medidas  $a$ ,  $b$  y  $c$ ? \_\_\_\_\_
    - ¿La expresión que escribiste antes será válida para cualquier triada de cuadrados trazados sobre los lados de un triángulo rectángulo cualquiera? Argumenta. \_\_\_\_\_
  - Propón ejemplos para sustentar tus respuestas anteriores. En la tabla de la izquierda se muestran algunos valores. Complétala y escribe tus ejemplos.
    - Al hacer el análisis del  $\Delta ABC$ , los alumnos de un grupo de secundaria, identificaron la siguiente relación:

La suma del área de los cuadrados que se construyen sobre los catetos es igual que el área del cuadrado que tiene como lado a la hipotenusa.

- Escribe la expresión algebraica que representa la relación anterior. \_\_\_\_\_
- Utiliza la expresión que escribiste y representa las medidas de los lados  $a$  y  $c$ . \_\_\_\_\_
- Compara tus expresiones con las de tus compañeros. Comenta cómo representaste la medida de los lados y, con ayuda del profesor, valida tus respuestas.

© Nueva México

2. Lean la información y hagan lo que se indica.

## Teorema de Pitágoras

Si dado un triángulo rectángulo, se trazan cuadrados sobre los catetos cuyo lado se corresponda con la longitud de estos, la suma de la áreas de estos cuadrados corresponde al área del cuadrado que tiene de lado la longitud de la hipotenusa.

Si se sabe que  $a$  y  $b$  son las longitudes de los catetos del triángulo rectángulo y  $c$  es la longitud de la hipotenusa, se cumple que:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

- Retomen las respuestas de la actividad 1 y discutan cómo se relacionan con el teorema de Pitágoras.
  - Validen sus respuestas y, con la guía del profesor, lleguen a acuerdos.

3. Analicen las figuras, hagan lo que se solicita y respondan.

- Escriban expresiones para obtener la medida de los lados de los triángulos. En la figura 2, consideren que los dos catetos tienen la misma longitud.
  - Cuando se conoce la medida de la hipotenusa y de los catetos, ¿qué operación permite obtener el área de los cuadrados que se forman sobre estos? \_\_\_\_\_
  - En la figura 1, ¿qué operaciones permiten obtener la medida de la hipotenusa y de los catetos? \_\_\_\_\_
- Determinen el perímetro de los triángulos de ambas figuras.

Figura 1: \_\_\_\_\_ Figura 2: \_\_\_\_\_

- Expliquen el procedimiento que siguieron.

Figura 1. \_\_\_\_\_

Figura 2. \_\_\_\_\_

- Comenten cómo encontraron los datos faltantes para calcular los perímetros de los triángulos.

4. Revisen su tarea de la lección anterior y hagan esta actividad.

- Comenten los procedimientos que usaron para obtener la medida de los lados del triángulo.
- Al lado opuesto al ángulo  $A$ , llámenlo  $a$ ; al lado opuesto al ángulo  $B$ , llámenlo  $b$ ; al lado opuesto al ángulo  $C$ , llámenlo  $c$ . Elijan la expresión que modela la relación entre los cuadrados de los catetos y el cuadrado de la hipotenusa.
  - $a + b = c$
  - $a^2 + b^2 = c$
  - $a^2 + b^2 = c^2$
  - $a + b = c^2$

© Nueva México

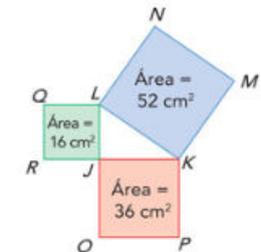


Figura 1

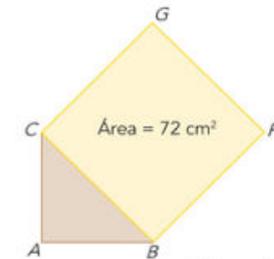
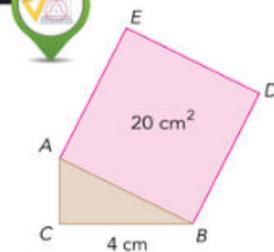


Figura 2



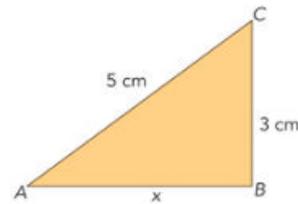
- c) Usen la expresión algebraica y obtengan las medidas.  
 Lado  $c$ . \_\_\_\_\_  
 Lado  $b$ . \_\_\_\_\_
- ¿Cómo obtuvieron la medida del lado  $b$ ? \_\_\_\_\_
  - Calculen el perímetro del triángulo. \_\_\_\_\_
- d) Comparen su respuesta de la tarea con la que obtuvieron en el inciso anterior; si no coinciden, revisen sus procedimientos y corrijan.
- Retomen las actividades anteriores. Con ayuda de su profesor, discutan qué medidas de un triángulo rectángulo pueden determinarse a partir del teorema de Pitágoras y concluyan.



Comprueba si ambas igualdades representan lo mismo.

$$\sqrt{16 + 19} = 5 \quad \sqrt{16} + \sqrt{9} = 5$$

- Elige la operación que representa la relación entre el cuadrado de los catetos y la hipotenusa.
- Obtén la medida del lado  $AB$ .



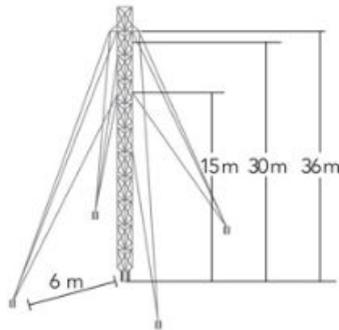
## 2. Aplicación del teorema de Pitágoras

1. Analiza y resuelve el problema. Justifica tus respuestas.

Antonio es ingeniero y diseña antenas para telecomunicaciones. Las antenas se sujetan a la estructura con cables de acero, a diferentes alturas tal como se muestra en la imagen de la izquierda. Antonio debe calcular la cantidad de cable que se requiere para fijar cada antena.

La distancia de la base de la antena al punto donde se fija el cable es de 6 m; los cables se sujetarán a 15 m, 30 m y 36 m de altura.

- a) Calcula la cantidad de cable que se requiere cuando este se sujeta a...
- 15 m de altura. \_\_\_\_\_
  - 30 m de altura. \_\_\_\_\_
  - 36 m de altura. \_\_\_\_\_
- b) Si los cables se sujetan a la misma distancia en tierra y son cuatro puntos, como se muestra en la imagen, ¿qué cantidad de cable se requiere?
- \_\_\_\_\_

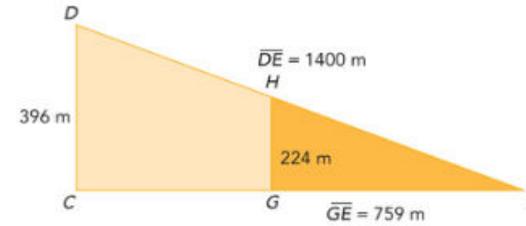


© Nueva México

2. Analicen, discutan y resuelvan el problema. Justifiquen sus respuestas.

La siguiente figura modela el recorrido que hace un teleférico.

- a) Calculen las distancias y escriban la expresión algebraica que permite obtenerlas.



- Distancia de  $E$  a  $C$ : \_\_\_\_\_
- Expresión algebraica: \_\_\_\_\_
- Distancia de  $E$  a  $H$ : \_\_\_\_\_
- Expresión algebraica: \_\_\_\_\_

- b) Comparen sus respuestas con las de otros equipos, justifiquen sus procedimientos.

3. Revisen su tarea y, con ayuda del profesor, respondan.

- a) Expliquen cómo emplearon el teorema de Pitágoras para determinar la medida del lado  $AB$  del triángulo  $ABC$ . \_\_\_\_\_

- Compartan sus respuestas en grupo. Con el apoyo de su profesor, expliquen de qué manera emplearon el teorema de Pitágoras para resolver los problemas y concluyan al respecto.

## Practico

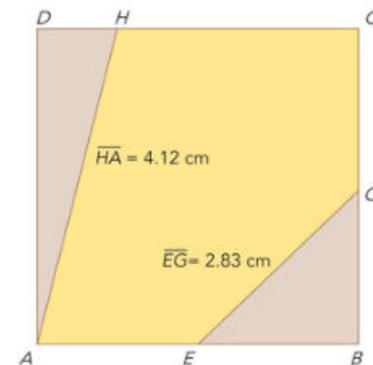
1. Analiza y resuelve el problema.

Calcula el área de la sección amarilla. Considera que  $\overline{GB}$  y  $\overline{EB}$  miden lo mismo, y que  $\overline{DH}$  mide la mitad que  $\overline{EB}$ .

- a) Obtén las áreas de los triángulos  $ADH$  y  $EBG$ .
- \_\_\_\_\_

- b) Calcula el área y el perímetro del cuadrado  $ABCD$ .
- \_\_\_\_\_

- c) Compara tus respuestas con las de tus compañeros, explica el procedimiento que seguiste para calcular lo que se solicita. Con ayuda del profesor, lleguen a acuerdos.



© Nueva México



Obtén las medidas de los lados del triángulo rectángulo y escríbelas en tu cuaderno.

Considera los siguientes datos:

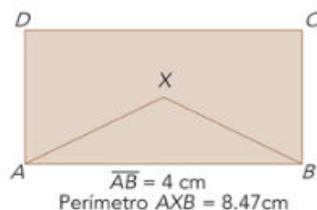
- El área del cuadrado que se trazó sobre la hipotenusa mide  $16 \text{ cm}^2$ .
- Se sabe que la medida del cateto mayor es el triple que la medida del cateto menor.

### 3. Teorema de Pitágoras II

1. Calcula el área y el perímetro del rectángulo  $ABCD$ . Escribe tus operaciones y justifica tu resultado.

Se sabe que el  $\triangle AXB$  es isósceles y que además  $X$  es el punto medio de  $\overline{DB}$ .

- a) Perímetro: \_\_\_\_\_
- b) Área: \_\_\_\_\_
- c) Escribe el procedimiento que seguiste para obtener los datos faltantes.  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

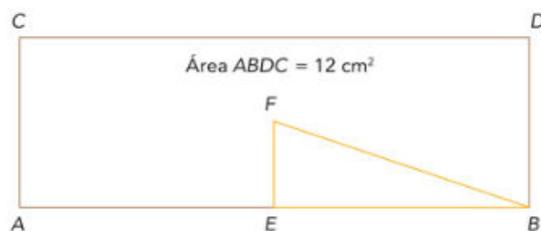


TIC

Entra al sitio:  
<http://www.telesecundaria.sep.gob.mx/>  
Elige "Materiales Educativos Audiovisuales", haz clic en "TERCER GRADO" y después selecciona la opción "Matemáticas III". En la barra derecha escoge "Bloque 4" y busca en la barra de títulos el recurso "Algunas demostraciones del teorema de Pitágoras", ahí podrás ver el video explicativo para consolidar lo estudiado en la lección.  
(consulta: 22 de diciembre de 2016, 14:00 horas)

2. Analicen la información y calculen lo que se solicita.

En el rectángulo  $ABDC$  se sabe que  $\overline{CD}$  es tres veces mayor que  $\overline{AC}$ ;  $E$  es el punto medio de  $\overline{AB}$  y  $F$  es el punto medio de  $\overline{AD}$ .



- a) ¿Cuál es la medida de  $\overline{FB}$  y  $\overline{EF}$  en el rectángulo  $ABDC$ ? \_\_\_\_\_
- b) ¿Cuál es el área del triángulo  $EFB$ ? \_\_\_\_\_
- c) ¿Se cuenta con la información necesaria para calcular lo que se solicita? Argumenten. \_\_\_\_\_
- d) Comparen el procedimiento que siguieron con el de otros equipos. ¿Todos hicieron lo mismo? ¿Obtuvieron los mismos resultados? Argumenten. \_\_\_\_\_

© Nueva México



BAE

Consulta en la serie Libros del Rincón la obra *Números mágicos y estrellas fugaces. Los primeros pasos de la ciencia*, de Anna Parisi, colección Espejo de Urania. En esta obra encontrarás información sobre Pitágoras y otras demostraciones de su teorema.

3. Revisen los problemas anteriores y validen sus respuestas con ayuda del profesor.

4. Retomen su tarea y respondan.

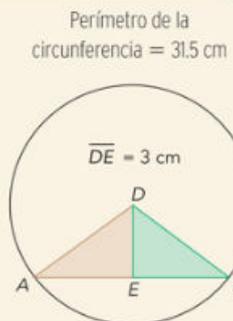
- a) ¿Cuál es la medida del cateto menor? \_\_\_\_\_
  - b) Expliquen qué procedimiento emplearon para determinar las medidas del triángulo. \_\_\_\_\_
- Con la guía de su maestro, redacten una conclusión acerca de las aplicaciones del teorema de Pitágoras en la resolución de problemas geométricos.

### Validemos lo aprendido

1. Analiza y resuelve. Escribe tus operaciones y justifica tus resultados.

Obtén el perímetro y el área del triángulo  $DEB$ .

- a) Perímetro: \_\_\_\_\_
- b) Área: \_\_\_\_\_
- c) Comenta tus respuestas y procedimientos con tus compañeros. Con ayuda de su profesor, validenlas.



### Analiza y resuelve el problema.

Joshua fue al Museo de la Ciudad de México y en la entrada encontró un letrero con la siguiente información:

Visitantes extranjeros	Visitantes nacionales	Visitantes locales
17 983	16 534	30 784

Joshua se preguntó cuál sería la probabilidad de encontrarse en el museo con un visitante extranjero.

- Sea el evento A, "Encontrarse con un visitante extranjero", ¿cuál es la probabilidad del evento A, es decir,  $P(A)$ ?
- Sea el evento B, "Encontrarse con un visitante local", determinen  $P(B)$ .



# Regla de la suma

Eje: Manejo de la información  
 Tema: Nociones de probabilidad  
 Contenido: Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios (regla de la suma)

## 1. Eventos mutuamente excluyentes



1. Lee la información y resuelve la actividad. Argumenta tus respuestas.

El documento "Perfil sociodemográfico de jóvenes" publicado por el Inegi, arroja los siguientes datos, obtenidos en el Censo de Población y Vivienda 2010.

Nivel de escolaridad de la población entre 25 y 29 años	Porcentaje
Sin escolaridad	2.5
Primaria	20.6
Secundaria	31.0
Media superior	20.7
Superior	23.1
Maestría	1.2
Doctorado	0.1
No especificó escolaridad	0.8

Fuente: [www.inegi.org.mx/inegi/contenidos/espanol/prensa/contenidos/Articulos/sociodemograficas/mexico-jovenes.pdf](http://www.inegi.org.mx/inegi/contenidos/espanol/prensa/contenidos/Articulos/sociodemograficas/mexico-jovenes.pdf) (consulta: 3 de junio de 2013).

- Si se escoge a una persona dentro de una población diversa de jóvenes de entre 25 y 29 años, y llamamos E1 al evento de elegir una persona sin escolaridad, ¿cuál será la probabilidad del evento E1? \_\_\_\_\_
  - Identifica otros dos eventos, en cuanto a escolaridad, y determina cuál es la probabilidad de ocurrencia de cada uno. \_\_\_\_\_
  - ¿Cuál es la probabilidad de escoger a una persona, de este mismo grupo, que tenga maestría o doctorado? \_\_\_\_\_
    - Explica cómo obtuviste el resultado. \_\_\_\_\_
    - ¿Cómo es la probabilidad anterior con respecto a las que obtuviste en los incisos a y b: igual, mayor o menor? \_\_\_\_\_
  - Al seleccionar a otro individuo, ¿cuál es la probabilidad de que su nivel de escolaridad se encuentre en la educación básica (primaria y secundaria)? \_\_\_\_\_
  - ¿Es posible obtener la probabilidad de los eventos de los incisos c y d mediante una fórmula? ¿Cuál? \_\_\_\_\_
- Compara tus resultados con los de otros compañeros y concluyan.

© Nueva México



2. Resuelvan las actividades. Justifiquen sus respuestas.

Cuando se analiza la sangre, se clasifica en cuatro tipos sanguíneos (A, B, AB y O) y si tienen el factor Rh (positivo o negativo). De acuerdo con la Cruz Roja Mexicana, se tienen los siguientes datos:

Distribución del tipo de sangre en la población mexicana			
Tipo de sangre	Rh+	Rh-	Total
O	55.25%	9.75%	65.0%
A	21.25%	3.75%	25.0%
B	7.225%	1.275%	8.5%
AB	1.275%	0.225%	1.5%

Fuente: [www.planetaj.cruzrojamexicana.org.mx/pagnacional/secciones/Organos/Contenido/PROGRAMADEDONACIONDESANGRE.htm](http://www.planetaj.cruzrojamexicana.org.mx/pagnacional/secciones/Organos/Contenido/PROGRAMADEDONACIONDESANGRE.htm) (consulta: 2 de julio de 2013).

- Determinen la probabilidad asociada a los siguientes eventos:
  - E1: tener sangre tipo O+  $P(E1) =$  \_\_\_\_\_
  - E2: tener sangre O-  $P(E2) =$  \_\_\_\_\_
  - E3: tener sangre O  $P(E3) =$  \_\_\_\_\_
  - E4: tener sangre con Rh+  $P(E4) =$  \_\_\_\_\_
  - ¿Qué otros eventos simples puedes identificar en los datos de la tabla y cuál es su probabilidad de ocurrencia? \_\_\_\_\_
  - Expresa con una fórmula la probabilidad del evento E4.
- Tal como se definieron los eventos, ¿qué tipo de eventos son, complementarios, mutuamente excluyentes o independientes?
  - Comparen sus respuestas con las de otros compañeros. Validen sus resultados con la siguiente información.

## Probabilidad de eventos mutuamente excluyentes

Como se vio en la lección 6, los **eventos mutuamente excluyentes** son aquellos que no tienen elementos comunes, y la probabilidad de que ocurra uno u otro se determina de la siguiente manera:

$$P(E1 \text{ o } E2) = P(E1) + P(E2).$$

Con E1 y E2 mutuamente excluyentes. La ocurrencia de E1 o E2 es llamado **evento compuesto**, pues se construye a partir de dos eventos mutuamente excluyentes.

3. Revisen su tarea y, con ayuda del profesor, resuelvan en su cuaderno.

Consideren el evento A: *encontrarse con un extranjero* y el evento B: *encontrarse con un visitante local*.

- ¿La ocurrencia de EA o EB representa un evento compuesto?
  - ¿Cuál es la probabilidad de ocurrencia de cualquiera de ellos?
  - Modelen dos eventos que sean mutuamente excluyentes y determinen la probabilidad de ocurrencia de uno u otro.
- Comparen y justifiquen los resultados de las actividades 1 a 3.



© Nueva México



4. Consideren las actividades anteriores y respondan.
- En la actividad 1, ¿qué otros eventos simples posibles hay? \_\_\_\_\_
    - ¿Cuál es la probabilidad de que alguno de los eventos simples ocurra? ¿Cuál es su expresión matemática? \_\_\_\_\_
    - ¿Cuál es la probabilidad de que todos los eventos simples ocurran? \_\_\_\_\_
  - En el problema 2, ¿qué otros eventos simples hay? \_\_\_\_\_
    - ¿Cuál es la probabilidad de que cualquiera de ellos ocurra? ¿Cuál es su expresión matemática? \_\_\_\_\_
  - De las situaciones vistas, ¿cuáles cumplen con la condición de ser eventos mutuamente excluyentes? Justifiquen su respuesta.



**Analiza y resuelve en tu cuaderno lo que se indica.**

- Determina el evento complementario en cada caso. Al lanzar un dado de seis caras se tienen los siguientes eventos.
  - Sea el evento E1: *obtener número par.*
  - Sea el evento E2: *sale un número primo.*
  - Sea el evento E3: *cae un número menor o igual que 4.*

## 2. Eventos complementarios



- Lee la información y responde. Entre un grupo de 22 niñas y 20 niños se va a rifar un sombrero de mago. Se tiene el evento E1: *que el sombrero lo obtenga una niña* y el evento E2: *que el sombrero lo obtenga un niño.*
  - ¿Cuál es el espacio muestral del experimento? \_\_\_\_\_
  - ¿Cuál es la probabilidad del evento E1? \_\_\_\_\_
  - ¿Cuál es la probabilidad del evento E2? \_\_\_\_\_
  - ¿Estos dos eventos son mutuamente excluyentes? Explica por qué.
  - ¿Estos dos eventos son complementarios? Argumenta. \_\_\_\_\_
  - ¿Qué parte del espacio muestral se cubre con la ocurrencia de E1 o E2? \_\_\_\_\_

- Analiza la información y valida tus respuestas de los incisos d y e.

### Eventos complementarios

La unión de los eventos complementarios da el espacio muestral y la suma de las medidas de sus probabilidades es 1. Cuando se tiene un evento simple A, su complementario se denomina como  $A^c$  (complemento de A), que es el evento: *que no ocurra A*. Entonces, si  $P(A) + P(A^c) = 1$ , entonces  $P(A^c) = 1 - P(A)$ . Si un evento simple o compuesto tiene probabilidad de ocurrencia igual a 1, se dice que es un evento seguro de ocurrir.

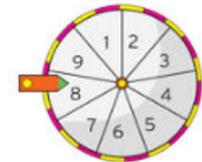
© Nueva México



- Con la ayuda del profesor resuelvan el problema en su cuaderno. Consideren el experimento de lanzar dos monedas. Sea el evento A, que salga al menos un sol:  $EA = \{(\text{sol}, \text{sol}), (\text{sol}, \text{águila}), (\text{águila}, \text{sol})\}$ .
  - ¿Cuál es el  $A^c$ ? Exprésenlo como el evento A.
  - Describan el espacio muestral del experimento.
  - ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra A o  $A^c$ ?



- Analicen y resuelvan el problema. Justifiquen sus respuestas. Consideren el experimento de girar la ruleta que se muestra. Sea el evento A: *que la ruleta se detenga en un número par.*
  - ¿Cuál es la probabilidad de ocurrencia del evento A?
  - Determinen el evento complementario de A ( $A^c$ ) y calculen su probabilidad.



- Sea el evento B: *que caiga en un número menor o igual que 2* y el evento C: *que se detenga en el número 6.*
- ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra el evento B?
    - Determinen el evento complementario de B ( $B^c$ ) y calculen su probabilidad.
  - ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra el evento C?
    - ¿Cuál es el evento  $C^c$ ? ¿Cuál es su probabilidad de ocurrencia?

- Revisen la tarea de la página anterior y, con ayuda del profesor, respondan.
  - ¿Por qué el evento F1: *se obtiene un número impar*, es complemento de E1? \_\_\_\_\_
  - El evento F2: *se obtiene un número que no es primo*, ¿es complemento de E2? Justifiquen. \_\_\_\_\_
  - ¿Por qué el evento F3: *al lanzar el dado se obtienen un número menor o igual que 3*, no es complemento de E3? \_\_\_\_\_
  - ¿Por qué las situaciones de la actividad no corresponden a eventos mutuamente excluyentes?

- Registren sus conclusiones respecto a la pregunta anterior.

**Considera la ruleta anterior y los siguientes eventos. Realiza en tu cuaderno lo que se solicita.**

- Evento D: *cae un número mayor o igual que 7.*
  - Evento E: *se detiene en un número primo.*
  - Evento F: *se detiene en el número 9.*
- Obtén la probabilidad de ocurrencia de cada evento, determina sus complementos y calcula su probabilidad.



© Nueva México

### 3. Eventos mutuamente excluyentes y complementarios



- Expongan el resultado de su tarea, con ayuda de su profesor, realicen lo que se pide.
  - Considerando la ruleta y los eventos de la actividad 3 (evento A, B y C) y de la tarea (eventos D, E y F) y completen la siguiente tabla:

E1	E2	Mutuamente excluyentes (sí o no)	P(E1)	P(E2)	P(E1 o E2)
A	A <sup>c</sup>	Sí			1
B	D	Sí	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{9}$
E	F				
A <sup>c</sup>	F				
C <sup>c</sup>	E				
B	D <sup>c</sup>	No	$\frac{2}{9}$	$1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$

- Expliquen qué ocurre en la penúltima línea de la tabla, con los eventos C<sup>c</sup> y E.
  - Expliquen por qué los eventos no son mutuamente excluyentes.
  - ¿Qué elementos provocan que los eventos no sean mutuamente excluyentes?
  - ¿Qué fracción de la ruleta se cubre cuando se consideran estos dos eventos?
  - ¿Están de acuerdo con el resultado de la tabla para P(B o D<sup>c</sup>)? ¿Por qué? Si no es así, corrijan y argumenten.

■ Validen sus respuestas en grupo.

#### Practica

- Resuelve los ejercicios, una vez que concluyas, con ayuda de tu profesor compara tus resultados con el resto del grupo para validarlos. Los siguientes eventos están relacionados con el lanzamiento de un dado:
  - Evento A: cae un número impar.
  - Evento B: sale un número menor o igual que 4.
  - Calcula la probabilidad del evento A. P(A): \_\_\_\_\_
  - Calcula la probabilidad del evento B. P(B): \_\_\_\_\_
  - Calcula la probabilidad de que ocurra A o B. P(A o B): \_\_\_\_\_
  - Calcula la probabilidad de que ocurran A y B. P(A y B): \_\_\_\_\_

© Nueva México

- Retoma los eventos de la tabla de la página 108, resuelve y responde.
  - Marca en cada ruleta qué parte cumple con los eventos señalados, en cada caso, y determina su probabilidad de ocurrencia.
    - ¿En cuáles casos se consideran eventos mutuamente excluyentes?
    - ¿Puedes establecer una regla o una fórmula para obtener la probabilidad de ocurrencia para eventos compuestos que no son mutuamente excluyentes?



$$A \circ A^c = P(A \circ A^c) =$$



$$B \circ D = P(B \circ D) =$$



$$A^c \circ D = P(A^c \circ D) =$$



$$D \circ E^c = P(D \circ E^c) =$$



$$A \circ E^c = P(A \circ E^c) =$$



$$D \circ F = P(D \circ F) =$$

- Comparen las respuestas de los problemas anteriores. Después respondan en el cuaderno lo siguiente.
  - ¿Qué condiciones se necesitan para afirmar que dos eventos son mutuamente excluyentes?
  - ¿Qué diferencia hay entre eventos mutuamente excluyentes y eventos complementarios?

■ Validen sus respuestas con el profesor y registren sus conclusiones sobre el trabajo realizado en la lección.



TIC

Entra al sitio web:

<https://es.khanacademy.org/math/probability/independent-dependent-probability/independent-events/e/compound-events>

en donde encontrarás una explicación de un evento complementario. (consulta: 22 de diciembre de 2016, 19:10 horas)



#### Validemos lo aprendido

##### 1. Resuelve en tu cuaderno.

- ¿Qué es un evento compuesto? Da dos ejemplos.
- Describe las dos relaciones entre eventos simples que se consideraron en esta lección.
- Da un ejemplo de eventos mutuamente excluyentes y otro ejemplo de dos eventos que no lo sean.

##### Realiza en tu cuaderno lo que se solicita.

Traza dos circunferencias concéntricas, de tal forma que un radio sea de 5 cm y el otro de 10 cm. Posteriormente, traza un segmento que una los radios de dichas circunferencias, de manera que el ángulo comprendido entre ambos radios sea de 90° y une los puntos donde los radios tocan a las circunferencias.

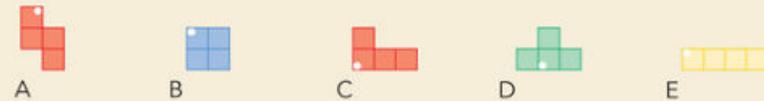
- ¿Qué figura se obtiene?
- A partir de la figura que obtuviste, ¿qué tipo de simetría o movimiento puedes realizar para obtener un rectángulo? Realiza los trazos para justificar su respuesta.



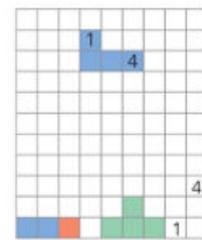
# Evaluación tipo PISA

## UNIDAD 1: Juegos de destreza

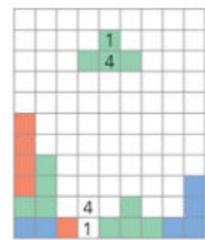
Existen juegos de video que aparecieron hace tiempo, y algunos de ellos se conservan en la actualidad. El "tetris" es uno de ellos, y consiste en acomodar las piezas que lanza el juego de manera que no queden huecos entre ellas, para ir eliminando filas y ganar puntos. Las figuras del tetris son:



Las piezas que lanza el juego pueden cambiar de posición y pueden girar, como se muestra en las pantallas 1 y 2. Las piezas B, C y D giran 360°; las piezas A y E giran 90°, todas las piezas giran en ambos sentidos (horario y antihorario) con base en el vértice que se identifica con un punto blanco, de manera que el cuadrado que tiene el punto blanco queda en el mismo lugar antes de seguir bajando o moverse hacia los lados.



Pantalla 1



Pantalla 2

- De la pantalla 1 se observa que cae una figura marcada con los números 1 y 4, la cual debe acomodarse en la parte inferior derecha, como se indica, para no dejar huecos. Analicen los enunciados y respondan:

- Una traslación de tres cuadros hacia la izquierda
- Traslación hacia abajo cinco cuadros
- Una rotación de 90° en sentido antihorario
- Traslación de dos cuadros hacia la derecha
- Traslación de tres cuadros hacia la derecha
- Realiza una rotación de 90° en sentido horario
- Traslación hacia abajo tres cuadros
- Traslación a la izquierda tres cuadros

¿Qué movimientos se deben realizar, y en qué orden, para que la figura azul caiga como se indica en la pantalla 1?

- I, II, VI, V, VII
- VII, V, VI, IV, II
- VI, V, VII, IV, I
- VII, V, III, IV, II

© Nueva México

- Respecto a la figura que cae en la pantalla 2, escriban la secuencia de movimientos que se requieren realizar para que la figura se ubique en el lugar solicitado. Realiza el menor número de movimientos.

Instrucciones: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

## UNIDAD 2: Mantenimiento

El desgaste de algunos objetos hace que algunas estructuras pierdan soporte y sean inseguras; por ello, las empresas responsables de dichas estructuras reponen el equipo dañado para dar un mejor servicio y seguridad a los usuarios.

Los cables que sostienen dos torres de luz deben cambiarse. Las torres miden 12 m y el anclaje que se encuentra en el piso se encuentra a 4 m de la base del poste. El cable que se utilizará es de 11 m, incluye medio metro para hacer las ataduras. Si los trabajadores tienen una escalera que tiene un alcance de 10 m:



- Si la escalera se coloca a una separación de 1.5 m de la base del poste y el trabajador que subirá a ella mide 1.65 m, ¿el trabajador alcanza a amarrar el cable en el poste? Justifica tu respuesta. \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

- ¿A qué altura del poste se sujeta el cable? \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

- Con el ejemplo de los postes de luz anteriores, completa la siguiente tabla, escribe una ✓ en la columna de Falso o Verdadero según consideres el enunciado.

Enunciado	Falso	Verdadero
Si la medida del poste se duplica la medida del cable (de la hipotenusa) también se duplica.		
Si se conoce la distancia a la que se encuentra el anclaje y la longitud del cable, solo se resta el cuadrado de las medidas y se obtiene la raíz cuadrada para obtener la medida del poste.		
Si la medida del poste fuera 16 m y si el cable fuera de 20 m y se sujetara a la máxima altura, la distancia a la que estarían los anclajes del suelo sería de 6.24 m.		

© Nueva México

Luego de resolver la evaluación, expongan sus respuestas. Si las tuyas no coinciden con las de tus compañeros, argumenta las estrategias que seguiste. Con ayuda del profesor lleguen a conclusiones.



Revisen su tarea y compartan con el grupo sus respuestas, con la ayuda de su profesor lleguen a consensos; además, respondan las siguientes preguntas.

- ¿Qué tipo de triángulo es el que trazaron?
- Si consideran la hipotenusa del triángulo como un eje de simetría y se refleja dicho triángulo mediante la simetría axial, ¿es posible obtener un rectángulo?
- Si consideran alguno de los vértices como punto de referencia para rotar el triángulo, ¿qué vértice, cuántos grados, y en qué sentido se debe girar el triángulo para obtener un rectángulo?
- ¿Qué condiciones debe tener la figura original para que a partir de esta y su simétrico, rotación o traslación se obtenga un cuadrado?

## Movimientos en el plano con geometría dinámica



- Realicen y resuelvan en un software de geometría dinámica (por ejemplo, GeoGebra) lo que se solicita y argumenten sus respuestas.

Con ayuda del software de geometría dinámica tracen lo que se solicitó en la tarea, para ello consideren lo siguiente:

- Ubíquense en la vista gráfica del software.
  - Tracen dos circunferencias que tengan como centro el mismo origen en el plano cartesiano, una circunferencia más grande que la otra, utilicen la función "Circunferencia dados su Centro y uno de sus Puntos" (figura 1).
    - ¿Qué caracteriza a dos circunferencias que tienen el mismo punto como centro?



Figura 1



Figura 2

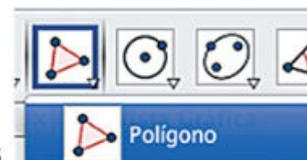


Figura 3

- Tracen el radio de cada circunferencia, utilicen la función "Segmento entre Dos Puntos" (figura 2) de manera que el radio de una quede sobre el eje de las abscisas y el de la otra sobre el eje de las ordenadas.
  - ¿Cuál es el ángulo que se ha formado entre los segmentos que han trazado?

- Den clic en la función "Polígono" (ver figura 3) y tracen el polígono que tiene como vértices el centro de las circunferencias y cada uno de los extremos de los radios que trazaron con los segmentos. Terminen en el vértice que iniciaron para fijar el polígono.

© Nueva México

- ¿Qué tipo de triángulo es el que han trazado?
  - ¿La figura que han obtenido corresponde a lo que obtuvieron como resultado en la tarea?
- Guarden el archivo que han obtenido y nómbrenlo como *mi\_archivo\_PB2*.

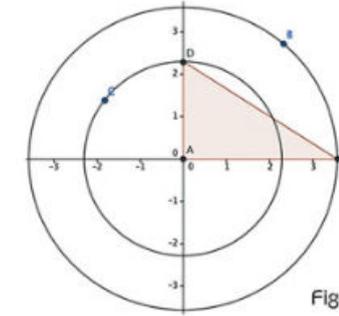


Figura 4

- Del archivo que han guardado, deberán tener algo similar a lo que se muestra en la figura 4, ubiquen los puntos homólogos y hagan lo que se indica.
  - Seleccionen la flecha del menú principal y den clic en el punto *C* de la figura 4 y muévanlo en cualquier parte del plano. ¿Qué es lo que sucede?
  - Hagan lo mismo para el punto que corresponde al punto *B*.
    - ¿Cuál de los ángulos del triángulo permanece constante?
    - Si coinciden ambos puntos, ¿qué sucede con el radio de ambas circunferencias?
  - Ubiquen la sección "Vista Algebraica" y en el apartado "Cónica", den clic sobre la viñeta que representa a alguna de las expresiones  $x^2 + y^2 = cte$ , como se muestra en la figura 5.
    - ¿Qué sucede en la "Vista Gráfica"? ¿Y si vuelven a dar clic sobre la viñeta?
  - Oculten ambas circunferencias y den clic en "Barra de Estilo" (In) "Activa" (ver figura 6) y elijan la opción "Expone u oculta ejes".
  - Guarden de nuevo el archivo con el mismo nombre *mi\_archivo\_PB2*.

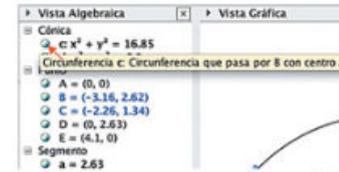
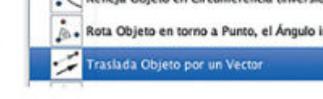
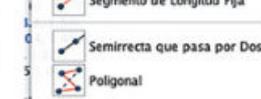


Figura 5



Figura 6

- Consideren que los vértices del triángulo rectángulo que obtuvieron son *A*, *E* y *D*.
  - Utilicen la función "Refleja Objeto en Recta" (ver figura 7).
    - Den clic sobre el triángulo *AED* y sobre su cateto vertical y se obtendrá el triángulo *A'E'D'*.
  - Den clic en la función "Vector entre Dos Puntos" (ver figura 8) y tracen el vector de abajo hacia arriba sobre el cateto vertical.
  - Con la función "Traslada Objeto por un Vector" (ver figura 9) den clic sobre el triángulo *A'E'D'* y sobre el vector que trazaron en el punto anterior.
    - Con base en la figura que se ha trasladado, ¿cuáles son los vértices obtenidos? De ser necesario, utilicen la función para mover la pantalla.
    - ¿A qué posición se ha trasladado el vértice *E'*?



© Nueva México

- iv. Localicen el triángulo  $A'E'D'$  en el apartado "Triángulo" de la sección "Vista Algebraica" y den clic sobre la viñeta que le corresponde para ocultarlo. Hagan lo mismo para ocultar sus vértices  $A'$ ,  $E'$  y  $D'$  y para ocultar el vector que trazaron en el inciso c.
- v. Para el triángulo  $A''E''D''$  de la traslación que construyeron, con la función "Vector entre Dos Puntos" (ver figura 8) tracen un vector de izquierda a derecha sobre su cateto horizontal.
  - Usen la función "Traslada Objeto por un Vector" (figura 9) den clic sobre el triángulo  $A''E''D''$  y sobre el vector que trazaron en el inciso v. Oculten el triángulo  $A''E''D''$ , sus vértices y el vector que trazaron en el inciso v.
  - Por último, utilicen la función "Refleja Objeto en Recta" (ver figura 7) y den clic sobre el triángulo  $A'''E'''D'''$ , y sobre su cateto horizontal.
  - Oculten el triángulo  $A'''E'''D'''$  y sus vértices.
- vi. La figura resultante es como la que se muestra en la figura 10.
  - ¿Qué sucede si mueven el punto  $C$  y dejan fijo el punto  $B$ ?
  - ¿Qué sucede si mueven el punto  $B$  y dejan fijo el punto  $C$ ?
  - Si ubican en el mismo lugar los puntos  $B$  y  $C$ , ¿qué figura es la que se obtiene?
  - De esta última figura que han obtenido ¿es el único tamaño que pueden obtener de esta, o la medida de sus lados puede aumentar o disminuir?

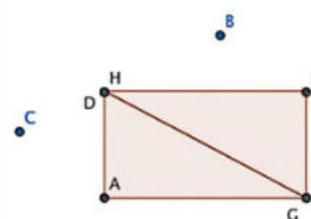


Figura 10

- vii. Guarden el archivo que han generado con el nombre *mi\_archivo\_PB2\_2*.
- d) Elijan "Archivo" de la barra de herramientas y den clic en la opción "Abre..." y en la ventana que aparece seleccionen el archivo: *mi\_archivo\_PB2*, que guardaron y realicen lo siguiente:
  - i. Elijan la función "Rota Objeto en torno a Punto, el Ángulo indicado" (ver figura 11).
    - Den clic sobre el triángulo  $AED$ , después sobre el vértice  $A$  y en la ventana que aparece, escriban  $180^\circ$  para el ángulo de rotación. Den clic en  $OK$ .
    - Con las condiciones dadas para el ángulo de giro ¿es lo mismo si se gira en el sentido horario o en sentido antihorario?
    - ¿Cuáles son los vértices del triángulo que obtuvieron una vez que rotaron el triángulo original?

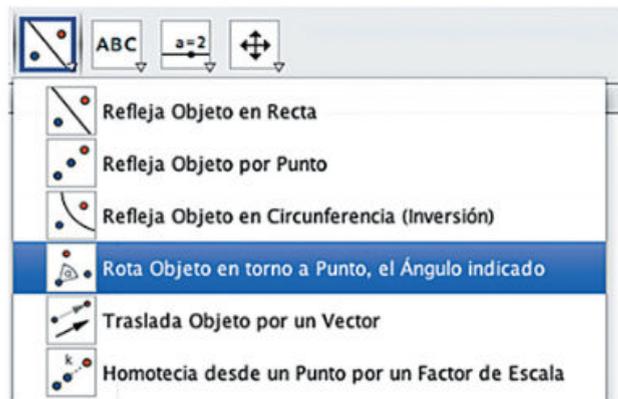


Figura 11

© Nueva México

- ii. Encuentren los puntos medios en las hipotenusas de cada triángulo; para ello, utilicen la función y elijan la opción "Punto Medio o Centro"

- Den clic en los extremos de la hipotenusa de cualquiera de los triángulos para obtener el punto medio; hagan lo mismo para la hipotenusa del otro triángulo.
- Tracen un vector que tenga como extremos los puntos medios, consideren como punto inicial el punto medio del segmento  $E'D'$ , como se muestra en la figura 12.
- Usen la función "Traslada Objeto por un Vector" para trasladar el triángulo  $A'E'D'$  con respecto al vector que han trazado.
- Oculten el vector que trazaron, el punto medio del segmento  $D'E'$  y el triángulo  $A'E'D'$  junto con sus vértices.

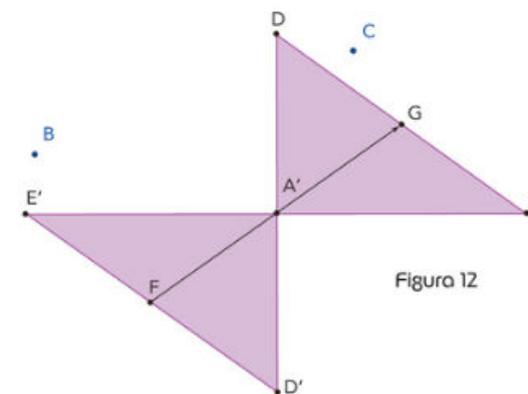


Figura 12

- iii. Guarden la figura que han obtenido, con el nombre de *mi\_archivo\_PB2\_3*.
  - ¿Es parecida a la que obtuvieron en el inciso c? Si es así, ¿pueden obtener un cuadrado moviendo los puntos  $B$  y  $C$ ?
  - ¿Qué condición debe existir entre los vértices de la figura para que la medida de un lado sea la mitad del otro?

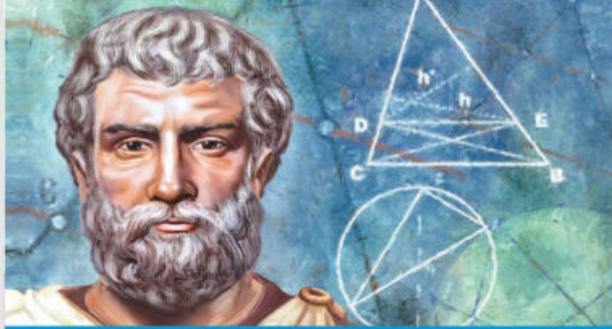
**2. Compartan con el grupo sus resultados y, con la ayuda de su profesor, lleguen a conclusiones de manera que todos queden convencidos; además, respondan las preguntas.**



- a) ¿Qué pueden comentar acerca de lo que hicieron en los incisos c y d?
- b) En el inciso d, rotaron el triángulo  $AED$  dejando fijo su vértice  $A$  (centro de rotación).
  - i. ¿Es posible rotar el triángulo dejando fijo otro de sus vértices?
  - ii. Si la respuesta fue afirmativa y la rotación se hace fijando el vértice  $E$ .
    - ¿Cuál sería el ángulo de rotación y cuáles los puntos de referencia para el vector, para poder trasladar el triángulo y obtener una imagen similar a la figura 10?
    - ¿Y si consideran el vértice  $D$ ?
  - iii. Abran el archivo *mi\_archivo\_PB2* y validen sus respuestas.
- c) ¿Pueden obtener la figura resultante de los incisos c y d, utilizando solo una isometría de las que aprendieron en la lección 10? Si la hay...
  - ¿El punto de referencia que se debe considerar estaría fuera del triángulo rectángulo, o sería parte del triángulo?

© Nueva México

Analicen y comparen sus respuestas. Comenten acerca de las ventajas y desventajas de utilizar el software.



### Tales de Mileto

(Mileto, actual Turquía, 624 a. de C.- 548 a. de C.)

Filósofo y matemático reconocido por ser uno de los siete sabios de Grecia. Es considerado el primer pensador que trató de explicar los fenómenos naturales con base en la observación, en vez de atribuirlos a las divinidades, por lo que es precursor del pensamiento científico.

En su juventud, Tales viajó por Egipto, donde aprendió geometría y astronomía. Con base en estos saberes formuló un conjunto de teoremas a partir de los que generó razonamientos deductivos; se le considera como el primer matemático en demostrar teoremas geométricos usando el razonamiento lógico. Varios de sus conocimientos fueron recopilados más adelante por Euclides en la obra *Los elementos*.

Si bien ninguno de los escritos de Tales ha llegado hasta nuestros días, se le atribuyen numerosos aportes, entre ellos el planteamiento de cinco teoremas geométricos:

1. Todo círculo es dividido en dos partes iguales por su diámetro.
2. Los ángulos de la base de todo triángulo isósceles son iguales.
3. Los ángulos opuestos por el vértice que se forman al cortarse dos rectas son iguales.
4. Si dos triángulos tienen un lado y los dos ángulos adyacentes respectivamente iguales, entonces los triángulos son iguales.
5. Todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es un ángulo recto.

También se le atribuye haber predicho el año en que ocurriría un eclipse de Sol (en el 585 a. de C.), lo cual, le valió gran reconocimiento.



Bloque

3

### Aprendizajes esperados

- Resuelve problemas que implican el uso de ecuaciones de segundo grado.
- Resuelve problemas de congruencia y semejanza que implican utilizar estas propiedades en triángulos o en cualquier figura.



El World Trade Center, en Bahrein, es el primer edificio a gran escala que utiliza la energía eólica para abastecerse. Sus dos edificios triangulares están inspirados en la forma de las velas de los barcos.

© Noventa y México

## Ecuaciones cuadráticas II

Eje: Sentido numérico y pensamiento algebraico

Tema: Patrones y ecuaciones

Contenido: Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas. Aplicación de la fórmula general para resolver dichas ecuaciones

## 1. Fórmula de las cuadráticas



## 1. Resuelve los problemas en tu cuaderno y justifica tus procedimientos.

Se tienen dos cuadrados, los lados de uno de ellos miden la tercera parte de los lados del otro, y la suma de sus áreas es de  $160 u^2$ .

- ¿Qué expresión algebraica modela la suma de las áreas?
- ¿Qué grado tiene la expresión algebraica?
- ¿Cuántas y qué soluciones se pueden obtener?
- ¿Cuál es la medida de los lados de cada cuadrado?

Lorena, Néstor y Daniel son tres amigos; el papá de Lorena es un año mayor que el papá de Néstor, y el papá de Daniel es un año menor que el papá de Néstor; si la edad de los papás de Lorena y de Daniel se multiplica da como resultado 2 024.

- ¿Qué expresión algebraica modela la relación entre la edad de los papás de Lorena y de Néstor?
- ¿Qué expresión algebraica modela la relación entre la edad del papá de Néstor y el papá de Daniel?
- ¿Qué expresión algebraica modela el producto de las relaciones entre las edades de los papás de Lorena y Daniel?
- ¿Cuántas y qué soluciones se pueden obtener?
- ¿Qué edad tienen los papás de Lorena, Néstor y Daniel?

## 2. Resuelvan en su cuaderno. Justifiquen el procedimiento empleado.

Antonia es ingeniera y diseña e instala en edificios equipos que miden las ondas de los movimientos telúricos. Si los movimientos sobrepasan cierta magnitud, el detector envía una alarma un minuto antes de que se sienta el movimiento y, después de cierto tiempo de activarse la alarma, el equipo interrumpe el paso de energía eléctrica a los elevadores. Cuando los sensores no registran incidentes, se reactiva la energía eléctrica en los elevadores.

La expresión algebraica:  $x^2 + 10\,800 = 560x$ , modela el tiempo en segundos que tarda en interrumpirse la energía eléctrica y el tiempo que tarda en reactivarse.

- De la ecuación, ¿es posible obtener las dos respuestas solicitadas?
- ¿Qué tipo de número puede adquirir la literal: positivo o negativo? ¿Por qué?

## TRS

**Equidad de género.** De acuerdo con datos del Inegi, en el año 2000, en México, de la población total de ingenieros, 53% eran hombres y 47% mujeres. Anteriormente se pensaba que había unas carreras para hombres y otras para mujeres. En la actualidad, las mujeres y los hombres tienen las mismas oportunidades de estudiar y tener éxito, sin diferencias de género.



- De los procedimientos que conocen, ¿cuál consideran más adecuado para resolver el problema?
- Determinen el tiempo que tarda en desactivarse la energía y el tiempo que transcurre para activarse.

■ Revisen las actividades 1 y 2 y justifiquen cómo las resolvieron.

## 3. Retomen los problemas anteriores y, con ayuda de su profesor, respondan en su cuaderno.

- Del problema de la suma de los cuadrados, ¿cuál de las siguientes expresiones modela la situación?

$$x^2 + \left(\frac{1}{3}x\right)^2 - 160 = 0 \quad x^2 + \left(\frac{1}{3}x\right)^2 = 160 \quad x^2\left(1 + \frac{1}{3}\right) = 160$$

■ Para determinar los valores de  $x$ , ¿es necesario factorizar?

- Del problema de las edades, ¿cuál de las siguientes expresiones modela la situación?

$$(x-1)(x-2) = 2024 \quad (x+1)(x-1) = 2024 \quad (x-1)^2 = 2024$$

■ ¿Para determinar los valores de  $x$  es pertinente recurrir al uso de operaciones inversas? ¿Por qué?

- Del problema de Antonia, ¿qué procedimiento fue el más pertinente: la factorización o las operaciones inversas?

■ Registren en su cuaderno sus acuerdos y conclusiones.

## 4. Analicen la siguiente información y respondan en su cuaderno.

## Fórmula general para ecuaciones cuadráticas

La fórmula general para ecuaciones cuadráticas permite resolver ecuaciones de la forma  $ax^2 + bx + c = 0$ , cuando las operaciones inversas o la factorización no son lo más pertinente. La fórmula general es:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son los coeficientes de la ecuación. El signo  $\pm$  indica que la fórmula se resuelve dos veces, cuando se utiliza "+" y cuando se utiliza "-", es decir,  $x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  y  $x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  con lo que se buscan los dos posibles valores que adquiere  $x$ .

- Escriban la expresión de la forma  $ax^2 + bx + c = 0$  que modela el tiempo que tarda en activarse y desactivarse la alarma.
- ¿Qué valores adquieren los coeficientes  $a$ ,  $b$  y  $c$ ?
- Sustituyan en la fórmula general los valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$  para los casos (+) y (-) para determinar los valores de  $x$ . Utilicen su calculadora y consideren la regla de los signos.
- Los valores que adquiere  $x$  utilizando la fórmula general, ¿coinciden con los que obtuvieron antes?
- ¿Qué ventajas consideran que tiene el uso de la fórmula general con respecto a los procedimientos que han usado antes?





Analiza las ecuaciones y responde en tu cuaderno.

$$x^2 - 6x = -9$$

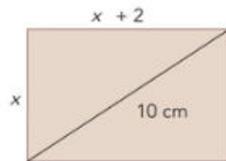
$$x^2 + 6 = -5x$$

- ¿Las ecuaciones necesariamente deben tener dos soluciones?
- Resuélvelas. ¿Cuál es la solución o las soluciones de cada ecuación?
- Con base en la resolución de la expresión  $b^2 - 4ac$  en cada ecuación, ¿piensas que es posible anticipar cuántos valores puede adquirir  $x$ ?

## 2. Discriminante



1. Observa la figura de la izquierda y resuelve. Justifica tus respuestas.



- ¿Qué expresión algebraica modela el área del rectángulo? \_\_\_\_\_
  - ¿Cuántos valores puede adquirir  $x$ ? \_\_\_\_\_
- ¿Qué tipo de expresión algebraica modela el perímetro del rectángulo? \_\_\_\_\_
  - ¿Cuántos valores puede adquirir  $x$  en este caso? \_\_\_\_\_
- A partir de la medida de la diagonal, ¿qué expresión algebraica permite obtener la medida de los lados? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es la medida del área y del perímetro del rectángulo? \_\_\_\_\_
- Reflexiona. ¿Será posible anticipar los valores de una ecuación de segundo grado sin resolver toda la fórmula general? \_\_\_\_\_

■ Compara tus respuestas con las de otro compañero.

2. Resuelvan la siguiente actividad. Justifiquen sus respuestas y regístralas en el cuaderno.

- De la fórmula general que se presenta en la página anterior, resuelvan  $b^2 - 4ac$  en las siguientes ecuaciones:
  - $x^2 - 8x + 16 = 0$
  - $x^2 - 6x + 16 = 0$
  - $x^2 - 8x + 12$
  - ¿Cuál es el resultado que se obtiene en cada expresión?
- Utilicen la fórmula general y determinen cuántas soluciones tiene cada ecuación.
- En la ecuación cuadrática, de la cual el resultado de  $b^2 - 4ac$  fue:
  - igual que cero, ¿cuántas soluciones tuvo la ecuación?
  - menor que cero, ¿cuántas soluciones tuvo la ecuación?
  - mayor que cero, ¿cuántas soluciones tuvo la ecuación?
- ¿Es posible anticipar el número de soluciones de una ecuación cuadrática obteniendo el resultado de  $b^2 - 4ac$ ?

■ Registren sus conclusiones.

3. Resuelvan el problema en su cuaderno.

Lucio realizó un experimento, lanzó hacia arriba diversos objetos desde una altura de 12 m y midió el tiempo que tardaron en tocar el piso. Después, modeló uno de los objetos que lanzó mediante la siguiente expresión:  $x^2 + 4x + 12 = 0$ .

Al revisar la expresión, Lucio comentó que tiene un error porque no puede resolverse, aunque es mínimo, puede considerarse grave.

- De la expresión algebraica dada, ¿cuántos valores puede adquirir  $x$ ?
    - ¿Es posible anticipar cuántos resultados se pueden adquirir de la ecuación sin resolver toda la fórmula? Argumenten.
  - ¿A qué se refiere Lucio cuando dice que la ecuación no tiene solución?
    - ¿Cuáles son los valores de  $x$ ?
- Comparen con otros compañeros cómo resolvieron los problemas.

4. Con ayuda del profesor, analicen la siguiente información.

### El discriminante

Una ecuación de segundo grado puede tener dos soluciones, una o ninguna solución. Una manera de anticipar lo anterior es resolver la expresión que se encuentra dentro de la raíz cuadrada de la fórmula general, conocida como el discriminante ( $D$ ) y que se escribe como  $D = b^2 - 4ac$ . Esto se debe a que:

Si  $D < 0$ , la ecuación cuadrática no tiene solución.

Si  $D = 0$ , la ecuación tiene solo una solución, que puede ser un número entero, fracción o decimal positivo o negativo.

Si  $D > 0$ , la ecuación tiene dos soluciones, que son números enteros, fracciones o decimales positivos o negativos.

- Del problema del rectángulo, ¿la información que se proporciona es suficiente? \_\_\_\_\_
  - ¿El teorema de Pitágoras es útil para determinar las medidas? ¿Por qué? \_\_\_\_\_
  - De la expresión que obtuvieron, ¿cuáles son los coeficientes de  $a$ ,  $b$  y  $c$ ? \_\_\_\_\_
  - ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación obtenida? \_\_\_\_\_
- De las expresiones algebraicas de la actividad 2, ¿en cuál el discriminante es menor que cero? \_\_\_\_\_
  - ¿En qué ecuación es igual que cero? \_\_\_\_\_
  - ¿En cuál el discriminante es mayor que cero? \_\_\_\_\_
- En la actividad 3, ¿qué relación hay entre el valor del discriminante y el hecho de que no pueda resolverse? \_\_\_\_\_

5. Revisen la tarea de la página 120 y con ayuda del profesor respondan.

- ¿Cuántas soluciones tiene cada ecuación?
- Utilicen el discriminante y verifiquen si cumple con el número de soluciones que determinaron.

La  $\sqrt{0} = 0$  y la raíz cuadrada de un número negativo no está definida.

- Consideren lo anterior y la fórmula general. Discutan en grupo por qué el discriminante permite anticipar el número de soluciones de una ecuación cuadrática. Registren sus conclusiones.

### Practica

1. Resuelve las siguientes actividades. Una vez que concluyas, con ayuda del profesor, compara tus resultados con el resto del grupo para validarlos.

a) De las siguientes expresiones, indica cuáles no tienen solución.

i.  $x^2 + 8x + 64 = 0$     ii.  $-x^2 + 8x + 64 = 0$     iii.  $-x^2 + 8x - 64 = 0$

- De la o las expresiones que tienen solución, ¿cuántas soluciones tienen?
- ¿Ambas son positivas o negativas, o una positiva y la otra negativa?

b) Reflexiona. ¿Mediante el análisis de la expresión algebraica es posible anticipar si una ecuación tiene o no soluciones o es necesario calcular el discriminante?

Escribe un problema que involucre una ecuación cuadrática y que tenga una sola solución. Escribe la ecuación en su forma general.

### 3. Resolución de ecuaciones cuadráticas

1. Determina cuántas soluciones tiene cada ecuación, sin obtener el valor de las mismas.

i.  $x^2 - 5x + 4 = 0$     ii.  $-x^2 - 2x - 2 = 0$   
 iii.  $3x^2 - x + 1 = 0$     iv.  $-4x^2 - 20x - 25 = 0$

- Resuelve, en tu cuaderno, las ecuaciones para validar tus respuestas.

2. Escriban una ecuación cuadrática en su forma general, para cada caso, de tal manera que se obtengan las soluciones que se muestran.

Soluciones	Ecuación	Soluciones	Ecuación
i. -5 y -7		ii. 0 y 8	
iii. 12 y 144		iv. -3	
v. 9		vi. -12 y 12	

© Nueva México

3. Con la ayuda de su profesor revisen la tarea y las actividades anteriores. Después, respondan.

a) ¿La ecuación  $x^2 - 14x + 49$  cumple con la condición dada en la tarea?

b) ¿Qué dato o signo tendría que variar en la ecuación  $-x^2 - 18x - 81$  para tener una solución única?

c) De la actividad 1, ¿es posible estimar si las ecuaciones tienen o no soluciones sin llegar a calcular el discriminante? Argumenten.

- Si la respuesta anterior fue afirmativa, ¿qué coeficientes y qué valores deben considerar?

d) De la actividad 2, para obtener la ecuación cuadrática en su forma general, ¿es posible recurrir a la factorización? Justifiquen.

- ¿Qué diferencia hay en la expresión factorizada de los incisos ii y v?

- ¿Qué diferencia hay en la expresión factorizada de los incisos i, iii y vi?

- Registren en su cuaderno sus conclusiones acerca de las ventajas que ofrece la fórmula general y el discriminante al resolver ecuaciones cuadráticas.

### Validemos lo aprendido

1. Resuelve el siguiente problema.

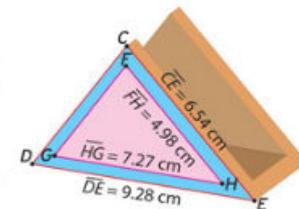
Se tiene un rectángulo con perímetro de 480 cm y área de 4400 cm<sup>2</sup>. Para obtener las medidas de los lados del rectángulo responde lo siguiente:

- ¿Qué expresión modela el área del rectángulo?
- Si sabemos que  $a + b = 240$ , escribe una expresión que muestre el despeje de  $a$ .
- Sustituye  $a$  en la expresión que modela el área y determina la medida de los lados del rectángulo.

Analicen y resuelvan el problema.

Un artesano que trabaja acero inoxidable elabora un servilletero en forma triangular, con un triángulo isósceles bordado como diseño, como el que se muestra:

- ¿Cuál es la medida del perímetro del triángulo  $FHG$ ?
- Calculen el perímetro de la cara triangular del servilletero.



TIC

En el sitio de Internet:

[www.disfrutalasmaticas.com/algebra/ecuaciones-cuadraticas.html](http://www.disfrutalasmaticas.com/algebra/ecuaciones-cuadraticas.html) encontrarás más información acerca de las ecuaciones cuadráticas.

Entra al sitio:

<http://www.telesecundaria.sep.gob.mx/>

Elige "Materiales Educativos Audiovisuales", haz clic en "TERCER GRADO" y después selecciona la opción "Matemáticas III". En la barra derecha escoge "Bloque 3" y busca en la barra de títulos el recurso "Resolución de ecuaciones cuadráticas usando la fórmula general", ahí podrás ver el video explicativo para consolidar lo estudiado en la lección.

(consulta: 22 de diciembre de 2016, 10:50 horas)



# Semejanza y congruencia

Eje: Forma, espacio y medida

Tema: Figuras y cuerpos

Contenido: Aplicación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas

## 1. Criterios de semejanza y congruencia



### 1. Lee y responde.

a) Roberto trabaja en una empresa dedicada a diseñar y vender estructuras triangulares. Un cliente comprará una estructura llamada cercha, que es como la del dibujo de la izquierda, pero quiere que le agreguen una barra metálica, representada por  $\overline{AB}$ . Roberto debe asegurarse de que la estructura pueda elaborarse y sea segura; para ello, analiza las características de los triángulos que la componen.

• Roberto quiere averiguar si los triángulos  $ABC$  y  $ABD$  que se forman al colocar la barra son congruentes. Verifícalo y explica usando los criterios de congruencia de triángulos. \_\_\_\_\_

• Roberto también debe identificar si los triángulos  $ABE$  y  $ABF$  son semejantes. Determinalo y, en su caso, escribe la razón de semejanza. \_\_\_\_\_

b) Para reforzar la estructura, Roberto le recomendó a su cliente agregar una barra metálica que pase por los puntos medios de  $\overline{AE}$  y  $\overline{AF}$ .

• Ubica los puntos medios de  $\overline{AE}$  y  $\overline{AF}$  y llámalos  $P_1$  y  $P_2$ . Después traza un segmento de recta para unirlos y denomínalo  $L_1$ . Denota como  $P_3$  el punto de intersección de  $L_1$  y  $\overline{AB}$ .

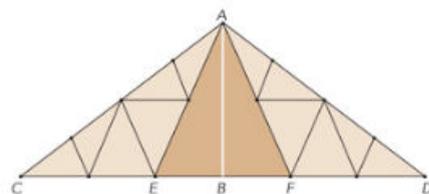
c) Analiza la figura y responde.

• ¿Qué tipo de triángulos construiste en la figura? \_\_\_\_\_

• ¿Los triángulos  $AP_1P_3$  y  $AP_2P_3$  son congruentes? Explícalo usando los criterios de congruencia. \_\_\_\_\_

• Explica con argumentos geométricos si los triángulos  $ABE$  y  $AP_1P_3$  son semejantes. \_\_\_\_\_

■ Verifica tus respuestas y comenta con tus compañeros las características de las figuras congruentes y las semejantes.



2. Hagan lo que se solicita y especifiquen los criterios de congruencia y semejanza que aplicaron para responder.

a) Analicen la pareja de triángulos. Consideren que  $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ .

• Obtengan la medida de  $\overline{A_1B_1}$  y expliquen cómo lo hicieron. \_\_\_\_\_

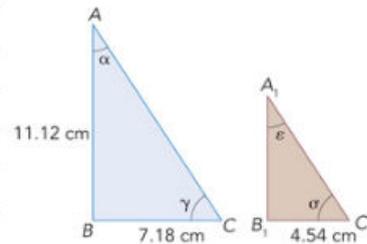
• ¿Cuál es la razón de semejanza de  $\Delta ABC$  y  $\Delta A_1B_1C_1$ ? \_\_\_\_\_

• Determinen la medida de  $\overline{AC}$  y  $\overline{A_1C_1}$ . \_\_\_\_\_

• ¿Los lados  $AC$  y  $A_1C_1$  son proporcionales? Expliquen. \_\_\_\_\_

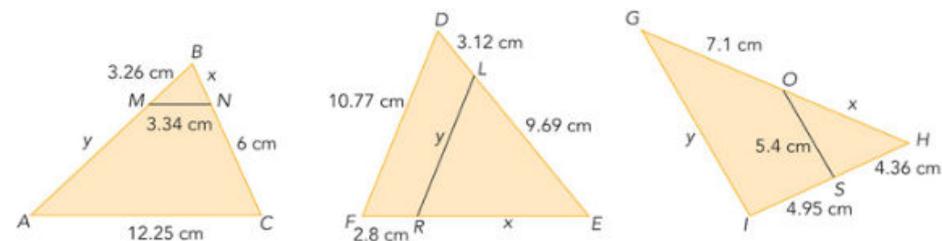
• ¿Cómo son las medidas de los ángulos  $\alpha$  y  $\varepsilon$ ? \_\_\_\_\_

• ¿Y la medida de los ángulos  $\gamma$  y  $\sigma$ ? \_\_\_\_\_



b) Analicen y respondan en su cuaderno.

• Obtengan los valores de  $\overline{AM}$ ,  $\overline{BN}$ ,  $\overline{LR}$ ,  $\overline{RE}$ ,  $\overline{GI}$ , y  $\overline{OH}$ .



• ¿Cuál es la razón de semejanza entre  $\Delta BMN$  y  $\Delta ABC$ ?

• Mídan el ángulo comprendido entre  $ABC$  y entre  $BMN$ . Comparen las medidas. ¿Cómo son entre sí?

• Comparen las medidas de los lados de los triángulos  $BMN$  y  $ABC$ . ¿Qué notan?

• Planteen la igualdad entre las razones que permiten obtener el valor de los segmentos denotados con  $x$  o con  $y$ , en cada caso.

Triángulos	Igualdad	Valor de x	Igualdad	Valor de y
ABC				
FDE				
IGH				

c) Con base en lo anterior, determinen si las siguientes afirmaciones son correctas. Argumenten.

•  $\frac{BM}{BA} = \frac{MN}{AC}$  \_\_\_\_\_

•  $\frac{LE}{DE} = \frac{LR}{DF}$  \_\_\_\_\_

•  $\frac{OS}{GI} = \frac{HO}{GH}$  \_\_\_\_\_



3. Revisen las respuestas de su tarea y contesten.

- a) En el servilletero, ¿cómo determinaron la medida de  $\overline{FG}$ ? \_\_\_\_\_  
 ¿Y de  $\overline{DC}$ ? \_\_\_\_\_
- b) ¿Los triángulos  $CDE$  y  $FGH$  son semejantes? Argumenten. \_\_\_\_\_

■ Con ayuda de su profesor, justifiquen cómo resolvieron sus actividades y discutan si en un mismo par de triángulos se puede usar más de un criterio para determinar si dos triángulos son semejantes. Redacten una breve conclusión acerca de lo estudiado.



TR5

**Educación ambiental.** La reforestación es una estrategia de cuidado del ambiente que consiste en plantar árboles donde ya no existen o quedan pocos, y cuidar que se desarrollen adecuadamente y puedan regenerar un bosque. Participa en las campañas de reforestación de tu comunidad.

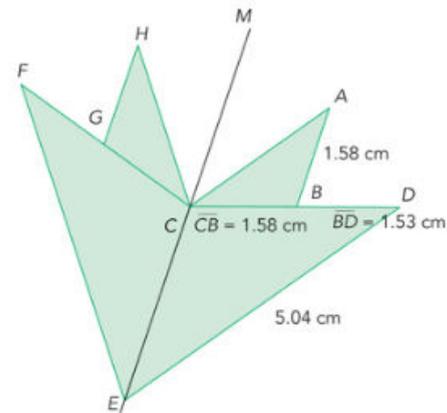
En tu cuaderno, haz los trazos y registra tus respuestas.

- a) Traza dos triángulos rectángulos cuya medida de uno de sus ángulos sea  $36^\circ$ . ¿Cómo son los triángulos que trazaste: semejantes o congruentes? Argumenta.
- b) Traza dos triángulos isósceles cuya medida del ángulo desigual sea  $48^\circ$ , ¿los triángulos son semejantes o congruentes? Explica.
- c) Elige una construcción, puede ser tu casa, tu escuela o un edificio cuyas medidas desconozcas.
- Propón un procedimiento basado en los criterios de semejanza y congruencia de triángulos para calcular su altura. Modela geométricamente tu resultado.

## 2. Problemas geométricos

1. Analicen, discutan y resuelvan las situaciones. Justifiquen sus respuestas.

La imagen de la izquierda representa una hoja de liquidámbar que se usará como logotipo en una campaña de reforestación. El diseñador propone que se borden con dorado los segmentos  $DE$  y  $AC$ .



- a) ¿Cuál es la longitud  $\overline{AC}$ ? \_\_\_\_\_
- b) ¿Cómo obtuvieron la medida de  $\overline{AC}$ ? \_\_\_\_\_
- c) Consideren que  $\overline{EM}$  es un eje de simetría de la figura y respondan:
- ¿ $\Delta ACB \cong \Delta CHG$ ? \_\_\_\_\_
  - ¿ $\Delta FCE \cong \Delta CDE$ ? \_\_\_\_\_

© Nueva México

- d) Ubiquen el punto medio de  $\overline{FE}$  y llámenlo  $P$ . Tracen el segmento que pase por  $P$  y  $C$ . ¿Cómo son los triángulos que se formaron? \_\_\_\_\_
- e) Determinen las medidas de los triángulos  $ABC$ ,  $CDE$ , y  $FPC$ . Expliquen el procedimiento que siguieron. \_\_\_\_\_
- Con la guía del profesor, contrasten sus procedimientos y comenten en qué casos aplicaron la congruencia o la semejanza de triángulos.

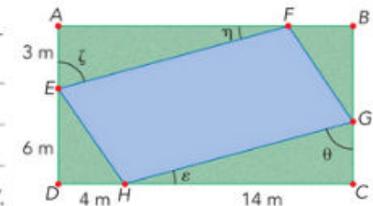
2. Revisen su tarea y respondan en el cuaderno.

- a) Respecto de los triángulos que trazaron, comenten qué criterios de semejanza o congruencia utilizaron para validar su respuesta.
- b) ¿En los dos casos obtuvieron los mismos resultados? ¿Aplicaron los mismos criterios? ¿Por qué?
- c) Respecto del problema que se planteó en el inciso c, ¿cómo calcularon la altura del edificio que eligieron?
- ¿Los procedimientos que emplearon fueron los mismos?
  - Comenten las ventajas de utilizar los criterios de semejanza de triángulos para calcular distancias inaccesibles.
  - Propongan otros contextos en los que puedan aplicar los criterios de semejanza de triángulos.

3. Resuelvan el problema. Justifiquen sus respuestas.

Ernesto construirá una alberca en un jardín rectangular como el que se muestra a la derecha.

- a) Determinen qué triángulos son congruentes y cuáles semejantes. Argumenten. \_\_\_\_\_
- b) Obtengan la medida de los ángulos internos de  $\Delta AEF$  y  $\Delta GHC$ . ¿Cómo son las medidas? \_\_\_\_\_
- c) Determinen las medidas de los lados  $EF$  y  $HG$  de  $\Delta AEF$  y  $\Delta GHC$ . ¿Cómo son entre sí? \_\_\_\_\_
- d) ¿Las condiciones que analizaron en los incisos b y d son suficientes para afirmar que los triángulos  $AEF$  y  $GHC$  son congruentes? Sustenten. \_\_\_\_\_



- e) Verifiquen que  $\triangle DEH$  y  $\triangle BGF$  tienen dos lados iguales, y la medida del ángulo comprendido entre ellos es igual. Expliquen si estas condiciones son suficientes para determinar si dos ángulos son congruentes. \_\_\_\_\_

- Expongan sus procedimientos y discutan qué condiciones se pueden verificar para determinar si dos triángulos son congruentes o semejantes. Lleguen a consensos con ayuda del profesor.



**En tu cuaderno, haz lo que se solicita.**

a) Observa la figura de la izquierda y calcula el perímetro del trapecio isósceles y de cada triángulo marcado en su interior.

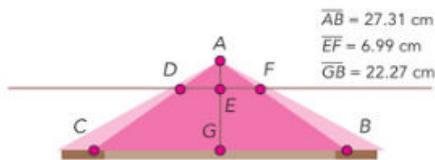
### 3. Otros problemas geométricos

Expongan el resultado de su tarea, analicen y respondan. Con ayuda de su profesor, lleguen a consensos.

- a) Retomen el problema del trapecio. ¿Cómo determinaron la medida de  $\overline{GF}$ ? \_\_\_\_\_
- Si se coloca el triángulo  $HKI$  de manera que forme un rectángulo con el triángulo  $JGF$ , ¿el rectángulo resultante es congruente con el rectángulo  $GHFI$ ? \_\_\_\_\_
  - ¿Qué medidas deben tener los triángulos para formar un rectángulo congruente? \_\_\_\_\_

1. Hagan lo que se solicita y respondan. Consideren que el triángulo  $ABC$  es isósceles.

- a) Demuestren que los triángulos  $AGB$  y  $AGC$  son congruentes. \_\_\_\_\_
- b) ¿Cuál es la razón de semejanza entre los triángulos  $AGB$  y  $AGC$ ? Argumenten. \_\_\_\_\_
- c) Si  $\triangle AEF \sim \triangle AGB$ , ¿cuál es la medida de  $\overline{AE}$ ? \_\_\_\_\_
- d) ¿Qué procedimiento siguieron para obtener el dato que se solicita? \_\_\_\_\_
- e) Comparen sus respuestas con las de otros equipos y corrijan si lo consideran necesario.

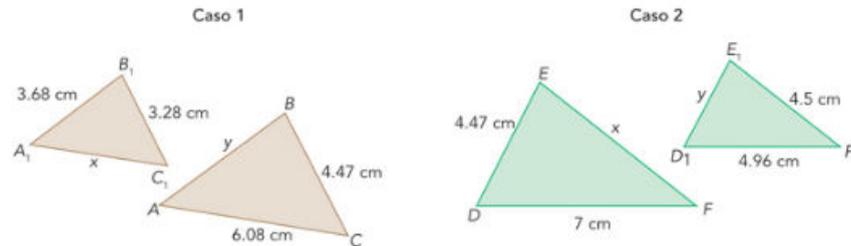


### TIC

En el siguiente sitio podrás ampliar la información del contenido de la lección. Resuelve los problemas propuestos.  
[portalacademico.cch.unam.mx/alumno/aprende/matemáticas2/semejanzatriangulos/page/0/8](http://portalacademico.cch.unam.mx/alumno/aprende/matemáticas2/semejanzatriangulos/page/0/8)  
 (consulta: 22 de diciembre de 2016, 11:00 horas)

### Practico

1. En cada pareja de triángulos, determina la medida del lado  $x$ , así como la medida del lado  $y$ . Responde en tu cuaderno.



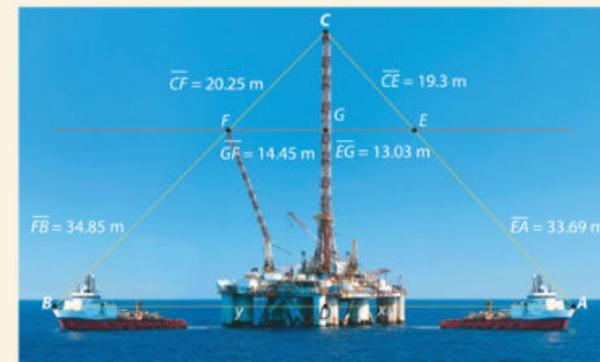
- a) ¿Cuál es la razón de semejanza para cada pareja de triángulos?  
 b) Explica cómo determinaste los valores. Luego, compara tu procedimiento con el de otros compañeros y argumentalos.

- Comenten en grupo acerca de cómo aplicar los criterios de semejanza y congruencia para resolver problemas y elaboren una conclusión al respecto.

### Validemos lo aprendido

1. Analiza y resuelve lo que se solicita.

- a) Calcula la distancia que hay entre los barcos petroleros ( $AB$ ).  
 b) Describe el procedimiento que seguiste para obtener el resultado.  
 c) Compara tu resultado y procedimiento con el de tus compañeros. Validen sus resultados con ayuda del profesor.



Sin hacer mediciones, divide  $\overline{OP}$  en tres partes iguales. Puedes usar tu compás.



- Describe el procedimiento que seguiste para dividir el segmento.

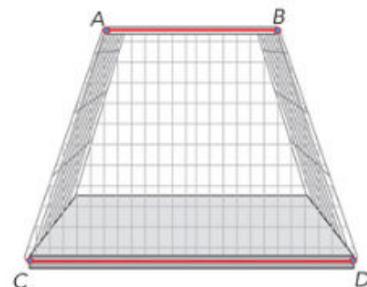
# Teorema de Tales

Eje: Forma, espacio y medida

Tema: Figuras y cuerpos

Contenido: Resolución de problemas geométricos mediante el teorema de Tales

## 1. División de un segmento en partes iguales



1. Resuelve los problemas. Escribe los procedimientos que usaste.

Liliana diseña jaulas para mascotas. Para reforzar la estructura agregará barras laterales, de base a base, que pasen por los puntos  $E, F, G, H$ . Las barras laterales tendrán medidas de separación proporcionales.

a) Los siguientes segmentos representan las bases de la jaula. Divide  $\overline{CD}$  en partes proporcionales a las dadas en  $\overline{AB}$ .



b) ¿Qué procedimiento seguiste para dividir los segmentos? \_\_\_\_\_

c) ¿Para hacer los trazos se requieren las medidas de  $\overline{AB}$  y  $\overline{CD}$ ? \_\_\_\_\_

d) Comprueba que las medidas entre los segmentos son proporcionales. \_\_\_\_\_

■ Comenta tu procedimiento con tus compañeros.

2. Analicen el procedimiento de Ramón y respondan en el cuaderno.

Para verificar que las medidas sean proporcionales, Ramón hizo la construcción de la izquierda y explicó su procedimiento:

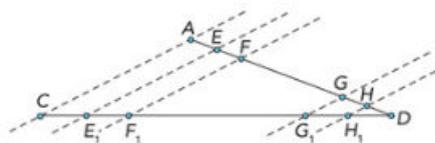
Uní  $\overline{AB}$  y  $\overline{CD}$ , de manera que ambos se originen en  $D$ . Para dividir  $\overline{CD}$ , primero tracé un segmento que pasa por  $A$  y  $C$ ; luego, tracé una recta que pasa por  $E$ . Al punto donde la recta interseca  $\overline{CD}$  lo llamé  $E_1$ . Repetí el procedimiento con los puntos  $F, G$  y  $H$ .

a) ¿Cómo son entre sí las rectas que pasan por los puntos  $E, F, G$  y  $H$ ?  
 b) Midan los siguientes segmentos y expliquen qué relación se puede establecer entre ellos.

•  $\overline{AE}$  y  $\overline{CE_1}$       •  $\overline{FG}$  y  $\overline{F_1G_1}$

c) Al comparar la medida de  $\overline{AE}$  y  $\overline{FG}$ , ¿qué relación se puede establecer? Expliquen.

d) ¿Esta relación aplica para  $\overline{CE_1}$  y  $\overline{F_1G_1}$ ? Argumenten.



© Nueva México

- e) ¿Este procedimiento se puede aplicar para dividir en la misma proporción cualquier segmento de recta?
- f) Es correcto afirmar que: " $\overline{AD}$  se dividió en cinco partes, donde cuatro de ellas miden lo mismo, y una mide cuatro veces lo que mide cada una de las otras, y que en el  $\overline{CD}$  sucedió lo mismo".

3. Hagan los trazos y respondan.

- a) Tracen el segmento  $\overline{IK}$ .
- b) Utilicen su compás con apertura de 2 cm y tracen una semicircunferencia con centro en  $I$  que interseque a  $\overline{IJ}$ ; al punto de intersección nómbrenlo  $P$ .
- c) Tracen una semicircunferencia con centro en  $P$ , al punto que interseca a  $\overline{IJ}$  llámenlo  $Q$ .
- d) Repitan el procedimiento, ahora tomen como centro de la circunferencia a  $Q$  y al punto donde interseca a  $\overline{IJ}$  llámenlo  $R$ .
- e) Unan los puntos  $J$  y  $K$  y tracen rectas paralelas a  $\overline{JK}$  que pasen por  $P, Q$  y  $R$ .
- f) En la construcción de Ramón se formó el  $\triangle ADC$ . ¿Qué otros triángulos se pueden formar con las rectas que pasan por los puntos en que se dividió  $\overline{CD}$ ?

• ¿Los triángulos  $\triangle HH_1D$  y  $\triangle ADC$  son semejantes? Argumenten.

■ Socialicen sus argumentos y escriban en su cuaderno una conclusión sobre los procedimientos trabajados.



K

• ¿Los segmentos obtenidos en  $\overline{IJ}$  son proporcionales a los obtenidos en  $\overline{IK}$ ? Argumenten. \_\_\_\_\_

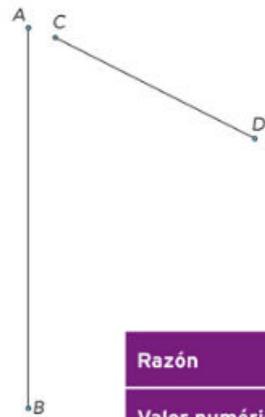
4. Retomen las actividades anteriores y compárenlas con su tarea. Respondan las preguntas y, con ayuda de su profesor, concluyan.

- a) ¿Cómo dividieron  $\overline{OP}$ ? \_\_\_\_\_
- b) ¿Qué diferencias o semejanzas identifican entre el procedimiento que siguieron al hacer la tarea con los aplicados en las actividades anteriores? \_\_\_\_\_

■ Acuerden un procedimiento para dividir un segmento en partes proporcionales.

© Nueva México





### Haz lo que se solicita.

- Ubica el punto medio de  $\overline{CD}$  y llámalo  $K$ .
- Traza una recta perpendicular  $R_1$ , a  $\overline{CD}$  y que pase por  $K$ . Al punto de intersección entre  $R_1$  y  $\overline{AB}$  llámalo  $K'$ .
- Divide  $\overline{CK}$  en cuatro partes iguales; llámalas  $L$ ,  $M$  y  $N$ .
- Traza rectas paralelas a  $R_1$  que pasen por  $L$ ,  $M$  y  $N$ . A los puntos de intersección entre las rectas y  $\overline{AB}$  llámalos  $L'$ ,  $M'$ ,  $N'$ .

Completa la tabla, mide lo que sea necesario.

Razón	$\frac{KL}{LM}$	$\frac{LM}{MN}$	$\frac{K'L'}{L'M'}$	$\frac{L'M'}{M'N'}$
Valor numérico				



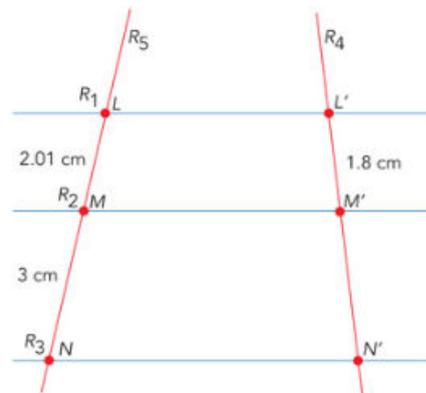
## 2. Teorema de Tales

Revisen su tarea y con ayuda del profesor respondan.

- ¿Cómo son los cocientes obtenidos en la tabla? \_\_\_\_\_
- ¿La razón  $\frac{KL}{LM}$  es igual a  $\frac{K'L'}{L'M'}$ ? \_\_\_\_\_
- ¿Sucede lo mismo al comparar cualquier segmento y su correspondiente? \_\_\_\_\_
- ¿Qué conclusión pueden obtener de lo estudiado? \_\_\_\_\_



### 1. Observen la construcción geométrica y respondan.



- Comparen la distancia que hay entre las rectas  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$ . ¿Cómo son entre sí? \_\_\_\_\_
- Determinen cómo son  $R_4$  y  $R_5$  en función de la distancia que hay entre ellas. \_\_\_\_\_
- ¿Qué relación se establece entre las medidas de  $\overline{LM}$ ,  $\overline{L'M'}$ ,  $\overline{MN}$  y  $\overline{M'N'}$ ? \_\_\_\_\_
- Establezcan una igualdad entre los datos anteriores. \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es la medida  $\overline{M'N'}$ ? \_\_\_\_\_

© Nueva México

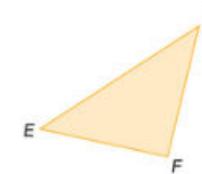
- Explican el procedimiento empleado para responder la pregunta anterior. \_\_\_\_\_
- Analicen la siguiente afirmación y validenla con ayuda del profesor.

Si tres o más rectas paralelas son cortadas por rectas transversales, la razón entre las medidas de dos segmentos cualesquiera cortados por una transversal será igual a la razón de las medidas de los segmentos correspondientes de la otra, es decir, serán proporcionales.

■ Revisen las actividades anteriores. Con la ayuda de su profesor concluyan.

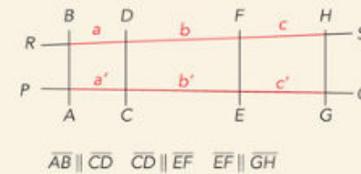
### 2. Hagan lo que se indica y respondan.

- En el triángulo  $EFG$ , ubiquen el punto medio de  $\overline{GE}$  y llámenlo  $K$ , consideren a  $\overline{EF}$  como la base. Tracen una paralela a  $\overline{EF}$  que pase por  $K$ . Al correspondiente de  $K$ , llámenlo  $K'$ .



- ¿Cómo son los triángulos que se formaron? \_\_\_\_\_
- Dividan  $\overline{EK}$  en cuatro partes iguales. A los puntos que dividen los segmentos llámenlos  $L$ ,  $M$  y  $N$ . Tracen rectas paralelas a  $\overline{EF}$  y que pasen por los puntos anteriores, nombren los correspondientes como  $L'$ ,  $M'$  y  $N'$ .
  - ¿Cuántos triángulos se formaron? ¿Qué relación hay entre estos? \_\_\_\_\_
- Demuestren que  $\overline{EK}$ ,  $\overline{KL}$ ,  $\overline{LM}$  y  $\overline{MN}$  son proporcionales a sus correspondientes.
- Analicen la siguiente información.

## Teorema de Tales



Si varias paralelas son cortadas por dos secantes, los segmentos determinados en una secante son proporcionales a los determinados en la otra secante. Por ejemplo, en la figura se muestran varias paralelas cortadas por dos secantes:

$$\text{Se cumple que: } \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

- Comenten cómo se relaciona el teorema de Tales con lo trabajado a lo largo de la lección.



TIC



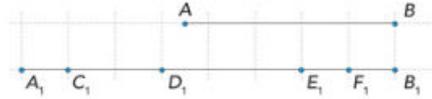
En los siguientes sitios web, encontrarás información acerca del teorema de Tales y algunos ejemplos de aplicación.  
[mimosa.pntic.mec.es/clobo/geoweb/semj2.htm](http://mimosa.pntic.mec.es/clobo/geoweb/semj2.htm)

[www.profesorenlinea.cl/geometria/Teorema\\_de\\_Tales.html](http://www.profesorenlinea.cl/geometria/Teorema_de_Tales.html)  
 (consulta: 22 de diciembre de 2016, 11:20 horas)





Aplica el teorema de Tales y divide  $\overline{AB}$  en segmentos proporcionales a los dados en  $\overline{A_1B_1}$ .



Valida tu resultado.



### 3. Problemas asociados con el teorema de Tales

Expongan el resultado de su tarea.

¿Se puede asegurar que la medida de los segmentos correspondientes en que dividieron  $\overline{AB}$  y  $\overline{A_1B_1}$  son proporcionales?

■ Con ayuda de su profesor lleguen a consensos.



1. Analicen los triángulos de la izquierda y respondan. Justifiquen y argumenten sus respuestas.

Para cada caso, determinen el valor de  $x_1$ .

a) ¿Las medidas de  $\overline{VZ}$  y  $\overline{ZU}$  son proporcionales? \_\_\_\_\_

b) ¿Se puede afirmar que  $\overline{WA_1}$  y  $\overline{A_1U}$  son proporcionales? \_\_\_\_\_

c) Apliquen el teorema de Tales y demuestren que:

•  $\frac{\overline{VZ}}{\overline{ZU}} = \frac{\overline{WA_1}}{\overline{A_1U}}$  \_\_\_\_\_

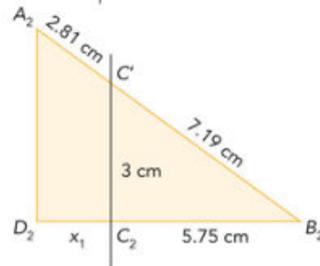
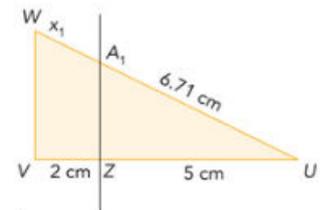
•  $\frac{\overline{D_2C_2}}{\overline{C_2B_2}} = \frac{\overline{A_2C'}}{\overline{C'B_2}}$  \_\_\_\_\_

• ¿Cuál es la razón de semejanza entre las medidas de los segmentos? \_\_\_\_\_

d) Determina la razón de semejanza de los siguientes triángulos:

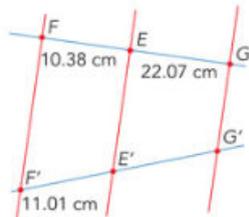
•  $\triangle WUV$  y  $\triangle A_1UZ$       •  $\triangle A_2B_2D_2$  y  $\triangle C'B_2C_2$

■ Comparen sus respuestas con las de sus compañeros de grupo y, con ayuda del profesor, lleguen a consensos.



### Practica

1. Dada la construcción determinen la medida de  $\overline{E'G'}$ : \_\_\_\_\_



© Nueva México

### Validemos lo aprendido



1. Aplica el teorema de Tales para hacer los trazos y responde las preguntas.

a) Divide  $\overline{ST}$  en tres partes, de manera que la primera parte mida la mitad que la segunda, y la tercera mida el doble que la segunda.



• ¿Las medidas de los segmentos obtenidos son proporcionales? \_\_\_\_\_

b) Divide el segmento  $\overline{UV}$  a razón de 1:0.75; considera la longitud en cm.

• ¿Puede uno de los segmentos obtenidos medir 2.49 cm? Sustenta tu respuesta. \_\_\_\_\_

c) Divide el segmento  $\overline{WZ}$  a razón 4:6.



d) Divide el segmento  $\overline{A_1B_1}$  a razón  $\frac{2}{12}$ .



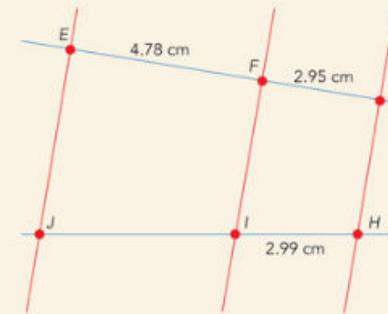
• Aplica el teorema de Tales y explica por qué las medidas de los segmentos obtenidos cumplen con la razón dada. \_\_\_\_\_

e) Joshua afirma que las rectas rojas son paralelas. Comprueba si lo que dice Joshua es correcto.

• ¿Cuál es la medida  $\overline{JI}$ ? \_\_\_\_\_

• ¿Las rectas azules son paralelas? Sustenten con argumentos. \_\_\_\_\_

• En grupo, analicen sus respuestas y procedimientos.



■ Redacten una conclusión relacionada con la aplicación del teorema de Tales en la resolución de problemas geométricos.

© Nueva México

Investiguen en un medio electrónico o impreso el significado y origen del término homotecia. Escriban el resultado de su trabajo en su cuaderno.



# Homotecia

Eje: Forma, espacio y medida

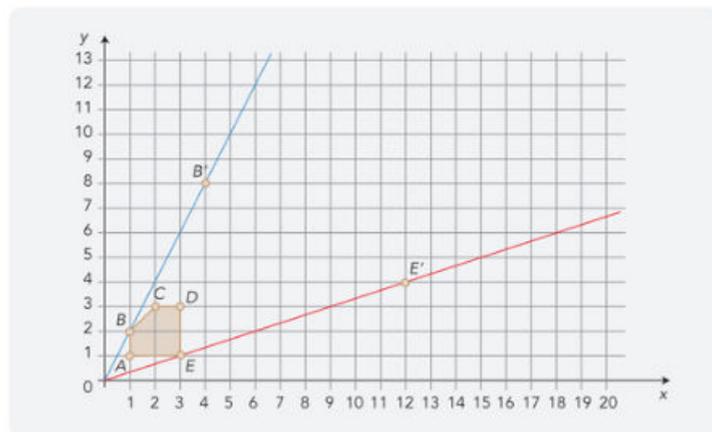
Tema: Figuras y cuerpos

Contenido: Aplicación de la semejanza en la construcción de figuras homotéticas

## 1. Figuras homotéticas en el plano



1. Analiza el pentágono irregular  $ABCDE$  y responde.



- De los puntos señalados con letras, escribe cuáles pertenecen a las rectas.
  - Recta azul. \_\_\_\_\_
  - Recta roja. \_\_\_\_\_
  - ¿En qué punto del plano coinciden? \_\_\_\_\_
- Escribe las coordenadas de los siguientes puntos:
  - $B$  \_\_\_\_\_       $B'$  \_\_\_\_\_
  - $E$  \_\_\_\_\_       $E'$  \_\_\_\_\_
- Compara las coordenadas de los puntos anteriores y establece la relación que hay entre ellos.
  - $E$  y  $E'$  \_\_\_\_\_       $B$  y  $B'$  \_\_\_\_\_
- ¿En ambos casos se obtiene la misma relación? ¿Por qué? \_\_\_\_\_
- Traza una recta que parta del origen y que pase por el punto  $A$ ; otra que pase por  $C$  y una tercera recta que pase por  $D$ .
- Escribe las coordenadas de los siguientes puntos:
  - $A'$  \_\_\_\_\_       $C'$  \_\_\_\_\_       $D'$  \_\_\_\_\_

© Nueva México

- ¿Qué relación puedes establecer entre las coordenadas de  $A, B, C, D, E$  y las coordenadas de  $A', B', C', D', E'$ ? \_\_\_\_\_
- Une los puntos  $A', B', C', D', E'$ . ¿Qué relación puedes establecer entre los pentágonos  $ABCDE$  y  $A'B'C'D'E'$ ? \_\_\_\_\_
- ¿Qué propiedades del pentágono original se mantienen en el nuevo pentágono? \_\_\_\_\_
- ¿Qué propiedades se modificaron? \_\_\_\_\_



2. Analicen los pentágonos de la actividad anterior, completen la tabla y respondan.

Segmento	$AB$	$A'B'$	$BC$	$B'C'$	$CD$	$C'D'$	$DE$	$D'E'$	$EA$	$E'A'$
Medida										
Cociente	$\frac{A'B'}{AB} =$		$\frac{B'C'}{BC} =$		$\frac{C'D'}{CD} =$		$\frac{D'E'}{DE} =$		$\frac{E'A'}{EA} =$	

- Al comparar los cocientes, ¿qué identifican? \_\_\_\_\_
- Concluyan acerca de la relación que hay entre las medidas de los lados del pentágono  $ABCDE$  y las del pentágono  $A'B'C'D'E'$ .  
\_\_\_\_\_
- Consideren la coordenada  $(0, 0)$  como punto  $O$ . Midan y completen la tabla:

Segmento	$OA$	$OA'$	$OB$	$OB'$	$OC$	$OC'$	$OD$	$OD'$	$OE$	$OE'$
Medida										

- Analicen los datos de la tabla, ¿qué relación identifican respecto de la medida de la distancia del punto  $O$  a los vértices de los pentágonos  $ABCDE$  y  $A'B'C'D'E'$ ? \_\_\_\_\_
- Registren su conclusión. \_\_\_\_\_
- Con la ayuda de su profesor analicen las actividades anteriores y concluyan.

3. Revisen su tarea y respondan.

- ¿Qué es una homotecia? \_\_\_\_\_
- Los pentágonos  $ABCDE$  y  $A'B'C'D'E'$ , ¿son polígonos homotéticos? \_\_\_\_\_



- c) Lean la siguiente información. Compárenla con el resultado de su investigación. Si lo consideran necesario, complementen su trabajo.

## Homotecia

Cuando se aplica una homotecia a una figura plana se transforma en otra figura de igual forma, pero de menor o mayor tamaño. Dos figuras planas son **homotéticas** cuando las rectas que pasan por los vértices correspondientes se intersecan en un mismo punto fijo, llamado **centro de homotecia** o **punto O**. Las figuras homotéticas tienen las siguientes propiedades:

- Toda recta que pasa por el centro de homotecia es invariante, es decir, se transforma en sí misma.
- Toda recta que no pasa por el centro de homotecia se transforma en otra recta paralela a la dada.

La razón de dos segmentos homotéticos se expresa como  $\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$  y se conoce como **razón de homotecia**.

El cociente que se obtiene se denomina **factor de homotecia** ( $k$ ).

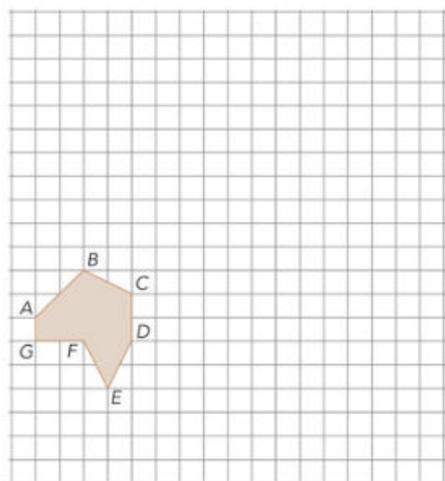
- Cuando  $k$  es mayor que cero y menor que uno ( $0 < k < 1$ ) el polígono obtenido es una reducción.
- Cuando  $k$  es mayor que uno ( $k > 1$ ), entonces se trata de una ampliación.

d) Con base en lo anterior, determinen la razón de homotecia de los pentágonos  $ABCDE$  y  $A'B'C'D'E'$ .

e) ¿El pentágono  $A'B'C'D'E'$  es una ampliación o una reducción del pentágono  $ABCDE$ ? Argumenten.

- Con ayuda de su profesor, analicen sus respuestas y escriban sus conclusiones.

Traza un polígono homotético al que se muestra, con factor de homotecia de 3.



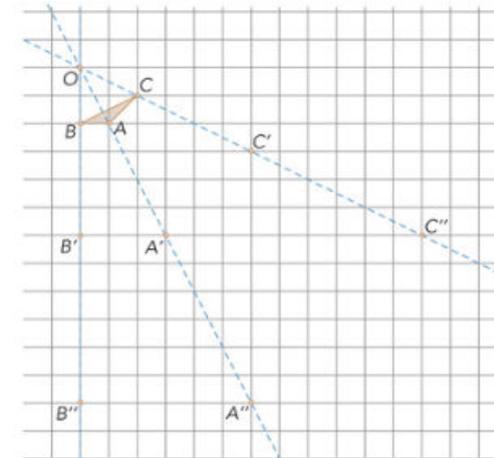
• ¿Cómo determinaste el centro de homotecia? \_\_\_\_\_

De acuerdo con el factor de homotecia dado, ¿el polígono resultante será una ampliación o una reducción? \_\_\_\_\_

© Nueva México

## 2. Figuras homotéticas

1. Unan los puntos  $A'$ ,  $B'$  y  $C'$ ;  $A''$ ,  $B''$  y  $C''$ , formen los polígonos y respondan.



a) Consideren al triángulo  $ABC$  como figura original y determinen cómo son los triángulos  $A'B'C'$  y  $A''B''C''$  respecto de este.

b) Determinen la razón de homotecia entre los siguientes triángulos:

- $\Delta A'B'C'$  y  $\Delta ABC$  \_\_\_\_\_
- $\Delta A''B''C''$  y  $\Delta ABC$  \_\_\_\_\_
- $\Delta A''B''C''$  y  $\Delta A'B'C'$  \_\_\_\_\_

- Comenten sus respuestas y procedimientos con sus compañeros. Con ayuda de su profesor validen sus resultados.

2. Con ayuda del profesor, respondan y concluyan.

a) Expliquen qué propiedades se conservan en los triángulos homotéticos y cuáles se modifican o son variables.

b) Sustenten por qué los triángulos homotéticos son semejantes.

3. Revisen su tarea y, con ayuda del profesor, respondan en su cuaderno.

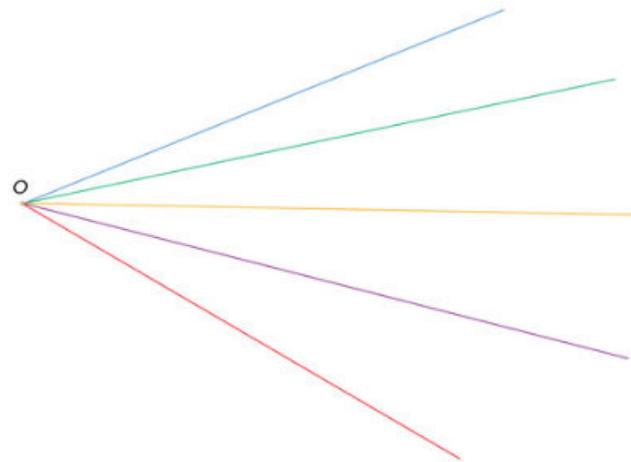
- ¿Qué medidas de los polígonos homotéticos se conservaron?
- ¿Cuáles no se conservaron?
- Comparen sus respuestas con las del inciso a) de la actividad anterior. ¿Esto se puede generalizar para todos los polígonos homotéticos? Argumenten.

© Nueva México



#### 4. Hagan los trazos que se indican.

Tracen una semicircunferencia con centro en  $O$  y radio de 2.5 cm, que interseque a las semirrectas. A los puntos de intersección llámenlos  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  y  $E$ . Unan los puntos y formen un polígono.



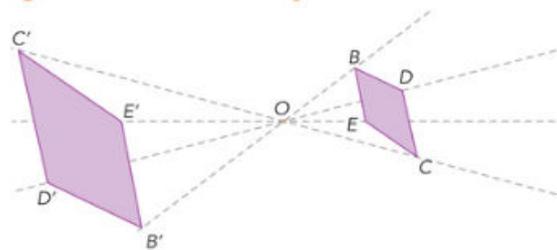
- Tracen un polígono homotético a  $ABCDE$ , con factor de homotecia 3 y llámenlo  $A'B'C'D'E'$ .
  - Construyan otro polígono homotético a  $ABCDE$  con factor de homotecia  $\frac{1}{2}$  y nómbrenlo  $A''B''C''D''E''$ .
- Comparen sus trazos con los de sus compañeros. Validen su trabajo con ayuda del profesor.



### TIC

En la siguiente dirección electrónica: <http://www.telesecundaria.sep.gob.mx/> elige "Materiales Educativos Audiovisuales", haz clic en "TERCER GRADO" y después selecciona la opción "Matemáticas III". En la barra derecha escoge "Bloque 3" y busca en la barra de títulos el recurso "Problemas de homotecia", ahí podrás ver el video explicativo para consolidar lo estudiado en la lección. (consulta: 22 de diciembre de 2016, 16:30 horas)

Analiza la siguiente construcción. Responde en tu cuaderno.



- ¿Cuál es la medida de  $\overline{OB}$  y  $\overline{OB}'$ ?
- Determina la razón de los cuatro segmentos homotéticos representados en la construcción.
- ¿Cuál es la razón de homotecia de los cuadriláteros  $BDCE$  y  $B'D'C'E'$ ?
- ¿Qué significado puedes asociar a la razón de homotecia obtenida?
- Traza una figura homotética a  $BDCE$  con razón de semejanza de  $-1$ .
  - ¿Cuál es la medida del punto  $O$  a cada uno de los vértices de la figura homotética construida?
  - Describe tus experiencias y si hay dudas regístralas para su discusión en clase.

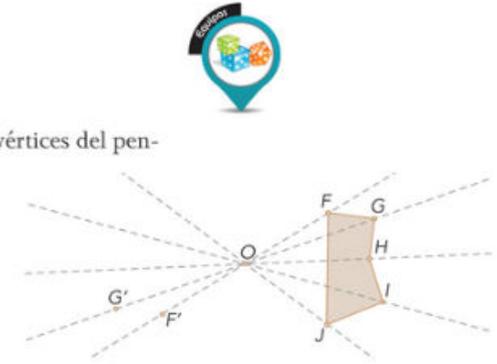
© Nueva México

### 3. Homotecia negativa

Expongan su tarea.

#### 1. Hagan los trazos y respondan.

- Obtengan la medida del punto  $O$  a cada uno de los vértices del pentágono  $FGHIJ$ .
- Ubiquen los puntos correspondientes  $H'$ ,  $I'$  y  $J'$ .
- Unan los puntos con la finalidad de construir el pentágono homotético al original.
- Determinen el factor de homotecia.
- Expongan el procedimiento que siguieron. Después lean la siguiente información:



### Homotecia negativa

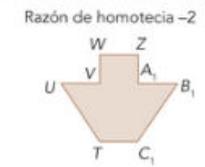
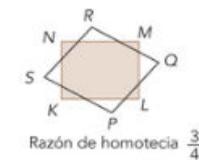
En una **homotecia negativa** el centro de homotecia se encuentra entre los vértices de las figuras. Las figuras homotéticas con razón de homotecia negativa tienen las siguientes características:

- Tienen medidas proporcionales.
- Son figuras semejantes.
- Las medidas de sus ángulos son iguales.

■ Con ayuda de su profesor, lleguen a consensos.

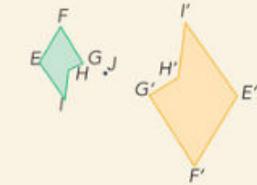
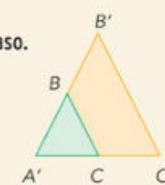
### Practica

- Construye en tu cuaderno las siguientes figuras y traza las figuras homotéticas, de acuerdo con el factor que se indica.



### Validemos lo aprendido

- Determina la razón de homotecia en cada caso.



En tu cuaderno, haz lo que se te solicita.

Construye una tabla de valores y grafica las funciones:

a)  $y = \frac{1}{2}x^2$       b)  $y = 150 - \frac{1}{2}x^2$

Todos los valores de  $x$  son positivos, es decir,  $x \geq 0$ .



# Gráficas de funciones cuadráticas

Eje: Manejo de la información  
 Tema: Proporcionalidad y funciones  
 Contenido: Lectura y construcción de gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos



## Glosario

**función.** Si  $x$  y  $y$  son cantidades variables y existe una regla que asigna un único valor a  $y$  a partir del valor dado de  $x$ , entonces se dice que  $y$  es función de  $x$ .

### 1. Caída libre

- Resuelve los siguientes problemas relacionados con la caída libre de un cuerpo. Justifiquen sus respuestas.

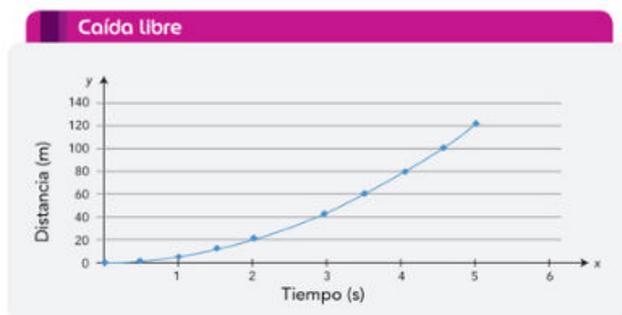
Un objeto se suelta desde lo más alto de la Torre Latinoamericana (140 m de altura), en la Ciudad de México. La **función** para la caída libre de un objeto que no tiene velocidad inicial, es decir, que es soltado sin ejercer una fuerza, es:

$$d = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}(9.8)t^2$$

en la que  $d$ , representa la distancia que recorre el objeto en caída libre;  $g$ , la aceleración debido a la gravedad, que es igual a  $9.8 \text{ m/s}^2$  y  $t$ , que representa el tiempo transcurrido. En este caso  $d$  es función de  $t$ .

- Según la función, ¿cuánto tarda el objeto en llegar al suelo? \_\_\_\_\_

En los primeros segundos, la función se comporta de la siguiente manera:



- Explica por qué el crecimiento de la gráfica no es proporcional, es decir, por qué el crecimiento no es lineal. \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es el mayor exponente al que está elevada la expresión algebraica que representa a la función de la caída libre? \_\_\_\_\_
- ¿Qué tipo de función se representa con la ecuación  $d = \frac{1}{2}gt^2$ ? \_\_\_\_\_
- ¿Cómo es la gráfica que representa una función cuadrática? \_\_\_\_\_

© Nueva México

- Utilicen la función de la caída libre y completen la siguiente tabla:

Tiempo (s)	Distancia (m)	Velocidad $gt$ (m/s)
0		
1		
2		
3		
4		
5		
6		

- ¿Cómo cambia la velocidad con respecto al tiempo?
  - A partir de los datos de la tabla, grafica en tu cuaderno la función distancia contra velocidad.
  - A partir de la gráfica, ¿qué tipo de relación se puede apreciar entre estas variables?
- Ahora grafica la posición del objeto cuando se deja caer desde el punto más alto de la Torre Latinoamericana, es decir, la altura del objeto en función del tiempo.



- ¿Cuáles son las diferencias entre las dos gráficas anteriores?

- Realicen lo que se solicita. Resuelvan en su cuaderno.

- Justifiquen las siguientes afirmaciones.
  - Una función lineal tiene grado uno, mientras que la cuadrática tiene grado dos.
  - Por dos puntos pasa una única recta, mientras que para una cuadrática se necesitan tres puntos.
  - Una función lineal siempre cruza una vez cada eje.
  - Una función cuadrática puede no tener los términos  $bx + c$ .
- Respondan.
  - ¿Una función cuadrática puede tener entre sus elementos uno con exponente mayor que 2?
  - Den un ejemplo de una función cuadrática que no tenga el término independiente, elaboren la gráfica correspondiente y descríbanla.



© Nueva México



3. Con la ayuda de su profesor, revisen las respuestas de las actividades anteriores y respondan las siguientes preguntas.

- ¿Qué característica tiene una gráfica de una relación cuadrática?  
\_\_\_\_\_
  - ¿Cuáles son las diferencias entre las gráficas de una función lineal y las de una función cuadrática? \_\_\_\_\_
4. Revisen su tarea y, con ayuda del profesor, respondan las preguntas.
- De acuerdo con la gráfica, ¿en cuál de las dos funciones van aumentando los valores? \_\_\_\_\_
  - ¿En cuál van disminuyendo? ¿Qué elemento de la función propicia que disminuyan? \_\_\_\_\_
  - ¿Qué pasa con los valores de  $y$  cuando  $x$  toma valores negativos?  
\_\_\_\_\_



**Analiza la información y resuelve lo que se indica.**

En la Luna, el monte Leibniz se levanta a 8 200 m sobre la superficie lunar. Considera que en la Luna  $g = 1.62 \text{ m/s}^2$ .

- Si se deja caer un objeto desde lo más alto del monte, ¿cuánto tiempo tardará en llegar al suelo lunar?
- Elabora una tabla que relacione la posición del objeto en función del tiempo  $y$ , a partir de esta, construye la gráfica Posición-Tiempo.
- Realiza nuevamente la actividad anterior, pero ahora considera la gravedad de la Tierra ( $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ ). Utiliza la misma altura del monte Leibniz.
- Compara ambas gráficas. ¿En cuál se llega antes al suelo?
  - ¿Qué elemento propicia que el objeto llegue antes al suelo?

**2. Construcción de gráficas de funciones cuadráticas**



1. Resuelvan los problemas y justifiquen sus respuestas.

Karla arroja hacia arriba una pelota con una velocidad de 7 m/s. Podemos encontrar la posición de la pelota por medio de la fórmula:

$$A = 2 + 7t - 3.5t^2$$

(Sugerencia: trabajen con intervalos de 0.2 segundos para resolver):

- ¿Desde qué altura lanzó la pelota Karla? ¿Cómo lo saben?
- Grafiquen en su cuaderno la trayectoria que siguió la pelota desde que fue lanzada hasta que llegó al suelo.
  - ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la pelota?
  - ¿En cuánto tiempo alcanzó la altura máxima?
  - ¿A la pelota le lleva el mismo tiempo alcanzar al punto más alto que llegar al suelo?



2. Realicen lo que se solicita en cada problema y respondan.

En un experimento con un misil, se tiene que su velocidad con respecto al tiempo se expresa mediante la función  $v = 60t - 2t^2$ , donde la velocidad se encuentra dada en m/s y el tiempo en segundos.

- A partir de la expresión que representa la velocidad en función del tiempo, grafiquen en su cuaderno la trayectoria que siguió el misil.
  - ¿Cuál es la velocidad máxima a la que llega el misil y en cuánto tiempo la alcanza? \_\_\_\_\_
  - ¿Cuándo alcanza el misil la velocidad de 250 m/s, 400 m/s y 450 m/s? \_\_\_\_\_
  - ¿Cuánto tiempo dura el vuelo del misil? \_\_\_\_\_

En un laboratorio, se experimentó un medicamento en una colonia de conejos, en la que algunos sufren de una enfermedad mortal ( $C$ ). Se tiene calculada su mortandad por mes ( $m$ ) como:  $C = -2(m + 12)(m - 15)$ .

- Construye la gráfica del comportamiento de la función.
  - ¿En qué mes la enfermedad se detuvo? \_\_\_\_\_
  - ¿En qué mes se perdieron más conejos? \_\_\_\_\_
  - Si al inicio había 10 000 conejos, ¿cuántos sobrevivieron? \_\_\_\_\_

3. Expongan el resultado de su tarea y justifiquen sus respuestas.

- ¿Por qué las relaciones establecidas en la tarea se pueden modelar mediante una gráfica de una relación cuadrática?

■ Con ayuda de su profesor respondan y lleguen a consensos.

**Busca en algún medio electrónico o en algún libro lo que significa optimizar, y lo que son los procesos de optimización.**

**3. Optimización**

1. Analicen la información y resuelvan el problema.

Se quiere saber cuál es el área máxima, que se puede cercar, de un terreno rectangular, con 100 m de malla.

Considerando que el rectángulo mide  $x$  de largo y  $y$  de ancho, se tiene que el perímetro es igual a  $2x + 2y = 100$ , por tanto,  $y = 50 - x$  y el área es:  $A = xy$ .

- Definan el área en función de  $x$  y obtengan la función cuadrática que represente el área del problema; tracen la gráfica en su cuaderno.
- ¿Cuál es el máximo de un terreno que se puede cercar?

TIC

Entra al sitio: <http://www.telesecundaria.sep.gob.mx/> elige "Materiales Educativos Audiovisuales", haz clic en "TERCER GRADO" y después selecciona la opción "Matemáticas III". En la barra derecha escoge "Bloque 2" y busca en la barra de títulos el recurso "Ecuaciones no lineales", ahí podrás ver el video explicativo para consolidar lo estudiado en la lección. (consulta: 22 de diciembre de 2016, 16:50 horas)

2. Resuelvan en su cuaderno los siguientes problemas.

Un agricultor sabe que si hoy vende su cosecha de 25 000 kg, le pagarán a 75 centavos el kilogramo. También sabe que venderá 300 kg menos del total por cada día que pase, pero el precio por kilogramo aumentará 5 centavos cada día.

Consideren que sea  $x$  = número de días que espera el agricultor. La cosecha es de  $25\,000 - 300x$ , y el precio de venta es  $75 + 5x$ . La ganancia que obtiene es:

$$g = (25\,000 - 300x)(75 + 5x)$$

- a) Obtengan la función cuadrática que define el problema del precio y tracen la gráfica correspondiente. Consideren los valores de la ecuación y elijan la escala más adecuada.
- b) ¿Cuántos días deberá esperar para obtener el mayor beneficio?

El dueño de una tienda de camisas se percató que, si las da a un precio único de 100 pesos, vende 120 prendas a la semana. Ha estimado que por cada disminución de 5 pesos en el precio, las ventas aumentarán en 20 prendas semanales.

- a) Construye una tabla en la que se considere el precio de las camisas, la cantidad que se venderían y lo que se obtendría por la venta.
  - ¿Qué precio será el más adecuado para obtener la máxima ganancia a la semana?
- b) Tracen en su cuaderno la gráfica correspondiente y obtengan la función que define el problema del precio.
- c) En la gráfica, ¿cómo distingues cuál es el precio óptimo, es decir, cuánto deberá disminuir el precio para obtener el mayor beneficio?

■ Comparen sus gráficas y sus respuestas con las de otros compañeros.

3. Expongan el resultado de su tarea, argumenten sus respuestas. Con ayuda de su profesor, respondan las preguntas y lleguen a consensos.

- a) ¿Qué aspectos consideraron para la construcción de las gráficas?
- b) ¿Qué forma tienen las gráficas?
- c) ¿Todas corresponden a una función cuadrática?

Practica

1. Resuelvan el siguiente problema. Una vez que concluyan, comparen sus resultados con el resto del grupo.

Un empresario vende antenas y estimó que los ingresos anuales de su compañía, en pesos, se pueden expresar mediante la función:  $15x^2 + 25000$ , mientras que sus gastos se dan por medio de la función:  $20x^2 + 1000x + 50000$  donde  $x$  representa la cantidad de unidades vendidas.

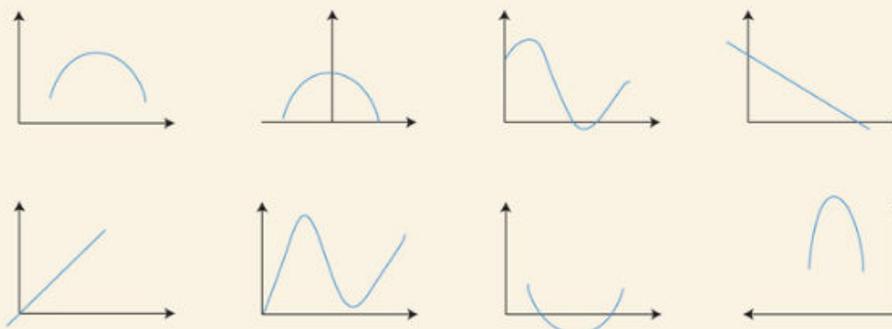
- a) Obtén la función cuadrática que defina el beneficio anual. El beneficio es el resultado de restar a los ingresos, los gastos.
- b) Grafica en tu cuaderno la función obtenida.
- c) Determina las unidades que deben ser vendidas para obtener el máximo beneficio.

Validemos lo aprendido

1. Determinen cuáles de las siguientes funciones son cuadráticas:

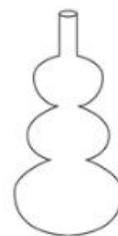
- a)  $y = 2 - 4x^2$
- b)  $y^2 = x^2 + z^2$
- c)  $y = 2^x - x^2$
- d)  $y^2 = 1 - x^2$
- e)  $y = x^2 - 2x + 1$
- f)  $y = x + 2$
- g)  $y = x^2$
- h)  $y = 2(x + 1)^2 - 1$

2. Señalen qué gráficas corresponden a una función cuadrática.



Reflexiona la situación y resuelve.

Grafica en el plano cartesiano cómo piensas que es la relación entre el tiempo y la altura que va alcanzando el líquido cuando la botella, que se muestra, se va llenando con un chorro de agua que cae de manera constante.



- a) ¿Qué sección de la botella se llena más rápidamente?
- b) ¿Qué sección tarda más en llenarse?

# Gráficas que modelan movimientos

**Eje:** Manejo de la información  
**Tema:** Proporcionalidad y funciones  
**Contenido:** Lectura y construcción de gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera



## 1. Gráficas que modelan fenómenos de movimiento

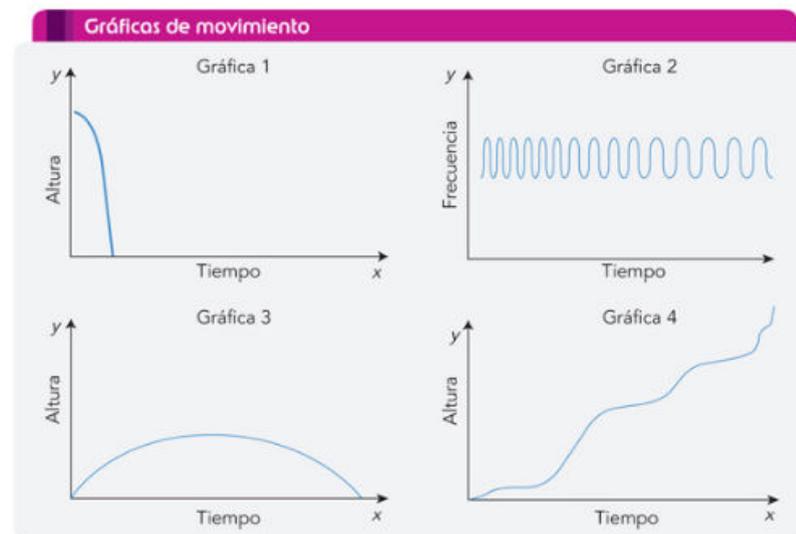
Revisen su tarea y, con ayuda del profesor, respondan las siguientes preguntas en su cuaderno.

- Describan cómo es la relación que hay entre el tiempo y la altura que alcanza el líquido cuando se llena la botella de manera constante.
  - ¿Qué elementos consideraron para elaborar la gráfica?
  - ¿Cómo pueden verificar que su gráfica es correcta?
  - ¿La gráfica sería la misma si el llenado no fuera constante?
  - ¿Cuál sección se llenó con mayor rapidez? ¿Cuál con mayor lentitud?
- ¿Cuál es el patrón que identifican en la gráfica?
  - ¿En algún momento la gráfica se vuelve predecible? Expliquen.



### 1. Analicen las gráficas y realicen lo que se solicita.

- Indiquen a cuál de los siguientes fenómenos, vinculados con movimientos, se refiere cada una de las gráficas.
  - Un elevador deteniéndose en cada piso.
  - La posición de un objeto cuando se deja caer desde un edificio.
  - La trayectoria de un proyectil.
  - La frecuencia del sonido de un tren al acercarse y al alejarse.
  - Caída en paracaídas.



© Nueva México

- Expliquen cómo se asocian los fenómenos con las gráficas.
  - ¿Qué representa, en el fenómeno, cada sección recta de la gráfica?
  - ¿Qué representa, en la gráfica correspondiente, la sección curva?

## 2. Analicen y resuelvan el problema. Justifiquen sus respuestas.



La Luna no tiene brillo propio, lo que se observa desde la Tierra es el reflejo de la luz del Sol. Sus fases describen la posición de la Luna, la Tierra y el Sol. El calendario que se muestra presenta la visibilidad de la Luna desde la Tierra durante los días de enero y febrero de 2014.

Domingo	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado
		Enero 2014	1 Luna nueva	2 1% de visibilidad	3 4% de visibilidad	4 9% de visibilidad
5 18% de visibilidad	6 27% de visibilidad	7 38% de visibilidad	8 48% de visibilidad	9 59% de visibilidad	10 68% de visibilidad	11 77% de visibilidad
12 85% de visibilidad	13 91% de visibilidad	14 96% de visibilidad	15 99% de visibilidad	16 Luna llena	17 99% de visibilidad	18 97% de visibilidad
19 93% de visibilidad	20 87% de visibilidad	21 80% de visibilidad	22 72% de visibilidad	23 62% de visibilidad	24 52% de visibilidad	25 42% de visibilidad
26 31% de visibilidad	27 2% de visibilidad	28 12% de visibilidad	29 5% de visibilidad	30 1% de visibilidad	31 Luna Nueva	Febrero 2014 1 2% de visibilidad
2 6% de visibilidad	3 13% de visibilidad	4 22% de visibilidad	5 32% de visibilidad	6 42% de visibilidad	7 52% de visibilidad	8 62% de visibilidad
9 71% de visibilidad	10 79% de visibilidad	11 86% de visibilidad	12 92% de visibilidad	13 96% de visibilidad	14 99% de visibilidad	15 Luna llena
16 99% de visibilidad	17 96% de visibilidad	18 92% de visibilidad	19 85% de visibilidad	20 77% de visibilidad	21 68% de visibilidad	22 58% de visibilidad
23 47% de visibilidad	24 36% de visibilidad	25 25% de visibilidad	26 16% de visibilidad	27 8% de visibilidad	28 3% de visibilidad	

Fuente: [www.vercalendario.info/es/luna/mexico-ano-calendario-2014.html](http://www.vercalendario.info/es/luna/mexico-ano-calendario-2014.html), (consulta: 25 de septiembre de 2014).

- Elaboren una gráfica que represente el tiempo y la visibilidad ocupando los datos del calendario presentado. Consideren una numeración corrida de los días (del día 1 al 59).
  - En la gráfica, ¿a qué valores corresponden la luna nueva y la luna llena? \_\_\_\_\_

© Nueva México

- b) De acuerdo con la gráfica, ¿en qué noches se puede decir que la Luna está en creciente? \_\_\_\_\_
- ¿En qué noche la Luna está en cuarto creciente? \_\_\_\_\_
  - ¿En qué noches la Luna mengua o decrece? \_\_\_\_\_
  - ¿En qué noche tiene la Luna cuarto menguante? \_\_\_\_\_
- c) A partir de la gráfica, determinen qué día de marzo de 2014 hubo luna llena y luna nueva. Compruébalo con el calendario completo.



En tu cuaderno, haz lo que se indica.

Investiga en algún medio electrónico o en libros el comportamiento del estado físico del agua, con diferentes temperaturas. Registra la información en una tabla como la que se muestra para sistematizarla.

Temperatura	Estado físico del agua	Fenómeno asociado	Observaciones adicionales

## 2. La temperatura del agua



Revisen su tarea y con ayuda del profesor respondan.

- ¿A qué fenómenos se asocia la temperatura alta del agua?
- ¿Este fenómeno puede modelarse por medio de una gráfica?
- ¿Qué variables son necesarias para la representación gráfica?
- En su investigación, ¿identificaron alguna gráfica asociada a la relación temperatura-tiempo? Expliquen sus características.



- Realiza en tu cuaderno lo que se pide en la actividad.

En un matraz se pone a calentar medio litro de agua y se mide su temperatura conforme pasa el tiempo. Se obtiene la siguiente tabla de datos:

Tiempo (min)	Temperatura (°C)
0	17
2	17
4	29
6	41
8	54
10	67
12	80
14	95
16	100
18	100

- Grafica los datos contenidos en la tabla.
- Describe las etapas que se pueden observar en la gráfica:
  - En el tiempo que tarda en pasar de la temperatura ambiente a calentarse, ¿cuánto tiempo permanece constante la temperatura?
  - En la etapa de calentamiento, ¿cómo aumenta la temperatura?
  - Cuando se llega al punto de ebullición, ¿cuánto tiempo permanece constante?

© Nueva México

- Resuelvan el siguiente problema. Justifiquen sus respuestas.



- La gráfica describe las distancias que recorre Emiliano durante un día normal y el tiempo que tarda.



- ¿Qué distancias recorre durante sus actividades? \_\_\_\_\_
  - ¿En qué parte de la gráfica se puede apreciar cuando Emiliano está viajando? \_\_\_\_\_
  - ¿Cómo se muestra en la gráfica cuando permanece en un lugar? \_\_\_\_\_
  - ¿A qué velocidad va Emiliano cuando va de un punto a otro? \_\_\_\_\_
  - Por las distancias que recorre y el tiempo que tarda, ¿Emiliano tiene auto, usa transporte público o camina? \_\_\_\_\_
  - Si Emiliano termina en el mismo lugar en donde empezó, ¿por qué no regresa al mismo punto en la gráfica? \_\_\_\_\_
- Elaboren en su cuaderno una gráfica similar a la anterior en la que se muestren sus actividades diarias.
  - En un experimento se tiene una colonia de 3 000 bacterias que se duplica cada media hora. Calculen el número de bacterias al término de cinco horas. Registren los resultados en una tabla y represéntenlos en una gráfica.
    - ¿Cuántas bacterias hay después de las cinco horas? \_\_\_\_\_
    - ¿Encontraron alguna dificultad al graficar la situación? \_\_\_\_\_
    - En una sola expresión matemática, describan cómo se calculó la población final. Es decir, sea  $P_f$  la población final, entonces,

$$P_f = \underline{\hspace{2cm}}$$

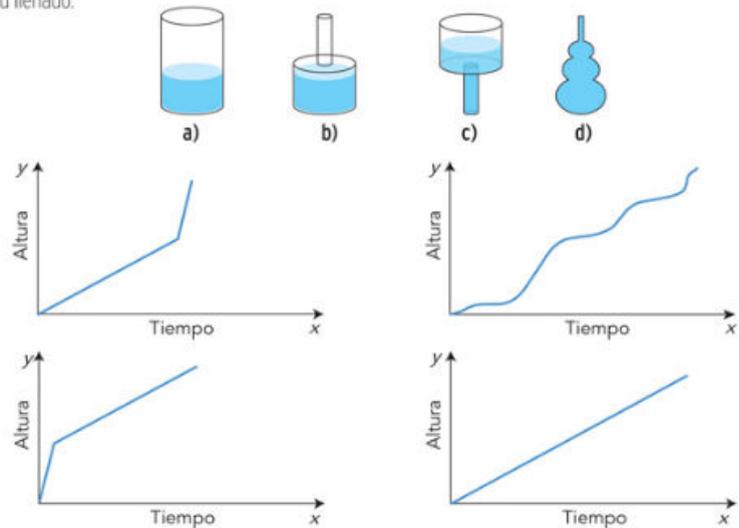
Este tipo de crecimiento se conoce como exponencial.

© Nueva México

## Practica

1. Resuelvan en equipo.

Los siguientes recipientes se llenan a un ritmo constante. Relacionen cada recipiente con la gráfica que describe mejor su llenado.



■ Comparen sus resultados con el resto del grupo.



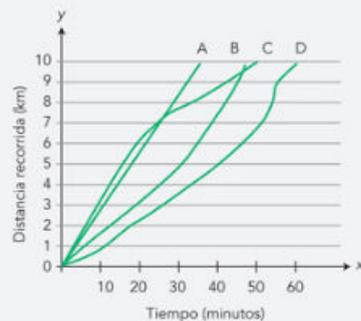
Busca en Internet o en otros medios, como periódicos o libros, otros ejemplos de fenómenos que tengan un crecimiento exponencial.

## 3. La carrera



Comparen y discutan los resultados de su tarea, después realicen lo que se les solicita.

### Carrera de 10 km

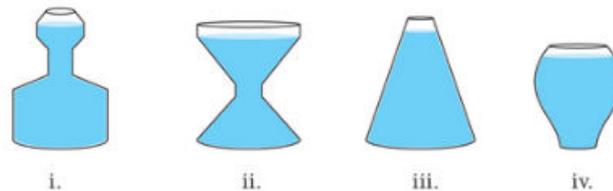


En una carrera de 10 km, se monitoreó el avance de cuatro corredores; los resultados se muestran en la gráfica.

- Calculen la velocidad promedio de cada corredor.
- Describan la velocidad por etapas o intervalos de cada corredor.
- Dado el inciso anterior, expliquen el desempeño de cada corredor durante la carrera.

© Nueva México

1. Elaboren la gráfica que representa el llenado de cada recipiente. Consideren que se llenan de manera constante.



- ¿Cuál de los recipientes tiene una gráfica sin secciones curvas? \_\_\_\_\_  
 • ¿Qué parte o forma modela una sección curva? \_\_\_\_\_
- ¿Todas las gráficas tienen secciones rectas? \_\_\_\_\_  
 • ¿Qué modela una sección recta en las gráficas de los recipientes anteriores? \_\_\_\_\_
- ¿Por qué es útil leer y construir gráficas asociadas a movimientos o fenómenos como los estudiados? \_\_\_\_\_



TIC

Entra al sitio:

<http://www.telesecundaria.sep.gob.mx/>

elige "Materiales Educativos Audiovisuales", haz clic en "TERCER GRADO" y después selecciona la opción "Matemáticas III". En la barra derecha escoge "Bloque 3" y busca en la barra de títulos el recurso "Llenado de recipientes", ahí podrás ver el video explicativo para consolidar lo estudiado en la lección. (consulta: 22 de diciembre de 2016, 17:00 horas)

## Validemos lo aprendido

1. Analiza la situación y responde lo que se solicita.

El tinaco de agua de 1200 L de una empresa se llena durante la noche. Al inicio de labores (9:00 a. m.) se empieza a utilizar el agua a un ritmo de 100 L/h hasta la hora de la comida, durante este tiempo (2:00 p. m. a 3:00 p. m.) se recarga el tinaco con 220 L de una pipa. Se reanudan labores y a partir de las 3:00 p. m. hasta la hora de salida (6:00 p. m.), se ocupa agua a un ritmo de 15 L/h.

a) Elabora una gráfica que modele la situación.

Reflexiona y responde las siguientes preguntas.

- Se lanzó al aire una moneda tres veces, y en las tres se obtuvo águila.
  - ¿Cuál es la probabilidad de que en el cuarto lanzamiento caiga águila?
  - ¿Cuál es la probabilidad de que salga sol?
- Se juega a lanzar un dado, que no está cargado, y se obtienen los siguientes seis resultados: 2, 4, 4, 2, 2, 4.
  - ¿Cuál es la probabilidad de que en el siguiente lanzamiento salga 2 o 4?
  - ¿Cuál es la probabilidad de que en el siguiente lanzamiento se observe un número diferente de 2 o 4?

© Nueva México



## Regla del producto

Eje: Manejo de la información  
 Tema: Nociones de probabilidad  
 Contenido: Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto)

## 1. Probabilidad de eventos independientes I



1. Discutan el siguiente planteamiento y respondan las preguntas en su cuaderno. Argumenten sus respuestas.

- Al lanzar una moneda, el evento E1 es que caiga sol:
    - ¿Cuál es la probabilidad de ocurrencia de E1?
  - Se vuelve a lanzar la misma moneda, el evento E2 es que salga sol.
    - ¿Cuál es la probabilidad de ocurrencia de E2?
    - ¿Cambió la probabilidad de ocurrencia del evento E2 dado que el evento E1 ha ocurrido?
    - Obtén el espacio muestral de los dos lanzamientos. ¿Cuál es la probabilidad de que en los dos lanzamientos ocurran E1 y E2?
  - Lo anterior se puede tomar como un solo experimento en el que se llevan a cabo dos lanzamientos al mismo tiempo, cuyo espacio muestral es {(sol, sol), (sol, águila), (águila, sol), (águila, águila)}.
    - ¿Cuántos eventos cumplen con la ocurrencia de E1 y E2?
    - Estos dos eventos, E1 y E2, ¿cómo son entre sí, mutuamente excluyentes o complementarios? Argumenten.
    - Formulen una regla para encontrar  $P(E1 \text{ y } E2)$ .
- Comparen sus respuestas con las de otros compañeros y lleguen a acuerdos.

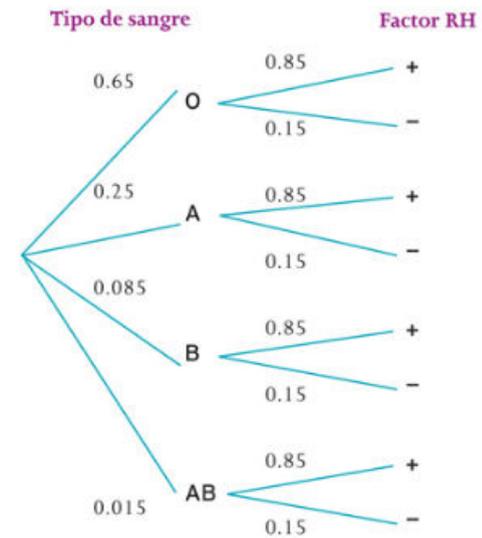
2. Resuelvan los problemas en su cuaderno. Justifiquen sus respuestas.

De acuerdo con datos de la Cruz Roja Mexicana, presentados en la lección 13, 65% de la población mexicana tiene sangre tipo O, 25% tipo A, 8.5% tipo B y 1.5% tipo AB. También se sabe que 85% de la población tiene factor Rh+.

- Si se escoge un individuo al azar dentro de la población, ¿cuál es la probabilidad de que su sangre sea tipo O+?
- Un diagrama de árbol ayudará a apreciar las posibilidades. Analicen el diagrama de árbol de la siguiente página.
  - ¿Con este diagrama se puede contestar la pregunta del inciso a)? Argumenten.

© Nueva México

- ¿Cuál es el espacio muestral?
- ¿Cuánto suman las cuatro posibilidades del tipo de sangre? ¿Qué significa esa cantidad?
- ¿Qué significa que la suma de los dos tipos de factores de Rh sea 1?
- Si se escoge un individuo al azar, ¿cuál es la probabilidad de que su tipo de sangre sea B-?



- Formulen una regla que permita determinar la probabilidad de obtener cierto tipo de sangre y cierto factor Rh.
- Comprueben su regla con los datos de la tabla de los tipos de sangre de la lección 13.

3. Expongan el resultado de su tarea y, con ayuda de su profesor, discutan las preguntas que se presentan y respondan.

Como han podido observar en la tarea, la probabilidad de cada evento se mantiene sin importar el resultado anterior, pues son eventos independientes y, en los dos problemas anteriores, se consideran dos eventos independientes a la vez.

- Los problemas de la tarea y los de las actividades 1 y 2 de la lección, ¿pueden ser considerados como el mismo tipo de problema?
- ¿Se puede representar de la misma manera la probabilidad de dos eventos que se lleva a cabo uno tras otro y dos eventos independientes a la vez?
- Discutan la siguiente información teórica:

## Probabilidad de eventos independientes

La probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes: EA y EB, es igual al producto de la probabilidad de ambos eventos:  $P(EA \text{ y } EB) = P(EA) \times P(EB)$ . Este resultado es conocido como el **producto de la probabilidad**.

## Analiza y resuelve lo que se indica.

- Al lanzar dos veces una moneda, ¿cuál es la probabilidad de obtener dos águilas?
  - ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos soles?
- Elabora un diagrama de árbol para explicar los resultados.

© Nueva México



## 2. Probabilidad de eventos independientes II

### 1. Resuelvan en su cuaderno. Justifiquen sus respuestas.

- a) Se lanzan simultáneamente una moneda y un dado.
- ¿Cuál es la probabilidad de que caiga sol?
  - ¿Cuál es la probabilidad de que salga 2?
  - ¿Los resultados de estos eventos son independientes?
  - ¿Cuál es la probabilidad de que salga águila y 2 al mismo tiempo?
  - ¿Se puede ocupar la fórmula de la sección anterior? ¿Se puede obtener de otra manera? Argumenten sus respuestas.
- b) Elaboren un diagrama de árbol y asignen la probabilidad de ocurrencia de cada par de eventos independientes.
- ¿Cuál es la probabilidad de que caigan águila y 4?
  - ¿Cuál es la probabilidad de que caigan águila y 5?
- c) Expliquen la semejanza de los resultados obtenidos.
- ¿Por qué la probabilidad de que caiga águila es mayor que la probabilidad de que caigan águila y 5?
  - ¿Por qué la probabilidad de que caiga 5 es mayor que la probabilidad de que caigan águila y 5?
  - ¿Por qué la probabilidad de que ocurran dos eventos a la vez es menor que la probabilidad de que ocurra cualesquiera de ellos?

■ Con la ayuda de su profesor revisen las respuestas.

### 2. Resuelvan la actividad

- a) Santiago y Ana quieren saber qué combinación es más fácil obtener al lanzar dos dados. Santiago dice que puede ser cualquier par, es decir, 1 y 1, 2 y 2, etc., Ana piensa que debe ser la combinación 3 y 5.
- ¿Quién tiene razón? ¿Qué combinación de números tiene mayor probabilidad de salir?
  - ¿Alguna combinación tiene mayor probabilidad de ocurrir?
- b) Si Santiago escoge las seis combinaciones de números iguales y Ana la combinación 3 y 5, ¿quién tiene mayor probabilidad de acertar?
- c) Ana escoge otras cinco combinaciones, 3 y 1, 3 y 2, 3 y 4, 3 y 6, 2 y 6. Ahora, ¿quién tiene mayor probabilidad de acertar? Argumenten.
- d) Ahora Santiago escoge todas las combinaciones de números pares y Ana, las combinaciones de números impares.
- ¿Quién tiene mayor probabilidad de acertar?
  - Estos eventos, ¿son complementarios, mutuamente excluyentes o independientes?
- e) Si se suman la probabilidad de Santiago de acertar con la probabilidad de Ana, ¿qué resultado se obtiene? ¿Qué significa?

## Practico



### 1. Resuelvan los siguientes ejercicios. Al final, comparen sus resultados con el resto del grupo.

- a) En una empresa laboran 70 mujeres y 80 hombres. Entre las mujeres, hay 30 solteras y entre los hombres, 17.
- Al entrevistar a un empleado al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea hombre y soltero? Explica.
  - Si se escoge un empleado que no es casado, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?
- b) En un zoológico se mantienen 500 especies, de las cuales 380 están en peligro de extinción y 120 no lo están. De las que están en peligro de extinción, 70 están en apareamiento y de las que no están en peligro, 45 están en apareamiento.
- Al visitar el zoológico y tomar una foto al azar, ¿cuál es la probabilidad de fotografiar a una especie en peligro de extinción que esté en apareamiento? Explica.
  - Si se escoge una especie que no está en extinción, ¿cuál es la probabilidad de que no esté apareando?

### Resuelve el problema, calcula las probabilidades.

En la feria se vendieron los 100 boletos para una rifa. Victoria compró los números 49, 50 y 51, argumentando que, como son lo que se encuentran en medio, tienen mayor probabilidad de salir. Javier escogió el 33, 66 y 99, diciendo que las posibilidades se distribuyen. ¿Quién tiene más oportunidad de ganar?

- a) ¿Cuál de los dos argumentos es correcto?
- b) ¿Cuáles son las probabilidades de ganar de cada uno?
- c) Si participaras en la rifa, ¿qué número escogerías? ¿Por qué?



## 3. Cálculo de la probabilidad de eventos independientes

Expongan el resultado de su tarea. Después, en equipo, resuelvan los problemas.

Se lleva a cabo un experimento de lanzar un dado en dos ocasiones:

- a) ¿Cada lanzamiento es un experimento independiente? \_\_\_\_\_  
¿Por qué? \_\_\_\_\_
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que en el primer lanzamiento se obtenga un número 3 y en el segundo un número 6? \_\_\_\_\_
- c) ¿Varía la probabilidad de ocurrencia si se cambian los números esperados? \_\_\_\_\_

■ Comenten sus respuestas con su profesor, corrijan si hay errores.



En una bolsa se tienen cinco pelotas del mismo tamaño, tres son rojas y las otras dos son azules.

- Se extrae una pelota de la bolsa, se regresa y se toma otra, ¿cuál es la probabilidad de que la primera sea roja y la segunda azul? \_\_\_\_\_
- Sea el evento E1: extraer una pelota azul y el evento E2: extraer una pelota roja.
  - ¿Cuál es la probabilidad de ocurrencia de E1? \_\_\_\_\_
  - ¿Cuál es la probabilidad de ocurrencia de E2? \_\_\_\_\_
- Si se saca una pelota, no se regresa a la bolsa, y se vuelve a sacar otra pelota, ¿cuál es la probabilidad de E1 y E2 en cada caso?

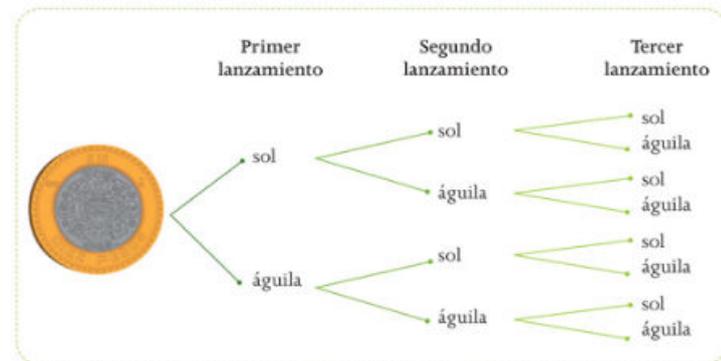
$P(E1) =$  \_\_\_\_\_  $P(E2) =$  \_\_\_\_\_

- ¿Qué sucede con la probabilidad de cada evento en la segunda extracción? \_\_\_\_\_
  - ¿Hay la misma probabilidad en el inciso c si se cumple primero E1 que E2?

■ Con la ayuda de su profesor, argumenten y justifiquen sus respuestas.

- Regresen al primer problema de la lección, acerca de lanzar una moneda y consideren el evento E3: se obtuvo sol.

- ¿Cuál es la probabilidad de ocurrencia de los eventos E1, E2 y E3? El diagrama de árbol que se presenta ayuda a calcular las probabilidades.



- Representen el espacio muestral del experimento. \_\_\_\_\_

- ¿Cuántos elementos cumplen con la ocurrencia de E1, E2 y E3? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es la probabilidad de los eventos E1, E2 y E3?  
 $P(E1, E2 \text{ y } E3) =$  \_\_\_\_\_

© Nueva México

- ¿Existe alguna relación entre  $P(E1)$ ,  $P(E1 \text{ y } E2)$  y  $P(E1, E2 \text{ y } E3)$ ?
  - ¿Es posible formular alguna regla para calcular la probabilidad de ocurrencia de los tres eventos? \_\_\_\_\_

Santiago y Ana siguen jugando con dos dados, y quieren saber qué dado contribuye a la combinación elegida por cada uno, así que eligen dados de diferente color, Santiago eligió verde y Ana amarillo.

- Completa la siguiente tabla para observar las combinaciones que se pueden formar con los dos dados.

	1	2	3	4	5	6
1	1, 1			1, 4		
2						
3						
4						
5						
6						

- Santiago ahora escoge las combinaciones cuya suma es igual a 10 y Ana escoge aquellas cuya suma es 7. ¿Quién tiene más posibilidades de acertar?
  - ¿Cambia la probabilidad de ocurrencia ahora que se toma en cuenta la procedencia de la combinación? \_\_\_\_\_
  - ¿Ha cambiado el espacio muestral? \_\_\_\_\_



### Validemos lo aprendido

Analicen, discutan y resuelvan lo que se solicita.

Se lanza tres veces seguidas un dado:

- ¿Cuál es la probabilidad de que caiga dos veces el número 3 y una el número 6?
- ¿Los anteriores, son eventos independientes?
- ¿Se puede utilizar la regla del producto para resolver el problema?
- ¿Cuál es la probabilidad de obtener tres veces el número 4?

### Lleva a cabo lo que se solicita.

Con base en la estructura de una hoja electrónica de cálculo y considerando la fórmula general de una ecuación de segundo grado:

- ¿Es posible programar una hoja electrónica que permita resolver dicha fórmula?
- De ser posible, escribe en tu cuaderno el procedimiento; de no ser posible, justifica por qué.

© Nueva México



TIC



En el siguiente sitio de Internet, podrás encontrar información con respecto de la regla del producto.

[www.educarchile.cl/ech/pro/app/detalle?ID=137669](http://www.educarchile.cl/ech/pro/app/detalle?ID=137669)

(consulta: 22 de diciembre de 2016, 11: 40 horas)

# Evaluación tipo PISA

## UNIDAD 1: Construcción de cajas

Las cajas son objetos muy útiles, las hay de distintos materiales, como cartón, plástico, madera, entre otros tipos, y pueden ser usadas para guardar cosas.

Una lámina de cartón de forma rectangular mide 3 cm más de largo que de ancho. En cada esquina se recorta un cuadrado de 5 cm por 5 cm para construir una caja con la pieza resultante. Tomando en cuenta que el volumen de la caja armada es de  $1350 \text{ cm}^3$ .



1. ¿Cuáles son las dimensiones de la caja? \_\_\_\_\_
2. Escribe los procedimientos que permiten validar tu resultado. \_\_\_\_\_
3. Analiza cada uno de los siguientes enunciados y coloca una  en la columna de Falso o Verdadero, según sea el caso.

Enunciado	Falso	Verdadero
Los datos del problema son insuficientes, ya que no nos dice la altura de la caja		
Las dimensiones de los lados son 35.273 cm y 38.273 cm		
La altura de la caja es de 3 cm		
La ecuación que resuelve el problema es $5x^2 + 15x - 1350 = 0$		

4. ¿Cuáles son las medidas de la lámina de cartón? \_\_\_\_\_

Se hace una caja con una lámina de cartón, con la misma relación de ancho y de largo que la anterior, pero se recortan cuadrados de 6 cm en las esquinas, y su volumen es de  $3024 \text{ cm}^3$ .

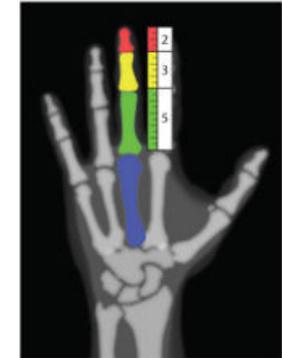
5. ¿Qué expresión modela el problema? \_\_\_\_\_
6. ¿Cuáles son las medidas de la caja? \_\_\_\_\_

© Nueva México

## UNIDAD 2: Congruencia y semejanza

En nuestra vida cotidiana encontramos figuras que mantienen sus propiedades y relaciones entre sus medidas. Pueden ser observadas en la Naturaleza o en las construcciones hechas por la especie humana.

En la imagen del lado derecho se muestra la radiografía de una mano, en la que se indica la longitud de los huesos del dedo medio.

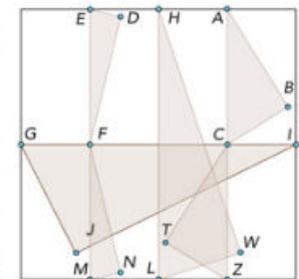


1. Obtén la razón entre la medida del hueso rojo y la del hueso amarillo; y entre la medida del hueso amarillo y la del hueso verde.
2. De acuerdo con la información que obtuviste, ¿la relación entre la longitud de los huesos es congruente, semejante o ninguna de las dos? \_\_\_\_\_
3. Si consideramos que la razón entre el hueso verde y el hueso azul es la misma que la razón dada entre el hueso amarillo y el hueso verde, ¿cuál es la longitud del hueso marcado con azul? \_\_\_\_\_
4. ¿Consideras que las relaciones encontradas son la norma para establecer las dimensiones de las manos de cualquier persona? Obtén estas razones en tu propia mano y argumenta tu respuesta. \_\_\_\_\_
5. Escribe los procedimientos que permiten validar tu resultado. \_\_\_\_\_

## UNIDAD 3: Congruencia y semejanza II

Las figuras congruentes han servido de inspiración para varias personas, como artistas, diseñadores, arquitectos y demás personas se desempeñan en otros oficios y profesiones.

Alfonsina elabora el proyecto final de su semestre y el avance que tiene es el que se muestra en la imagen del lado derecho. La pintura está en proceso y el tema que le tocó fue la armonía geométrica.



1. La imagen muestra seis triángulos, ¿cuáles son congruentes? \_\_\_\_\_
  - ¿Cuáles son semejantes? \_\_\_\_\_
  - Escribe los argumentos que permiten validar tus respuestas. \_\_\_\_\_
2. ¿Qué procedimiento utilizarían para trazar un triángulo semejante a los triángulos ABC y EFD cuya relación sea 2:1? \_\_\_\_\_

Luego de resolver la evaluación, expongan sus respuestas. Si las tuyas no coinciden con las de tus compañeros, argumenta las estrategias que seguiste. Con ayuda del profesor lleven a conclusiones.

© Nueva México

Revisen su tarea, compartan con el grupo sus respuestas y, con la ayuda de su profesor, respondan las siguientes preguntas.

- ¿Cuál es la expresión general de una ecuación de segundo grado?
  - ¿Qué operaciones están involucradas? Escribanlas según su jerarquía.
- ¿Cuál es la fórmula general para resolver una ecuación cuadrática?
  - ¿Qué operaciones están involucradas? Escribanlas según su jerarquía.
- Además de las operaciones que han escrito para las dos preguntas anteriores, ¿hay alguna otra operación que sea necesario utilizar?
  - ¿Han considerado el uso de operaciones inversas?
  - Si la respuesta anterior es negativa, ¿es posible que se utilicen operaciones inversas?
- Las operaciones que han escrito en los incisos  $a$ ,  $b$  y  $c$ , ¿se pueden utilizar en la hoja electrónica de cálculo?
  - ¿Cuáles son los operadores que se utilizan para las operaciones básicas?
- Las operaciones que se pueden realizar en una hoja electrónica de cálculo, pueden realizarse escribiendo los números con los cuales se puede operar, ¿también es posible hacer las operaciones haciendo referencia a las celdas?

## Ecuaciones cuadráticas en una hoja electrónica de cálculo



- Realicen y resuelvan en una hoja electrónica de cálculo lo que se solicita y argumenten sus respuestas.

En una hoja electrónica de cálculo escriban el texto que se muestra en la figura 1, analíenlo y respondan.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	
1	Expresión general de las ecuaciones de segundo grado					Fórmula general de las ecuaciones de segundo grado				
2	$ax^2 + bx + c = 0$					$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$				
3						$x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$				

Figura 1

- ¿Qué modela lo que escribieron en la celda A2?
- ¿Qué modela lo que escribieron en las celdas F2 y F3?
- ¿El símbolo  $\wedge$  qué significa?

Escriban en la misma hoja de cálculo lo que se muestra en la figura 2. Analicen y respondan.

- ¿Cómo se relaciona la expresión algebraica de la celda A2 con los números y operadores que se muestran en las celdas B4 a B12?
 

	A	B	C	D
1	Expresión general de las ecuaciones de segundo grado			
2	$ax^2 + bx + c = 0$			
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
- ¿Por qué consideran que la literal  $x$  y el operador  $+$  se escribe una sola vez?
- Escriban en la celda B14 la función concatenar, de la siguiente forma: `=CONCATENAR(B4,B5,B6,B7,B8,B9,B5,B8,B10,B11,B12)` y pulsen ENTER.
  - ¿Cuál es la expresión que se muestra en dicha celda?
  - ¿Cómo es esta expresión con respecto a la que escribieron en la celda A2?
- Ubiquen en la barra de herramientas del software la opción *Ayuda* y escriban función *concatenar*, para obtener la información del comportamiento de esta función.
  - En la celda A4 escriban el coeficiente  $a$ , en la celda A9 escriban el coeficiente  $b$ , y en la celda A10 escriban el coeficiente  $c$ ; seleccionen las celdas anteriores y alinéenlas hacia la derecha, y en las celdas B4, B9 y B10 escriban el número 1.
    - ¿Se modificó la expresión que se tenía en la celda B14?

Figura 2

Para controlar la programación de la fórmula general de las ecuaciones de segundo grado, hagan por pasos los cálculos como se indica.

- Escriban en la hoja electrónica de cálculo la función concatenar como se indica en cada inciso con los respectivos textos.
  - En la celda F6 escriban `=CONCATENAR(A9,B6,B7)`
  - En la celda F7 escriban `=CONCATENAR(4,"*",A4,"*",A10)`
  - En la celda F8 escriban `=CONCATENAR(F6,"-",F7)`
  - En la celda F9 escriban `=CONCATENAR("raiz","(",F8,"")"`
- Analicen cada una de las expresiones que se muestran en las celdas en las que trabajaron en el inciso anterior.
  - ¿Qué nombre recibe la expresión que se muestra en la celda F8?, escribanlo en la celda F5.
- De acuerdo con la hoja electrónica de cálculo, ¿en cuáles celdas se muestran los valores de los coeficientes  $a$ ,  $b$  y  $c$ ?
- Utilicen las celdas que escribieron en el inciso anterior para escribir las expresiones correspondientes que se muestran en las celdas F6 a F9, en las celdas G6, G7, G8 y G9, por ejemplo:
  - En la celda G6 escriban la función potencia de la forma `=POTENCIA(B9,B7)` o bien como `=B9^2`. Noten que en la celda B9 se encuentra el valor del coeficiente  $b$  y en la celda B7 el valor numérico 2.

- ¿Por qué en la celda G6 se hace referencia a la celda B9 y no a la celda A9?
- ¿Por qué para la fórmula  $=B9^2$ , el símbolo  $^$  no se escribió entrecorinado como en la función concatenar?

ii. Escriban las fórmulas correspondientes en las celdas G7, G8 y G9. Con base en lo que han hecho en el ejercicio anterior, comparen con lo que se muestra en la figura 3 y respondan las preguntas.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	
1	Expresión general de las ecuaciones de segundo grado					Fórmula general de las ecuaciones de segundo grado				
2	$ax^2 + bx + c = 0$					$x = (-b + \text{raiz}(b^2 - 4*a*c))/2*a$				
3						$x = (-b - \text{raiz}(b^2 - 4*a*c))/2*a$				
4	a	1								
5		x				Discriminante				
6						b^2			1	
7						4*a*c			4	
8						b^2-4*a*c			-3	
9	b	1				raiz(b^2-4*a*c)			#¡NUM!	
10	c	1								
11										
12		0								
13										
14										
15										
16										
17										
18										
19										
20										

Figura 3

- ¿Por qué el valor de la celda G8 es negativo?
- ¿Por qué consideran que lo que se muestra en la celda G9 no es un resultado numérico?
  - Usen una calculadora y obtengan el valor de la raíz de -3; ¿obtuvieron un resultado numérico?
- Con base en el resultado de la celda G9, ¿la expresión de segundo grado tiene soluciones? ¿Cuántas?
  - Si el valor de la celda B9 cambia a 10:
    - ¿Cuál es la expresión algebraica que se muestra en la celda B14?
    - ¿Cuál es el valor de la celda G9?
  - Con base en el resultado de la celda G9, ¿la expresión de segundo grado tiene soluciones? ¿Cuántas?
  - Si el valor de la celda B9 se mantiene en 10, y el valor de la celda B10 cambia a 25:
    - ¿Cuál es la expresión algebraica que se muestra en la celda B14?
    - ¿Cuál es el valor de la celda G9?

iv. Con base en el resultado de la celda G9, ¿la expresión de segundo grado tiene soluciones? ¿Cuántas? Para continuar con la programación de la fórmula general, se deben realizar los siguientes pasos:

Con la función concatenar escriban las siguientes relaciones en las celdas que se indican.

- En la celda F14 escriban  $2*a$ .
- En la celda F15 escriban  $-b + \text{raiz}(b^2 - 4*a*c)$
- En la celda F16 escriban  $-b - \text{raiz}(b^2 - 4*a*c)$

- En la celda F18 escriban  $(-b + \text{raiz}(b^2 - 4*a*c))/2*a$
- En la celda F19 escriban  $(-b - \text{raiz}(b^2 - 4*a*c))/2*a$

a) En las celdas G14 a la G19, escriban las fórmulas que se describen en las celdas F14 a F19; procuren hacer referencia a las celdas, sobre todo en aquellas que ya se han hecho cálculos.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	
1	Expresión general de las ecuaciones de segundo grado					Fórmula general de las ecuaciones de segundo grado				
2	$ax^2 + bx + c = 0$					$x = (-b + \text{raiz}(b^2 - 4*a*c))/2*a$				
3						$x = (-b - \text{raiz}(b^2 - 4*a*c))/2*a$				
4	a	1								
5		x				Discriminante				
6						b^2			100	
7						4*a*c			100	
8						b^2-4*a*c			0	
9	b	10				raiz(b^2-4*a*c)			0	
10	c	25								
11										
12										
13										
14										
15										
16										
17										
18										
19										
20										

Figura 4

b) Comparen lo que hicieron en el inciso a con la figura 4 y respondan:
 

- ¿Qué significan los valores que obtuvieron en las celdas G18 y G19?

2. Compartan con el grupo sus resultados y, con la ayuda de su profesor, lleguen a conclusiones de manera que todos queden convencidos; además, respondan las preguntas.

a) Si han tenido alguna dificultad para obtener los valores de las fórmulas, comparen lo que han escrito con la figura 5. De la expresión general de las ecuaciones de segundo grado retomen los valores de 1 para  $b$  y  $c$ .

- Cambien el valor del coeficiente  $a = -1$ , ¿cuántas soluciones tiene la ecuación?
- Si ahora el valor de los coeficientes  $a$  y  $b$  es igual a 1, mientras que el valor de  $c = -1$ :
  - ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación? ¿Cómo son estas soluciones contrastadas con las obtenidas en el inciso i?

iii. Si el coeficiente  $b$  es igual a cero y los coeficientes  $a$  y  $c$  son 1:

- ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación?
- ¿Qué signo deben tener los valores de los coeficientes para que la ecuación tenga solución?

iv. Si además del coeficiente  $b$  que es cero,  $c = 0$ :

- ¿Qué condiciones debe tener el coeficiente  $a$  para que la ecuación tenga solución?

Retomen algunas ecuaciones resueltas en la lección 14 y validen sus resultados. Compartan en grupo, con el apoyo de su profesor, sus experiencias.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	
1	Expresión general de las ecuaciones de segundo grado					Fórmula general de las ecuaciones de segundo grado				
2	$ax^2 + bx + c = 0$					$x = (-b + \text{raiz}(b^2 - 4*a*c))/2*a$				
3						$x = (-b - \text{raiz}(b^2 - 4*a*c))/2*a$				
4	a	1								
5		x				Discriminante				
6						b^2			=POTENCIA(B6;2)	
7						4*a*c			=4*B7*B9	
8						b^2-4*a*c			=DIFER	
9	b	10				raiz(b^2-4*a*c)			=RAIZ(G8)	
10	c	25								
11										
12										
13										
14										
15										
16										
17										
18										
19										
20										

Figura 5



**Carlos Imaz Janhke**

(Madrid, 1932-México, 2010)

Matemático mexicano. Aunque nació en España, vivió en México desde su infancia temprana. Estudió la licenciatura en Matemáticas en la Universidad Nacional Autónoma de México (1955); realizó estudios de maestría en la Universidad de Michigan (1956), y obtuvo el grado de doctor por la Universidad Nacional Autónoma de México (1961). Fue uno de los fundadores del Departamento de Matemáticas del Centro de Investigación y Estudios Avanzados (Cinvestav), del Instituto Politécnico Nacional.

Carlos Imaz alcanzó gran prestigio mundial como experto en cálculo infinitesimal e investigador, ámbito en el que escribió numerosos artículos.

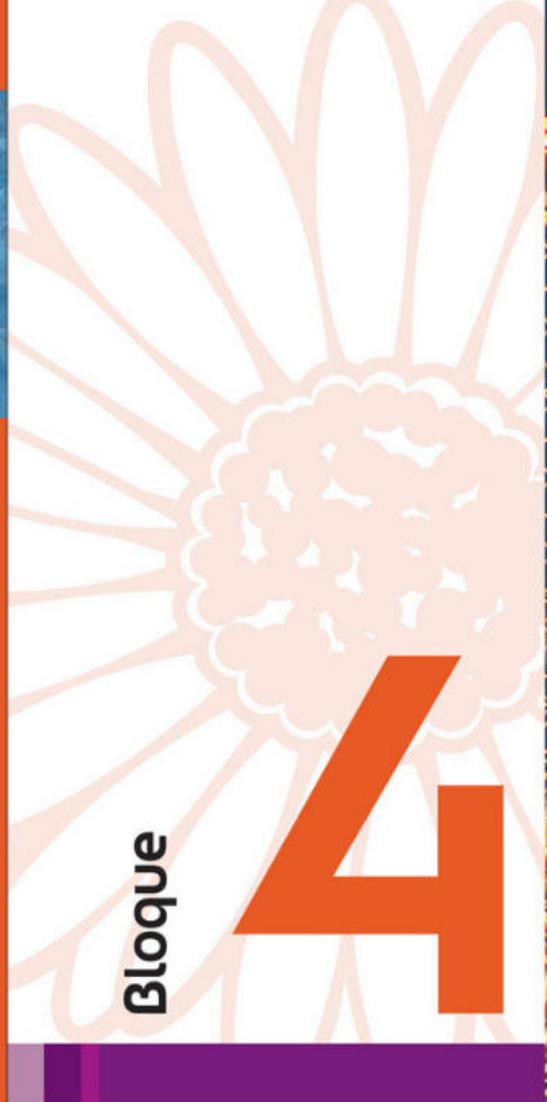
Dedicó gran parte de su vida a la matemática educativa, campo en el que efectuó investigaciones y se desempeñó como profesor.

Imaz escribió varios libros de texto, como el titulado *Introducción al cálculo*, que es usado en varios países; también coordinó (entre 1970 y 1976) la elaboración de los libros de texto de matemáticas para la escuela primaria, con tal éxito, que las obras fueron usadas en las aulas por más de una década, y fue coautor de libros de matemáticas para profesores de primaria de todo el país.

Otro aspecto importante en los trabajos de Imaz es su atención al carácter social de la ciencia, pues trató de desarrollar una cultura matemática entre la sociedad, considerando para ello las necesidades que las comunidades tienen en torno a la matemática.

Bloque

4



Cuando las sillas voladoras de un parque de diversiones giran alrededor de un eje, generan un sólido de revolución, en este caso, un cono truncado.

**Aprendizajes esperados**

- Utiliza en casos sencillos expresiones generales cuadráticas para definir el  $n$ -ésimo término de una sucesión.
- Resuelve problemas que implican el uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.
- Calcula y explica el significado del rango y la desviación media.



# Regla de una sucesión

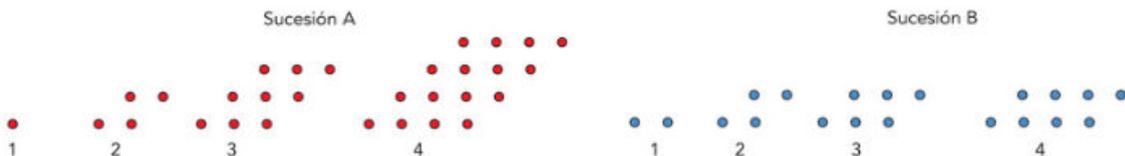
**Eje:** Sentido numérico y pensamiento algebraico  
**Tema:** Patrones y ecuaciones  
**Contenido:** Obtención de una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión

## 1. Sucesiones I



1. Resuelve el problema. Justifica tus respuestas.

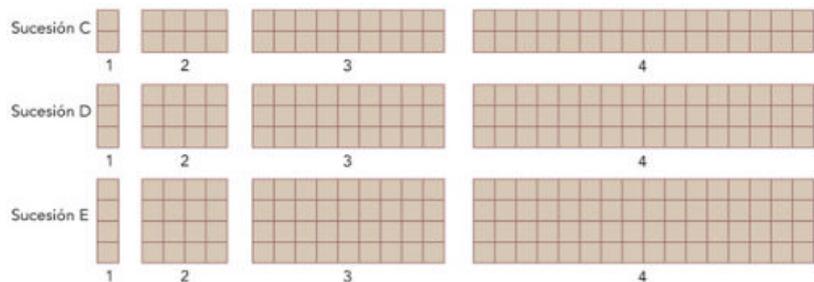
Osiris resuelve una guía de preparación para el examen de ingreso a bachillerato. Un reactivo muestra las siguientes sucesiones y pregunta: ¿Es verdad que una misma expresión algebraica puede modelar las sucesiones de figuras A y B?



- Determina el grado de la expresión que modela cada sucesión.
  - Sucesión A: \_\_\_\_\_
  - Sucesión B: \_\_\_\_\_
- ¿Qué expresión algebraica modela cada sucesión?
  - Sucesión A: \_\_\_\_\_
  - Sucesión B: \_\_\_\_\_
- ¿Cuántos puntos tendrá el siguiente término de la sucesión A? ¿Y el de la sucesión B? \_\_\_\_\_
- ¿En qué posición y a qué sucesión corresponde un término con 50 puntos? \_\_\_\_\_
  - Si se tienen 289 puntos, ¿a qué sucesión corresponden y qué término representan? \_\_\_\_\_

■ Compara tus respuestas con las de otro compañero.

2. Analicen las sucesiones y respondan las preguntas, justifiquen el procedimiento empleado para resolver.



La obra *Juegos de Ingenio. Rompecabezas tridimensionales*, de Matthias Mala, forma parte de la colección Espejo de Urania, de Libros del Rincón. Si puedes leerla, en la página 96 hallarás un desafío que consiste en encontrar una celda para la reina. Este es un interesante planteamiento de sucesiones.



- ¿Qué expresión algebraica modela la sucesión C? \_\_\_\_\_
  - ¿Cuál es el grado de la expresión algebraica? \_\_\_\_\_
  - ¿Cuántos cuadrados tienen los términos 7, 20 y 50 de la sucesión C? \_\_\_\_\_
  - ¿Es posible que alguno de los términos tenga 120 cuadros? ¿Por qué? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es la expresión algebraica que representa a la sucesión D? \_\_\_\_\_
  - ¿Cuántos cuadrados tiene cada uno de los términos que se muestran? \_\_\_\_\_
  - ¿Cuántos cuadrados tienen los términos 6, 19 y 49? \_\_\_\_\_
  - ¿Es posible que alguno de los términos tenga 180 cuadros? Justifiquen por qué. \_\_\_\_\_
- ¿Qué expresión algebraica modela la sucesión E? \_\_\_\_\_
  - ¿Cuántos cuadros tienen los términos 8, 21 y 51? \_\_\_\_\_
  - ¿Es posible que alguno de los términos tenga 350 cuadros? \_\_\_\_\_

■ Con ayuda del profesor, revisen los problemas que resolvieron en las actividades 1 y 2 y validen sus respuestas.

3. Respondan las siguientes preguntas.

- De la pregunta que debe responder Osiris, ¿la misma expresión modela las sucesiones A y B? \_\_\_\_\_
- ¿Es lo mismo elevar un número al cuadrado que obtener el doble de ese número? \_\_\_\_\_
- Analicen la siguiente información y respondan en su cuaderno.



## Sucesión cuadrática

Una sucesión cuadrática se puede describir mediante la expresión  $An^2 + Bn + C$ , con  $A$  distinta de cero; donde  $n$  representa la posición del término. A las expresiones algebraicas que modelan una sucesión, también se les conoce como regla de formación.

- Dada la expresión de sucesión cuadrática, si el coeficiente  $A$  es igual a cero, ¿qué tipo de sucesión es la que se obtendría?
- ¿Qué tipo de sucesión son la  $A$  y la  $B$  de la actividad 1?
- ¿Qué tienen en común las expresiones que modelan las sucesiones  $C$ ,  $D$  y  $E$ ? ¿Qué es lo que varía en ellas?
- La expresión que modela la sucesión  $A$ , ¿es del mismo tipo que las expresiones que modelan a las sucesiones  $C$ ,  $D$  y  $E$ ?



### Analicen y resuelvan el siguiente problema.

Se tiene la sucesión 2, 6, 12, 20, 30...

- ¿Cuál es la expresión algebraica que modela la sucesión?
- Es posible que el número 65 sea parte de la sucesión. Si es así, ¿en cuál término? De lo contrario, justifica por qué no es parte de la sucesión.



## 2. Sucesiones II

- Analiza las sucesiones y resuelve. Justifica tus respuestas.

Sucesión F: 4, 10, 18, 28, 40... Sucesión G: 6, 9, 14, 21, 30...

- Anota la expresión algebraica que modela cada sucesión.
  - Sucesión F: \_\_\_\_\_
  - Sucesión G: \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es el grado de la expresión algebraica que modela cada sucesión? \_\_\_\_\_
- ¿Cuántos términos tiene cada expresión? \_\_\_\_\_
- ¿Cuáles son los valores de los términos 10, 20 y 50 de cada sucesión?

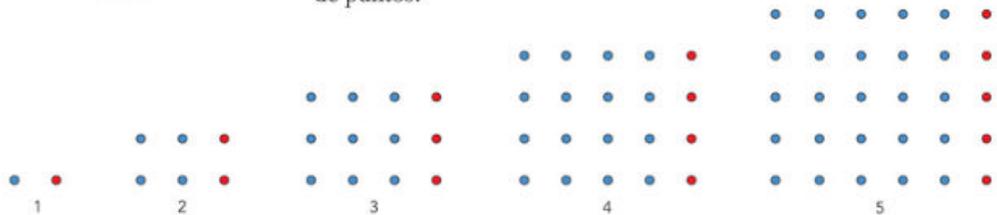
Sucesión H: 7, 18, 33, 52, 75...

- ¿Cuál es la expresión algebraica que la modela? \_\_\_\_\_
  - ¿Cuál es el grado de la expresión? \_\_\_\_\_
  - ¿Cuántos términos tiene la expresión anterior? \_\_\_\_\_
- ¿Qué valores tienen los términos 7, 15 y 21? \_\_\_\_\_
- ¿Es posible que los números 1 375 y 2 500 pertenezcan a la sucesión? Justifica, si pertenecen, indica a qué término corresponden.



- Revisen su tarea y, con ayuda del profesor, resuelvan la actividad.

- ¿La sucesión dada puede ser representada por la siguiente sucesión de puntos?



- De la sucesión dada, ¿qué relación tienen los puntos que aparecen en color azul con el término correspondiente? \_\_\_\_\_

© Nueva México

- ¿Qué relación tienen los puntos rojos con respecto al término correspondiente? \_\_\_\_\_
- A partir de las relaciones anteriores, ¿es posible obtener la expresión algebraica que modele la sucesión dada? \_\_\_\_\_
  - Expliquen por qué sí o por qué no y escriban la expresión algebraica correspondiente.
  - Si utilizaron alguna otra forma para determinar la expresión algebraica, descríbanla.

■ Comparen y validen cómo resolvieron las actividades 1 y 2.

- Retomen las actividades anteriores y resuelvan.

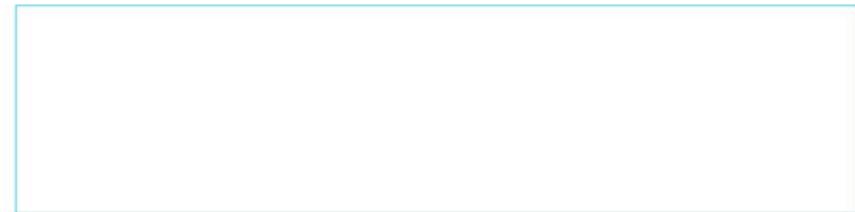
- Representen en el siguiente espacio, con puntos, la sucesión F de la actividad 1 e identifiquen cuáles corresponden a  $n = 1$ ,  $n = 2$ , etcétera.



- Si  $n$  se eleva al cuadrado, ¿cuántos puntos de cada término representan este resultado? \_\_\_\_\_
- ¿Es posible repetir la cantidad anterior en cada término, es decir, duplicarla? \_\_\_\_\_
- ¿Qué relación existe entre los puntos restantes de cada término y la posición que ocupan? \_\_\_\_\_
- Con base en las respuestas anteriores, obtengan la expresión algebraica que modele dicha sucesión. \_\_\_\_\_
- ¿Coincide con la expresión algebraica que encontraron antes?

- Para la sucesión G, respondan en su cuaderno las preguntas anteriores y determinen cuál es la expresión algebraica que la modela.

- Ahora representen con puntos la sucesión H en el siguiente espacio:



© Nueva México

- Si  $n$  se eleva al cuadrado, ¿cuántos puntos de los términos representados corresponden a este resultado? \_\_\_\_\_
  - ¿Es posible repetir la cantidad anterior en el término correspondiente? ¿Cuántas veces? \_\_\_\_\_
  - ¿Qué relación existe entre los puntos restantes de cada término y su posición  $n$ ? \_\_\_\_\_
  - Con base en las respuestas anteriores, obtengan la expresión algebraica que modele a la sucesión H. \_\_\_\_\_
- d) ¿Qué tienen en común las expresiones que modelan las sucesiones que resolvieron de tarea y las sucesiones F, G? \_\_\_\_\_
- ¿Qué es lo que varía en las sucesiones anteriores? \_\_\_\_\_
  - ¿En qué se diferencia la sucesión H respecto de las sucesiones F y G? \_\_\_\_\_

■ Comenten sus resultados y, con ayuda del profesor, lleguen a acuerdos.

### Practica

1. Relaciona las sucesiones con la expresión que las representa.

Sucesiones:

i. 11, 24, 39, 56...

ii. 5, 16, 33, 56...

iii. 7, 28, 63, 112...

Expresiones algebraicas:

•  $3n^2 + 2n$

•  $n^2 + 6$

•  $7n^2$

•  $n^2 + 10n$

•  $3n^2 + 10n$

2. Determina la expresión algebraica que modela cada sucesión.

a) Sucesión 1. 10, 40, 90, 160, 250...

b) Sucesión 2. 1010, 1020, 1030, 1040, 1050...

c) Sucesión 3. 101, 204, 309, 416, 525...

- ¿Las tres sucesiones se modelan con una expresión cuadrática?
- ¿Cuál sucesión no es cuadrática?

■ Compara tus resultados con el resto del grupo para validarlos.

Determinen la expresión algebraica que modela la siguiente sucesión.

101, 104, 109, 116, 125...

a) ¿La expresión algebraica que modela la sucesión es cuadrática?

### 3. Sucesiones III

1. Resuelve la siguiente actividad. Justifica tus respuestas.

a) Determina la expresión algebraica que modela a las siguientes sucesiones:

• Sucesión I: 4, 7, 12, 19, 28, ...

Expresión algebraica: \_\_\_\_\_

• Sucesión J: 1 001, 1 004, 1 009, 1 016, 1 025, ...

Expresión algebraica: \_\_\_\_\_

b) ¿Las expresiones algebraicas que modelan las sucesiones son cuadráticas? \_\_\_\_\_

c) ¿La expresión algebraica que modela las sucesiones contiene todos los términos de la expresión de la forma general? \_\_\_\_\_

2. Analicen, discutan y resuelvan el problema. Justifiquen sus respuestas.

a) Determinen la expresión algebraica que modela cada sucesión.

• Sucesión K: 3, 7, 13, 21, 31, ...

• Sucesión L: 9, 18, 31, 48, 69, 94, ...

• Sucesión M: 1.5, 3.5, 6.5, 10.5, 15.5, ...

• Sucesión N: 1, 3, 5, 7, 9, 11, ...

• Sucesión K: \_\_\_\_\_

• Sucesión L: \_\_\_\_\_

• Sucesión M: \_\_\_\_\_

• Sucesión N: \_\_\_\_\_

b) ¿Todas las sucesiones son cuadráticas? \_\_\_\_\_

c) ¿Cuántos términos tiene cada una de las expresiones que modelan las sucesiones? \_\_\_\_\_

3. Revisen su tarea y, con el profesor, respondan lo siguiente.

a) De la sucesión propuesta, ¿cuál es el comportamiento de las unidades y decenas? \_\_\_\_\_

• Con base en la respuesta anterior, ¿qué expresión algebraica puede modelar dicho comportamiento? \_\_\_\_\_

• ¿Qué constante se podría sumar a la expresión anterior para obtener cada término de la sucesión? \_\_\_\_\_

b) ¿Con cuáles términos de la expresión general cuenta la expresión que modela la sucesión dada? \_\_\_\_\_

■ Con la ayuda de su profesor validen y justifiquen los resultados de las actividades.



BAE

El libro *Fibonacci: el soñador de números*, de Joseph D'Agnesse, forma parte de la colección *Astrolabio*, de la serie *Libros del Rincón*. En esta obra encontrarás información valiosa sobre el trabajo de Fibonacci, también conocido como Leonardo de Pisa. Si puedes leerlo, analiza si la sucesión de Fibonacci es una sucesión cuadrática o no.



4. Respondan las preguntas.

- ¿Cómo son entre sí las expresiones algebraicas que modelan las sucesiones de la actividad 1 con respecto a la sucesión que resolvieron de tarea?
- Para las sucesiones de la actividad 2, analicen la siguiente información y respondan.

### Expresión que modela una sucesión cuadrática

Si la expresión algebraica que modela una sucesión cuadrática es de la forma  $An^2 + Bn + C$ , donde  $A$  es diferente de cero y  $n$  es la posición de cada término; para identificar el valor de los términos en relación con su posición se utiliza  $x_n$ .

- Con base en la información anterior, y considerando la sucesión L, ¿cuáles son los valores de  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , y  $x_5$ ?

c) Analicen la siguiente información:

### Primeras diferencias

Si se obtiene la primera diferencia de los valores  $x_n$ , la diferencia se identifica como  $b_n$ , por ejemplo:  $x_2 - x_1 = b_1$ ,  $x_3 - x_2 = b_2$ ,  $x_4 - x_3 = b_3$ , etc., y, si los resultados de las primeras diferencias es una constante, es decir,  $b_n$  tiene el mismo valor en todas las diferencias, se dice que la sucesión es de primer orden y la expresión que la modela es de la forma  $Bn + C$ .

- Con base en la información anterior, y considerando la sucesión L de la segunda actividad, ¿cuáles son los valores de  $b_1, b_2, b_3$ , y  $b_4$ ?

¿La sucesión es de primer orden? \_\_\_\_\_

d) Analicen la siguiente información y resuelvan.

### Segundas diferencias

Si en una sucesión se obtiene la primera diferencia y los valores  $b_1, b_2, b_3$ , y  $b_4$  no corresponden a una constante, se procede a obtener una segunda diferencia, la cual se determina a partir de los valores  $b_1, b_2, b_3$ , y  $b_4$  (por ejemplo  $b_2 - b_1, b_3 - b_2, b_4 - b_3$ ), y si los resultados de estas segundas diferencias es constante, se dice que la sucesión es cuadrática o de segundo orden.

- Con base en la información anterior y, de acuerdo con las diferencias, ¿la sucesión L es cuadrática? \_\_\_\_\_

¿Cuál es la constante que se obtuvo de las segundas diferencias? \_\_\_\_\_

© Nueva México



En el siguiente sitio podrás practicar actividades relacionadas con el contenido de la lección.  
[nlvm.usu.edu/es/nav/frames\\_asid\\_328\\_g\\_4\\_t\\_2.html?open=activities&from=topic\\_t\\_2.html](http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_328_g_4_t_2.html?open=activities&from=topic_t_2.html)  
 (consulta: 22 de diciembre de 2016, 11:50)

Para determinar los valores de  $A, B$  y  $C$  que se muestran en la forma general de una expresión cuadrática, hagan en su cuaderno lo que se solicita.

- Para determinar el valor del coeficiente  $A$  en la sucesión L, dividan la constante que obtuvieron en las segundas diferencias entre 2.
  - ¿Por qué consideran que la división se lleva a cabo por 2?
  - Si a la primera diferencia  $b_1$  se le resta la constante de las segundas diferencias, ¿qué valor se obtiene?
- Para determinar el valor del coeficiente  $B$ , llamen  $b_0$  al resultado anterior, y calculen la diferencia de  $b_0$  menos el coeficiente  $A$ .
  - ¿Qué resultado se obtiene?
- Resten al valor del primer término  $x_1$  el valor de  $b_0$ , y llamen al resultado  $x_0$ . ¿Cuál es el valor de  $x_0$ ?
  - Si el coeficiente  $C$  corresponde al valor de  $x_0$ , ¿cuál es la expresión cuadrática que modela a la sucesión L?
  - ¿Corresponde a la expresión que encontraron antes?
- Repitan lo hecho en los incisos  $a, b$  y  $c$  para las sucesiones K, M, N y contrasten estas expresiones con las que obtuvieron en la actividad 2.
  - Si para determinar las expresiones algebraicas de cada sucesión consideraron otro procedimiento, compártanlo con el grupo.

### Validemos lo aprendido

Resuelve lo que se solicita.

Determinen las expresiones algebraicas que modelan las siguientes sucesiones:

- Sucesión I:  $-10.75, -12.5, -15.25, -19, -23.75, \dots$
- Sucesión II:  $1.3, 4.5, 9.7, 16.9, 26.1, \dots$
- Sucesión III:  $-98, -94, -88, -80, -70, \dots$

- Con ayuda de su profesor, comparte tus respuestas con el grupo y validalas.

Resuelve el problema para iniciar el estudio del contenido de la siguiente lección.



Moneda



Carrusel



Bailarina



Sillas voladoras

- ¿Sobre qué eje gira cada una de las imágenes?
- ¿Qué forma o cuerpo geométrico se percibe al girar la bailarina?
- ¿Qué forma o cuerpo se genera cuando giran los otros objetos?

© Nueva México



# Sólidos de revolución

Eje: Forma, espacio y medida

Tema: Figuras y cuerpos

Contenido: Análisis de las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo. Construcción de desarrollos planos de conos y cilindros rectos



## 1. Cilindro

Retomen las notas de su tarea, discúntalas, y acuerden una respuesta para los siguientes casos.

En las imágenes presentadas, hay un objeto girando hacia una dirección, y por ese movimiento se genera un cuerpo.

- a) ¿Qué características tienen en común, esos y otros objetos que giran? \_\_\_\_\_
- b) ¿Qué cuerpos se formaron en cada caso? Describanlos. \_\_\_\_\_

### 1. Hagan la actividad y respondan.

- a) Discutan: ¿es posible formar un cuerpo al rotar alguna figura, o hacerla girar en una dirección? ¿De qué manera? \_\_\_\_\_
- b) Tomen una moneda, de preferencia de 10 pesos, y háganla girar como se muestra en la imagen. Después, respondan las preguntas.
  - Según lo que observaron, ¿qué forma se puede generar al hacer girar la moneda? \_\_\_\_\_
  - ¿Conocen algún cuerpo geométrico generado al girar una figura en un sentido específico? Especifiquen. \_\_\_\_\_

### 2. Haz las actividades y luego contesta justificando tus respuestas.

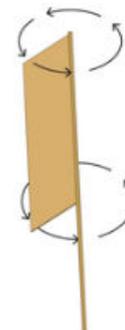
Busca algún objeto de cartón que tenga forma cilíndrica: puede ser un rollo de los que se encuentran en el papel higiénico. Traza una recta vertical sobre este y recórtalo. Extiende muy bien el material, cuidando que quede plano, y responde lo siguiente.

### Glosario

**girar.** Mover un objeto alrededor de un centro o un eje.



- a) ¿Qué figura geométrica observas? Escribe sus medidas. \_\_\_\_\_
- b) Cerciórate de que el material esté bien extendido y luego pégalo por la orilla en un palo de madera.
  - El palo de madera será el eje de rotación. Gira hacia una misma dirección el eje de rotación y describe el cuerpo que se genera. \_\_\_\_\_



- 3. Con la guía de su profesor, revisen y justifiquen sus respuestas de las actividades anteriores. Además, respondan lo siguiente.
  - a) De las imágenes que observaron en su tarea, ¿a partir de cuáles se puede generar una forma cercana a un cilindro? \_\_\_\_\_
  - b) Según lo visto en las actividades 1 y 2, ¿con qué figura plana se puede generar una forma cercana a un cilindro? \_\_\_\_\_
  - c) ¿Por qué al girar la moneda no se genera un cilindro? \_\_\_\_\_
  - d) Anoten las medidas del cuerpo que se generó al girar sobre un eje el rectángulo que construyeron en la actividad 2.



- Largo del material: \_\_\_\_\_
- Radio del cilindro: \_\_\_\_\_
- Ancho del material: \_\_\_\_\_
- Altura del cilindro: \_\_\_\_\_
- e) Si se quiere generar un cilindro que mida 12 cm de alto y 5 cm de radio, ¿qué medidas debe tener el rectángulo que gira en el eje de rotación? \_\_\_\_\_
- f) Si se quiere generar un cilindro que mida 14 cm de diámetro y  $\sqrt{98.01}$  cm de alto, ¿qué medidas debe tener el rectángulo que lo origina? \_\_\_\_\_

- g) Validen sus respuestas con ayuda del profesor.
- Revisen sus respuestas y, con la guía de su profesor, concluyan acerca de cómo se genera un cilindro y cómo se relaciona el rectángulo con el cilindro obtenido.





Reúne de cinco a ocho taparrosca y haz lo que se indica. Responde las preguntas en tu cuaderno.

- Toma la medida de la altura de cada taparrosca.
- Apila las taparrosca una sobre la otra, haciendo que sus formas coincidan con exactitud. ¿Qué cuerpo geométrico se forma? ¿Cuál es la medida de su radio?
- Si apilas cinco taparrosca, ¿cuál es la altura del cuerpo formado?
- Si en vez de taparrosca, utilizas monedas del mismo tamaño apiladas una sobre la otra y haces coincidir sus bordes, ¿se forma un cilindro?
- Si en lugar de monedas, se usan círculos de papel o cartón, y se hacen coincidir sus bordes, ¿qué cuerpo geométrico se forma?
- ¿Qué conclusión puedes obtener de tu experimento y las respuestas anteriores?

## 2. Cono y esfera



Revisen su tarea y, con la guía del profesor, respondan lo siguiente.

- Expliquen cómo se puede generar un cilindro recto. Comparen sus explicaciones y fortalezcan sus argumentos mediante la discusión grupal. \_\_\_\_\_
- ¿Es posible generar un cilindro recto trasladando un círculo? ¿De qué manera? \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_
- Considerando que un cilindro recto se pueda generar trasladando un círculo, ¿este procedimiento permitiría generar también un cono recto? \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_
  - Argumenten sus respuestas del inciso anterior, explicando por qué sí o no es posible generar un cono de la manera indicada. \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_



1. Realicen lo que se indica y respondan. Justifiquen sus respuestas.

- Tracen en cartón los siguientes triángulos y consigan palitos de madera.
  - Triángulo rectángulo  $ABC$
  - Triángulo equilátero  $GHI$
  - Triángulo isósceles  $DEF$
  - Triángulo obtusángulo  $JKL$

© Nueva México

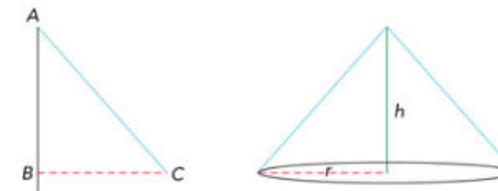
- Peguen un triángulo a la vez en un palo de madera (eje de rotación) y gírenlo. Consideren lo siguiente:
  - Peguen el triángulo  $ABC$  al palo por el cateto de mayor longitud.
  - Peguen el triángulo  $DEF$  por el lado desigual. Después prueben con uno de los lados de la misma medida.
  - Peguen el triángulo  $GHI$  por cualquiera de sus lados.
  - Peguen el triángulo  $JKL$  por uno de los lados que forman el ángulo mayor a  $90^\circ$ .
- Completen la tabla según sus experiencias.

	Triángulos			
	$ABC$	$DEF$	$GHI$	$JKL$
Descripción del cuerpo geométrico que se genera				
Forma de las bases				
Forma de las caras				
Número de vértices				

- ¿Con qué tipo de triángulo, al girar sobre un eje, se forma un cono recto? \_\_\_\_\_
- Tanto el cono como el cilindro recto son llamados sólidos de revolución. A partir de sus experiencias con las figuras anteriores, expliquen por qué reciben ese nombre. \_\_\_\_\_

2. Con la guía de su profesor, revisen y justifiquen sus respuestas de la actividad anterior. Además, discutan y respondan las preguntas.

En el esquema se muestra el  $\Delta ABC$  y el cono recto que se genera al rotarlo  $360^\circ$  sobre su eje.



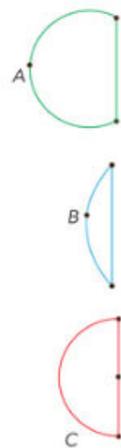
- ¿Con qué parte del cono generado por la rotación coincide la altura ( $AB$ ) del triángulo? \_\_\_\_\_
- ¿Qué relación hay entre el lado  $BC$  del triángulo y el radio de la base del cono? \_\_\_\_\_



© Nueva México

## Glosario

**generatriz.** Es un punto, línea o superficie que al darle movimiento genera una curva o un sólido como el cono.



c) El lado que en el cono está marcado con azul es llamado **generatriz**. ¿Qué relación hay entre la medida de la hipotenusa del  $\triangle ABC$  y la generatriz del cono? \_\_\_\_\_

d) Anoten la conclusión que se puede obtener de sus respuestas anteriores. \_\_\_\_\_

3. Analicen y resuelvan el problema. Justifiquen sus respuestas.

a) ¿Qué medida tienen la base y la altura del triángulo rectángulo  $ABC$  que genera un cono recto con diámetro 17.9 cm y altura de 13 cm? \_\_\_\_\_

b) Según las medidas del  $\triangle ABC$ , ¿cuál es la medida de la generatriz del cono recto que produce? \_\_\_\_\_

■ Revisen sus respuestas con la guía de su profesor y expliquen cómo se relacionan las propiedades de un triángulo rectángulo cualquiera con el cono recto obtenido.

4. Hagan los trazos y resuelvan.

a) Tracen en cartón las figuras geométricas que se muestran a la izquierda y péguenlas en un palo de madera (eje de rotación). Gírenlas  $360^\circ$  y observen el cuerpo generado. Hagan en su cuaderno una tabla como la siguiente y complétenla.

Figura	Dibujo del cuerpo geométrico generado al girarla $360^\circ$	Descripción de las caras del cuerpo geométrico
A		
B		
C		

b) ¿Cuál de las figuras genera una esfera? Sustenten. \_\_\_\_\_

c) ¿Cómo son las caras de una esfera? \_\_\_\_\_

■ Socialicen sus experiencias en grupo y, con la guía del maestro, concluyan acerca de cómo se genera la esfera y qué relaciones pueden establecerse entre esta y la figura que la produce.

### Hagan lo que se solicita.

Investiguen en un medio electrónico o impreso qué son los sólidos de revolución, cuántos existen y qué características tienen. Retomen los argumentos o conclusiones a los que llegaron en la actividad 1, inciso e, de la página 179 y contrastenlos con su investigación.

© Nueva México

## 3. Desarrollos planos del cilindro y cono recto

Retomen las notas de su tarea y hagan lo siguiente.

Discutan las ideas que anotaron sobre los sólidos de revolución y argumenten su validez, empleando para ello sus observaciones de las actividades anteriores.

1. Contrasten sus conclusiones con la siguiente información.

### Sólidos de revolución

El **cilindro recto**, el **cono recto** y la **esfera** son llamados **sólidos de revolución**, debido a que se obtienen al girar  $360^\circ$  una figura plana alrededor de un eje de rotación.

El cilindro recto es producido por un rectángulo que gira  $360^\circ$  alrededor de uno de sus lados. En la figura 1 el lado  $AB$  del rectángulo es el eje de giro o eje del cilindro  $AA_1B_1B_1$  y corresponde a la altura del cilindro generado. El lado  $CD$  forma la superficie lateral del cilindro y se conoce como **generatriz**. Los lados  $AD$  y  $BC$ , al rotarse, generan las bases circulares del cilindro. El cilindro recto también se puede generar al trasladar un círculo en dirección perpendicular al plano que lo contiene, como se observa en la figura 2.

Figura 1

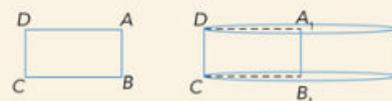


Figura 2



El cono recto se obtiene al girar  $360^\circ$  un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos. En la figura 3, el lado  $AC$  es el eje del cono y su longitud es la altura del cono. Al girar  $360^\circ$  el triángulo  $ABC$ , el lado  $CB$  genera un círculo perpendicular a la altura y que es la base del cono; el radio de esta figura es el radio del cono. La hipotenusa ( $AB$ ) genera el cuerpo del cono; es la generatriz. Al aplicar el teorema de Pitágoras, se puede conocer su medida o valor: sea  $g$  la generatriz del cono, entonces:  $g = \sqrt{h^2 + r^2}$ , donde  $h$  es la altura del cono y  $r$  el radio de su base. El punto de intersección de la generatriz con el eje se llama vértice del cono.



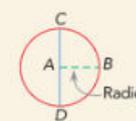
Figura 3



La esfera se obtiene al girar un semicírculo alrededor de su diámetro ( $CD$ ). El punto  $A$  es el centro de la esfera y  $AB$  es su radio.



Figura 4



a) Expliquen qué relaciones existen entre las figuras planas y los correspondientes cuerpos de revolución que generan. Escriban sus conclusiones en el cuaderno.

2. Analicen, discutan y resuelvan los problemas. Justifiquen sus respuestas.

Recuperen sus experiencias de la actividad 2 en las páginas 176 y 177, con base en ello, hagan en su cuaderno un esbozo del desarrollo plano de un cilindro recto.

© Nueva México



En la siguiente página puedes ampliar la información sobre los sólidos de revolución. [matematicasydidactica0809.pbworks.com/w/page/20505007/cuerpos\\_redondos\\_hexagono\\_matematico](http://matematicasydidactica0809.pbworks.com/w/page/20505007/cuerpos_redondos_hexagono_matematico) (consulta: 22 de diciembre de 2016, 12:00 horas)

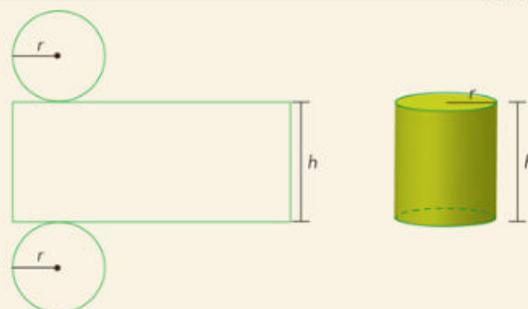
- ¿Cuántas y qué figuras forman parte del desarrollo plano del cilindro?  
\_\_\_\_\_
- ¿Cuál es la medida de la altura del cilindro? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es la medida del radio de las bases del cilindro? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es la medida de la longitud del rectángulo obtenido? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es la medida del perímetro de una de las bases del cilindro?  
\_\_\_\_\_
- ¿Qué relación se puede establecer entre la medida del perímetro de la base y la longitud del rectángulo? \_\_\_\_\_

3. Contrasten la siguiente información con sus respuestas anteriores.

### Desarrollo plano de un cilindro recto



El desarrollo plano de un cilindro recto está conformado por dos círculos congruentes (bases del cilindro) y un rectángulo. El rectángulo constituye la superficie lateral del cilindro y su longitud mide lo mismo que la circunferencia de los círculos que forman las bases. La altura del rectángulo corresponde a la altura del cilindro.



- Consigan un cono de papel o cartón, como el que se muestra en la imagen y tracen una línea vertical desde su vértice hasta la base. Luego hagan lo siguiente en su cuaderno y respondan las preguntas.
  - Tracen el contorno circular del cono elegido. Luego recórtelo por la línea azul y, debajo de la base circular que ya habían hecho, tracen el contorno del cono.
  - ¿Qué caras forman el desarrollo plano del cono recto? Describan sus características.
  - En el desarrollo plano, registren las medidas de la generatriz y del radio de la base del cono.
  - Determinen la medida del perímetro de la base del cono.
    - ¿Qué relación existe entre la medida del perímetro de la base y la longitud del arco de la circunferencia?
    - ¿Cuál es la medida del ángulo del sector circular que forma una de las caras del desarrollo plano del cono recto?

© Nueva México

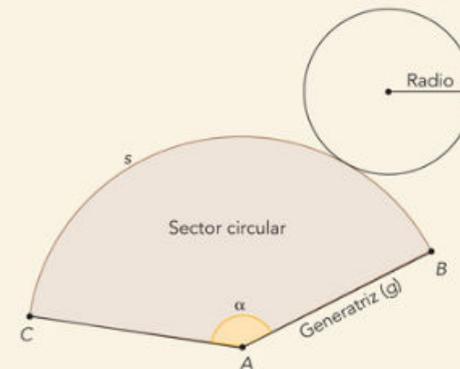
- Discutan la información y expliquen si difiere de lo que vieron en las experiencias anteriores.



### Desarrollo plano de un cono



El desarrollo plano de un cono está integrado por un sector circular (superficie lateral del cono) y un círculo (superficie de la base). El sector circular es la superficie generada por la rotación de la generatriz al girar el triángulo rectángulo. Para este, el radio es igual a la generatriz  $g$  del cono, y el arco  $s$  tiene una longitud igual a la circunferencia de la base. La medida del ángulo del sector circular  $\alpha$  puede calcularse usando la expresión:  $\text{ángulo} = 360\left(\frac{r}{a}\right)$ , donde  $r$  es el radio de la base del cono y  $a = \sqrt{h^2 + r^2}$ .



### Practica



1. Construye los desarrollos planos de dos conos con estas medidas:

- radio = 10 cm y altura = 16 cm
- diámetro = 9 cm y altura = 6 cm

- Determina la medida de la generatriz y del ángulo del sector circular para cada caso.
- Compara tu respuesta con las de tus compañeros y corrige si fuera necesario.

Con la guía de su profesor, concluyan sobre las características de los sólidos de revolución, sus desarrollos planos y cómo se pueden determinar sus medidas. Toma nota en tu cuaderno.

### Validemos lo aprendido



Resuelve el problema y responde.

Se tiene el desarrollo plano de un cono que mide 16 cm de altura y cuya base tiene un radio de 12 cm. Determina la medida de la generatriz y del ángulo del sector circular.

Investiga qué es la pendiente de una recta. Después realiza lo que se pide.

- Traza la recta asociada a la ecuación  $y = 2x + 1$ .
- Escribe las características que conozcas de esa clase de rectas.
- Determina la medida del ángulo de inclinación de la recta.
- Determina cuál es el valor de la pendiente de la recta.



© Nueva México

# Pendiente de una recta

Eje: Forma, espacio y medida

Tema: Medida

Contenido: Análisis de las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente

## 1. Gráficas del tipo $y = ax + b$

1. Con la ayuda de su profesor, contesten el cuaderno.

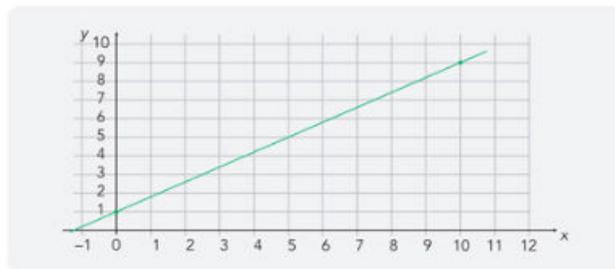
- a) En el siguiente plano se han trazado dos rectas asociadas a ecuaciones del tipo  $y = mx + b$ . Identifiquen qué recta corresponde a la ecuación  $y = 2x + 1$  y cuál a la ecuación  $y = x + 2$ . Justifiquen su respuesta.



- b) ¿En qué recta la **pendiente** es mayor?  
 c) ¿En qué recta la medida del **ángulo de inclinación** es menor?  
 d) ¿Cuál es el valor de la pendiente de la recta asociada a la ecuación  $y = x + 2$ ?  
 e) Tracen en el plano anterior una recta asociada a una ecuación del tipo  $y = ax + b$ , cuya medida del ángulo de inclinación mida  $\alpha$ . Si se sabe que la medida de su pendiente es menor que 1, ¿cuál es la ecuación de la recta trazada?

■ Comenten sus respuestas y concluyan acerca de la relación entre la pendiente y el ángulo de inclinación.

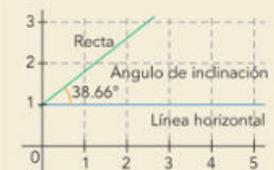
2. Analicen la gráfica, hagan lo que se solicita y respondan. Justifiquen sus respuestas.



© Nueva México

### Glosario

**ángulo de inclinación.** Es el ángulo que la recta forma con el eje de las abscisas u otra línea horizontal.



**ecuación del tipo  $y = mx + b$ .** Es la ecuación general de una línea recta. En ella,  $b$  es la ordenada al origen;  $m$  es la pendiente de la recta.

**pendiente.** En la ecuación del tipo  $y = ax + b$  está dada por  $a$ . Indica qué tan inclinada está la recta respecto al eje de las abscisas. Cuanto menor es la medida de la pendiente, menor es la medida del ángulo de inclinación de la recta respecto al eje  $x$ , y viceversa: cuanto mayor es la pendiente, mayor es la medida del ángulo de inclinación de una recta respecto al eje  $x$ .

- a) ¿Cuál es la coordenada del punto en el que la recta de la ecuación  $y = 0.80x + 1$  interseca al eje de las ordenadas? \_\_\_\_\_

- b) Tracen una recta paralela al eje de las abscisas, que pase por el punto identificado en el inciso a. Llámennla  $R_1$ .
- Tracen una recta paralela al eje de las ordenadas y que pase por el punto  $(10, 0)$ . Llámennla  $R_2$ .
  - Identifiquen los puntos de intersección entre  $R_1$ ,  $R_2$  y la recta de la ecuación  $y = 0.80x + 1$ . Llamen  $A$  al punto de intersección de  $R_1$  y la recta de la ecuación. Llamen  $B$  al punto de intersección de  $R_2$  y la recta de la ecuación. Llamen  $C$  al punto de intersección de  $R_1$  y  $R_2$ .
  - ¿Qué figura se formó? \_\_\_\_\_
  - ¿Qué características tiene la figura construida? \_\_\_\_\_

- c) Identifiquen el ángulo  $BAC$  y llámennlo ángulo  $\alpha$ .
- ¿Cuál es su medida? \_\_\_\_\_
- d) Identifiquen el cateto opuesto, adyacente e hipotenusa del triángulo  $ACB$ , con respecto al ángulo  $\alpha$ .
- ¿Cuál es el valor del cociente  $\frac{BC}{CA}$ ? \_\_\_\_\_
  - De acuerdo con el ángulo  $\alpha$ , ¿el cociente  $\frac{BC}{CA}$  es equivalente al cociente  $\frac{CO}{CA}$ , donde  $CO$  es la medida del cateto opuesto al ángulo  $\alpha$ , y  $CA$  es el cateto adyacente al mismo ángulo? ¿Por qué? \_\_\_\_\_

- e) ¿Cómo es el cociente obtenido en comparación con la medida de la pendiente de la recta asociada a la ecuación  $y = 0.80x + 1$ ? \_\_\_\_\_

- f) Tracen una recta paralela a  $\overline{BC}$  que pase por el punto  $(7, 0)$ . Llámennla  $R_3$ . A los puntos de intersección de  $R_3$  con  $R_1$  y la recta de la ecuación llámennlos  $C'$  y  $B'$ , respectivamente.
- ¿Qué figura se formó? \_\_\_\_\_
  - ¿Cómo es la figura formada con respecto al triángulo rectángulo  $ACB$ ? \_\_\_\_\_
  - ¿Cuál es el valor del cociente  $\frac{B'C'}{C'A'}$ ? \_\_\_\_\_
  - ¿Cómo es el cociente anterior en comparación con el cociente  $\frac{BC}{CA}$  y la pendiente de la recta  $y = 0.80x + 1$ ? \_\_\_\_\_

- g) Si se trazan segmentos paralelos a  $\overline{BC}$  cada vez más cerca al eje de las ordenadas, ¿se construyen triángulos semejantes a  $ACB$ ? ¿Por qué? \_\_\_\_\_

© Nueva México

- ¿Cómo serían los cocientes  $\frac{CO}{CA}$  de los triángulos semejantes al compararlos? ¿Por qué? \_\_\_\_\_



3. Contesta en el cuaderno lo siguiente.

- Retoma tu respuesta de la última pregunta de la actividad anterior. ¿Cómo puedes determinar que el valor de los cocientes obtenidos en ese caso es constante? \_\_\_\_\_  
 • ¿Este valor constante ( $\frac{CO}{CA}$ ) es específico para la ecuación  $y = 0.80x + 1$ , o para todas las ecuaciones del tipo  $y = ax + b$ ? Explica por qué. \_\_\_\_\_
- Traza la recta de la ecuación  $y = 0.60x + 2$ . Identifica el ángulo que se forma entre la recta y el eje de las abscisas y llámalo  $\alpha$ .
  - Construye triángulos semejantes. Considera la recta de la ecuación como hipotenusa, y al eje de las abscisas como uno de los catetos.
  - ¿Cuál es el valor de  $\frac{CO}{CA}$  de cada triángulo construido?
- ¿Cuál es la relación entre el valor de la pendiente de una recta del tipo  $y = ax + b$ , el valor del ángulo  $\alpha$  y el cociente del  $\frac{CO}{CA}$ ?



4. Con la ayuda de su profesor, revisen su tarea y validen sus respuestas. Luego discutan lo siguiente.

- Si la pendiente es mayor que 1, ¿cómo puede ser la medida de su ángulo de inclinación?
  - Si la pendiente es menor que 1, ¿cómo puede ser la medida de su ángulo de inclinación?
  - Según lo que han visto en esta sesión, ¿cuál es la relación entre la pendiente de una recta del tipo  $y = ax + b$ , el valor del ángulo  $\alpha$  y el cociente del  $\frac{CO}{CA}$ ?
- Retomen sus respuestas anteriores y, con la guía de su profesor, concluyan sobre las relaciones que han visto entre la pendiente de la recta y el cociente de los catetos. Escribe en tu cuaderno las conclusiones.



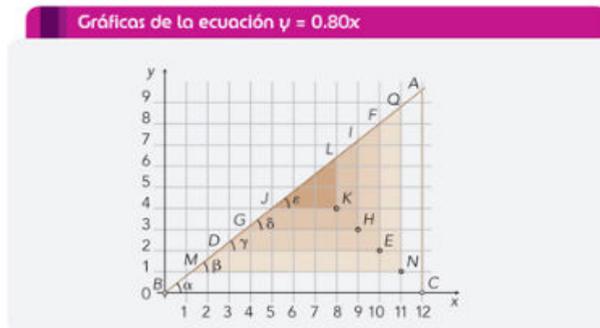
En tu cuaderno, resuelve lo que se solicita.

- Traza la gráfica de la ecuación  $y = 2x$ .
- Escribe las características que conoces de este tipo de rectas.
- Determina la medida del ángulo de inclinación de la recta y su pendiente.

## 2. Gráficas del tipo $y = ax$

1. Analicen, discutan y resuelvan las siguientes situaciones. Justifiquen sus respuestas.

En el siguiente plano se muestra la gráfica de la ecuación  $y = 0.80x$ . Se denominó  $\alpha$  al ángulo formado por la recta y el eje de las abscisas, y se trazaron algunos triángulos.



- ¿Cuántos triángulos se trazaron? Escriban sus nombres. \_\_\_\_\_
- Identifiquen el cateto opuesto y el cateto adyacente respecto al ángulo marcado en cada uno de los triángulos anteriores.
- Completen la siguiente tabla.

Triángulo	Medida del ángulo marcado	Medida del cateto opuesto (CO)	Medida del cateto adyacente (CA)	Cociente $\frac{CO}{CA}$
BCA				
MNQ				
DEF				
GHI				
JKL				

- Comparen las medidas de los ángulos  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\sigma$  y  $\varepsilon$ . ¿Cómo son entre sí? \_\_\_\_\_
- ¿Cómo son los cocientes obtenidos? \_\_\_\_\_
- ¿Los triángulos generados son semejantes? Sustenten. \_\_\_\_\_
- ¿Qué caracteriza la relación de semejanza entre dos o más triángulos? \_\_\_\_\_ ¿Esta relación influye en los cocientes obtenidos? Expliquen \_\_\_\_\_
- ¿Los cocientes obtenidos en la tabla se pueden considerar como una constante? Argumenten. \_\_\_\_\_



TIC



En la siguiente página podrás modificar la posición de una recta y observar cómo varía la pendiente al modificar su inclinación.

<https://www.geogebra.org/m/E6Yz7NmR>

Y atrévete a evaluar lo que sabes sobre la pendiente de una recta en:

<http://geometriadinamica.org/examinteractivo/Elpendiente.htm>

(consulta: 22 de diciembre de 2016, 17:30 horas)



2. Revisen y justifiquen sus respuestas de la actividad anterior. Después contesten en el cuaderno lo que se plantea.

a) ¿Cuál es la relación entre el valor de la pendiente de la recta de la ecuación  $y = 0.80x$ , el valor del ángulo marcado, y el cociente  $\frac{CO}{CA}$ ?

3. Revisen su tarea y válidenla. Luego hagan lo que se solicita.

a) Escriban cuál es la relación entre el valor de la pendiente de una recta del tipo  $y = ax$ , el valor del ángulo formado por dicha recta, y el eje de las abscisas, y el cociente  $\frac{CO}{CA}$  asociado al ángulo. Hagan lo mismo para una recta del tipo  $y = ax + b$ .



Haz en tu cuaderno lo que se indica.

- Traza la recta  $y = 2.5$ .
- Escribe las características que conoces de este tipo de rectas.
- Determina la medida del ángulo de inclinación de la recta y su pendiente.

### 3. Gráficas del tipo $y = b$

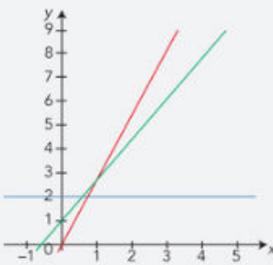
Comparen las respuestas que dieron a la tarea. Luego hagan la actividad y registren sus respuestas en el cuaderno.

- Observen las rectas de la izquierda e identifiquen cuál corresponde a cada una de las siguientes ecuaciones:  $y = ax + b$ ,  $y = ax$  y  $y = b$ . Determinen el valor de sus pendientes.
- Registren las semejanzas y diferencias identificadas en la medida de la pendiente y el ángulo de inclinación de cada recta.
- ¿Cuál es la relación entre el valor de la pendiente de una recta del tipo  $y = ax$ ,  $y = ax + b$  y  $y = b$ , el valor del ángulo  $\alpha$ , y el cociente del  $\frac{CO}{CA}$ ?

1. Comenten la siguiente información en grupo.



#### Gráfica de ecuaciones lineales



### Tangente del ángulo

Al formarse triángulos rectángulos semejantes entre una recta con pendiente distinta de cero y el eje de las abscisas (o una paralela a él) y el eje de las ordenadas (o una paralela a él) se denomina **tangente del ángulo** al cociente de la medida del cateto opuesto entre la del cateto adyacente asociado con dicho ángulo el cual corresponde al ángulo de inclinación de la recta.

© Nueva México



• ¿Cuál es el valor de la tangente del ángulo de inclinación de las rectas de los ejercicios de la lección? Escríbanlo en su cuaderno.

2. Resuelvan lo siguiente en el cuaderno.

- ¿A qué ecuación está asociada la familia de rectas del plano de la derecha?
  - Al trazar una recta paralela al eje de las abscisas y otra al eje de las ordenadas, ¿cuántos y cuáles triángulos se forman?
  - ¿Cómo son los triángulos entre sí?
  - Determinen la medida del ángulo de inclinación de cada recta, así como la medida de su pendiente. Marquen el ángulo de inclinación.
  - Para cada recta, ¿cuál es la medida de la tangente de su ángulo de inclinación?
- Argumenten sus respuestas, válidenlas con ayuda del profesor.

### Practica

1. Determinen la medida de la tangente del ángulo de inclinación de las rectas asociadas a las siguientes ecuaciones. Después, comparen sus respuestas en grupo.

- a)  $y = 3.25x + 4$     b)  $y = 2$     c)  $y = 4.5x$     d)  $y = 17$

3. Discutan las siguientes preguntas y, con ayuda del profesor, lleguen a consensos. Registren sus respuestas en el cuaderno.

- ¿Para qué recta la tangente del ángulo de inclinación es mayor?
  - ¿Cuál tiene la menor pendiente?
- Con la guía del profesor, redacta cómo le explicarías a otro alumno de tercero de secundaria cuál es la relación entre el valor de la pendiente de una recta, el valor de su ángulo de inclinación y la tangente de dicho ángulo.

### Validemos lo aprendido

1. Traza las rectas asociadas con cada una de las ecuaciones. Determina la medida de la tangente de su ángulo de inclinación.

$$y = 4x + 2 \quad y = 2x \quad y = 0.9 \quad y = 3x + 2$$

• ¿Qué recta tiene la menor medida de la tangente? ¿Cuál tiene la medida mayor?

2. Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Corrígelas, de ser necesario.

© Nueva México

Tracen un triángulo rectángulo que tenga un ángulo interior menor que  $45^\circ$ .

#### Familia de rectas



# Ángulos agudos y triángulos rectángulos

Eje: Forma, espacio y medida

Tema: Medida

Contenido: Análisis de las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo

## 1. Familia de triángulos rectángulos

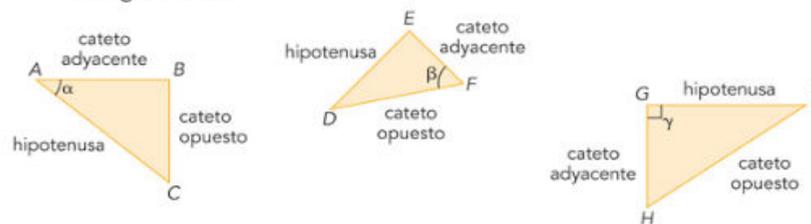


Con la ayuda de su profesor revisen su tarea. Después contesten lo siguiente.

- Escriban las medidas de los ángulos interiores del triángulo que construyeron. \_\_\_\_\_
- ¿Qué tipo de ángulos son? \_\_\_\_\_
- ¿Se puede construir siempre un triángulo rectángulo con dos ángulos agudos? Expliquen. \_\_\_\_\_
- Escriban una regla para construir triángulos rectángulos a partir de la medida de sus ángulos interiores. \_\_\_\_\_



- Identifiquen en cuál de los siguientes triángulos rectángulos están indicados de manera correcta los catetos y la hipotenusa, con respecto al ángulo dado.



- El triángulo en el que se designan correctamente los catetos y la hipotenusa es \_\_\_\_\_, ya que \_\_\_\_\_
- En los triángulos \_\_\_\_\_ y \_\_\_\_\_ no se indican correctamente los catetos y la hipotenusa ya que \_\_\_\_\_
- ¿En qué triángulos el ángulo marcado ( $\alpha$ ,  $\beta$  o  $\gamma$ ) es agudo? \_\_\_\_\_
  - ¿Qué lados del triángulo forman el ángulo agudo? \_\_\_\_\_

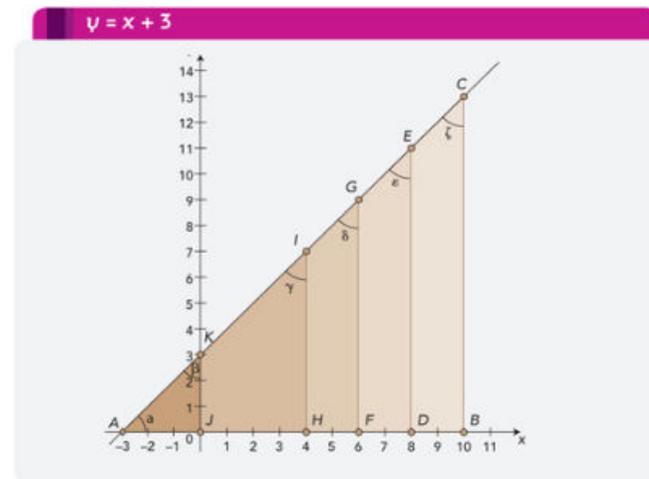
© Nueva México

- Escriban en el cuaderno una definición de:
  - Hipotenusa
  - Cateto opuesto al ángulo  $\alpha$
  - Cateto adyacente al ángulo  $\alpha$

■ Socialicen sus escritos y verifiquen que sean correctos.

- Resuelvan la actividad. Justifiquen sus respuestas.

- Analicen la familia de triángulos rectángulos que se forman con la recta asociada con la ecuación  $y = x + 3$ . Identifiquen el cateto opuesto y el cateto adyacente respecto a los ángulos  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $\epsilon$ , y  $\zeta$ .



- Completan la tabla.

Medida del ángulo	$\triangle ABC$	$\triangle ADE$	$\triangle AFG$	$\triangle AHI$	$\triangle AJK$
$\alpha$					
$\beta$					
$\gamma$					
$\delta$					
$\epsilon$					
$\zeta$					

- ¿Cómo son las medidas de los ángulos agudos de los triángulos que se construyeron con la recta  $y = x + 3$  y el eje de las abscisas? \_\_\_\_\_

- ¿Qué tipo de relación pueden establecer entre los triángulos de acuerdo con los datos de la tabla anterior? \_\_\_\_\_

© Nueva México



d) Completen los datos de la tabla con respecto a la familia de triángulos de la página anterior. Después respondan en el cuaderno.

	$\triangle ABC$	$\triangle ADE$	$\triangle AFG$	$\triangle AHI$	$\triangle AJK$
Medida del cateto opuesto (CO) con respecto al ángulo $\alpha$					
Medida del cateto adyacente (CA) con respecto al ángulo $\alpha$					
Medida de la hipotenusa (H)					
$\frac{CO}{H}$					
$\frac{CA}{H}$					



**Educación para la paz.** Identificar tus intereses, necesidades, dificultades y errores, pero también tus habilidades y talentos, te permitirá enfrentar con éxito las tareas escolares y las cotidianas. Conocer te permite respetarte y respetar a los demás.

- Analicen la fila con los cocientes  $\frac{CO}{H}$  de la tabla. ¿Cómo son los cocientes obtenidos?
  - ¿Por qué consideran que ocurre lo anterior?
  - ¿Hay alguna relación entre los cocientes  $\frac{CO}{H}$  y la medida de la pendiente de la recta  $y = x + 3$ ? Expliquen.
  - Analicen la fila con los cocientes  $\frac{CA}{H}$ . ¿Cómo son los cocientes?
  - ¿Por qué piensan que ocurre lo anterior?
  - ¿Hay alguna relación entre los cocientes  $\frac{CA}{H}$  y la medida de la pendiente de la recta  $y = x + 3$ ? Expliquen.
- Escriban en el cuaderno sus conclusiones sobre los resultados de las actividades de los incisos c y d. Compárenlas con las de otros compañeros.

3. Haz lo que se indica y completa la tabla.

En la gráfica de la página anterior, traza una recta paralela al eje de las abscisas que pase por el punto K. Ubica los puntos de intersección entre la paralela trazada y el cateto opuesto al ángulo  $\alpha$  de los triángulos. Llámalos  $B'$ ,  $D'$ ,  $F'$ ,  $H'$  respectivamente.

a) Ubica los catetos opuestos, los catetos adyacentes y las hipotenusas de los nuevos triángulos con respecto al homólogo del ángulo  $\alpha$ .

Triángulo	Medida de la hipotenusa (H)	Medida del cateto opuesto (CO)	Medida del cateto adyacente (CA)	$\frac{CO}{H}$	$\frac{CA}{H}$
$KB'C$					
$KD'E$					
$KF'G$					
$KH'I$					

© Nueva México

b) Compara los datos obtenidos para cada pareja de triángulos y responde en el cuaderno.

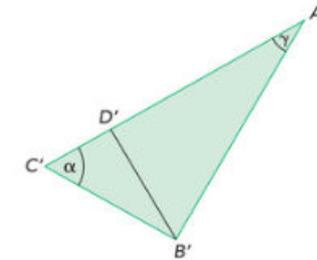
Pareja de triángulos	$\frac{CO}{H}$	$\frac{CA}{H}$
$\triangle ABC$ y $\triangle KB'C$		
$\triangle ADE$ y $\triangle KD'E$		
$\triangle AFG$ y $\triangle KF'G$		
$\triangle AHI$ y $\triangle KH'I$		

- ¿Cómo son los datos al compararlos?
  - ¿Las relaciones estudiadas dependen de que los triángulos sean semejantes? Expliquen.
- Comparte tus respuestas con otros compañeros y registren sus acuerdos.

Ingresar al sitio: <http://www.telesecundaria.sep.gob.mx/>  
 elige "Materiales Educativos Audiovisuales", haz clic en "TERCER GRADO" y después selecciona la opción "Matemáticas III". En la barra derecha escoge "Bloque 4" y busca en la barra de títulos el recurso "Seno, coseno y tangente", ahí podrás ver el video explicativo para consolidar lo estudiado en la lección.  
 (consulta: 22 de diciembre de 2016, 17:40 horas)

Analiza la figura y resuelve lo que se indica.

a) La altura del triángulo  $C'B'A'$  está dada por el segmento  $D'B'$ , de tal manera que se generan dos triángulos rectángulos. Obtén los datos necesarios y completa la tabla. Considera para cada triángulo el ángulo marcado.



	$\triangle C'B'D'$	$\triangle D'B'A'$
$\frac{CO}{H}$		
$\frac{CA}{H}$		

- ¿Qué se puede concluir al comparar los cuatro cocientes de los dos triángulos? Justifica tu respuesta.

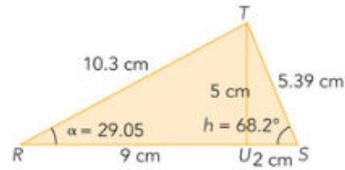
## 2. Seno, coseno y tangente

Revisen su tarea. Después analicen y resuelvan las siguientes situaciones en el cuaderno. Justifiquen sus respuestas.

- a) Identifiquen en sus calculadoras las teclas asociadas a las siguientes funciones:
- Función seno (tecla sin o sen)
  - Función coseno (tecla cos)
  - Función tangente (tecla tan)
- b) ¿Para qué se utilizan las funciones anteriores?

© Nueva México





c) Con los datos del triángulo  $RST$  completen la tabla. Considera para cada triángulo el ángulo marcado.

	$\Delta UST$	$\Delta RUT$
$\frac{CO}{H}$	$\frac{5}{5.39} = 0.92$	
$\frac{CA}{H}$	$\frac{2}{5.39} = 0.37$	
$\frac{CO}{CA}$	$\frac{5}{2} =$	
Tecla SIN y medida del ángulo marcado	0.92	
Tecla COS y medida del ángulo marcado	0.37	
Tecla TAN y medida del ángulo marcado	2.5	

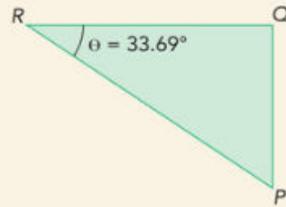
- ¿Qué identifican en los datos de la tabla anterior? Expliquen.
- ¿A qué conclusión pueden llegar con los datos obtenidos?

1. Con la ayuda de su profesor revisen sus respuestas. Después compárenlas con la siguiente información.



## Razones trigonométricas

Sea  $\theta$  uno de los ángulos internos de un triángulo rectángulo, se pueden establecer tres **razones trigonométricas** entre los lados de dicho triángulo y  $\theta$ :



- **Seno de  $\theta$  (sen  $\theta$ )**, es igual al cociente de la razón  $\frac{CO}{H}$ , donde  $CO$  es la medida del cateto opuesto al ángulo  $\theta$ , y  $H$  es la medida de la hipotenusa.
- **Coseno  $\theta$  (cos  $\theta$ )**, es igual al cociente de la razón  $\frac{CA}{H}$ , donde  $CA$  es la medida del cateto adyacente al ángulo  $\theta$ , y  $H$  es la medida de la hipotenusa.
- **Tangente de  $\theta$  (tan  $\theta$ )**, es igual al cociente de la razón  $\frac{CO}{CA}$ , donde  $CO$  es la medida del cateto opuesto al ángulo  $\theta$ , y  $CA$  es la medida del cateto adyacente al ángulo  $\theta$ .

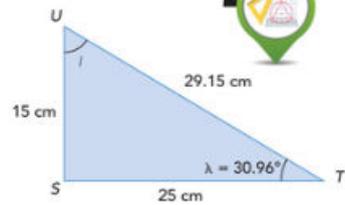


Utilicen su calculadora para determinar el valor del seno, coseno y tangente de la familia de triángulos de la página 191.

## 3. Relaciones entre seno, coseno y tangente

1. Comenten sus respuestas de la tarea. Con ayuda de su profesor hagan lo que se pide.

- ¿Cuál es la medida del ángulo  $l$ ? \_\_\_\_\_
- Dado que el ángulo  $\lambda$  es complementario de  $l$ , ¿qué relación existe entre el seno de  $\lambda$  y el coseno de  $l$ ? Expliquen. \_\_\_\_\_

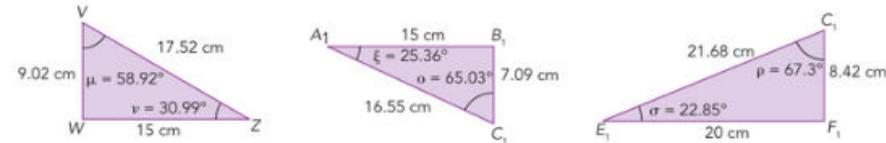


© NuevaMéxico

- Ahora determinen las razones trigonométricas del triángulo  $STU$  con respecto a los ángulos  $l$  y  $\lambda$ . ¿Qué relación existe entre el seno de  $l$  y el coseno de  $\lambda$ ? Expliquen. \_\_\_\_\_
- ¿Esta relación se puede generalizar para todos los triángulos rectángulos? ¿Por qué? \_\_\_\_\_

## Practica

1. Analiza los triángulos y contesta en el cuaderno.



- Determina las razones trigonométricas de los triángulos con respecto a los ángulos marcados.
  - Utilicen su calculadora para obtener el seno de un ángulo de  $45^\circ$ . Analicen el valor que obtuvieron. ¿A qué es igual el coseno de un ángulo de  $45^\circ$ ?
  - ¿Cuál es el producto de la tangente de un ángulo de  $45^\circ$  por la tangente de un ángulo de  $45^\circ$ , es decir:  $\tan(45^\circ) \times \tan(45^\circ)$ ?
- Con la ayuda de su profesor argumenten y justifiquen sus respuestas.

Lean la siguiente información y, con ayuda del profesor, lleguen a consenso.

## Seno de un ángulo

El seno de un ángulo  $\alpha$  es igual al coseno de su complemento; la tangente de un ángulo  $\alpha$  es el recíproco o inverso multiplicativo de la tangente de su complemento.

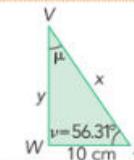
## Validemos lo aprendido

1. Analiza y responde en el cuaderno.

- Calcula el seno de un ángulo de  $25^\circ$  y el coseno de un ángulo de  $65^\circ$ . ¿Qué relación identificas entre ambos datos?
  - ¿Cuál es el producto de la tangente de un ángulo de  $32^\circ$  por la tangente de un ángulo de  $58^\circ$ ?
  - ¿Cuál es la relación entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo?
- Compáren sus respuestas con las de sus compañeros y concluyan. Corrijan los errores en caso de haberlos.

© NuevaMéxico

Determina el valor de  $x$  y de  $y$  en el siguiente triángulo.



# Razones trigonométricas

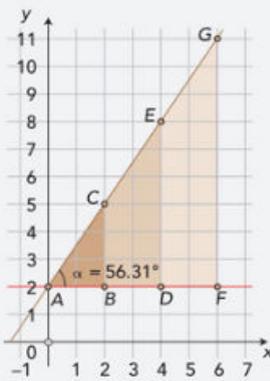
Eje: Forma, espacio y medida

Tema: Medida

Contenido: Explicación y uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente



Gráfico de la ecuación  $y = 1.5x + 2$



## 1. Explicación de las razones trigonométricas

### 1. Contesta lo que se solicita.

En la gráfica de la izquierda se muestra la recta de la ecuación  $y = 1.5x + 2$ . Se han trazado además, una recta paralela al eje de las abscisas y tres segmentos paralelos al eje de las ordenadas, formándose tres triángulos rectángulos.

a) Determina el valor del seno, coseno y tangente del ángulo  $\alpha$ .

- $\text{sen } \alpha =$  \_\_\_\_\_
- $\text{cos } \alpha =$  \_\_\_\_\_
- $\text{tan } \alpha =$  \_\_\_\_\_

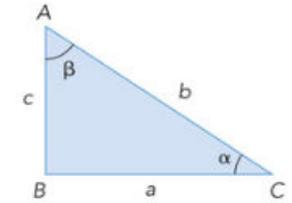
b) Escribe si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero o falso. Argumenta tu respuesta.

Enunciado	Veracidad	Argumentos
Las razones trigonométricas definen las relaciones que se establecen entre triángulos que son congruentes, pero que no son semejantes.		
Para dos o más triángulos rectángulos semejantes, el valor de la tangente de ángulos correspondientes es el mismo.		
Cuando el seno de dos ángulos de triángulos rectángulos distintos (un ángulo de cada triángulo) es el mismo, los triángulos son semejantes.		
Cuando el coseno de dos ángulos de triángulos rectángulos distintos (un ángulo de cada triángulo) es el mismo, los triángulos son semejantes.		

© Nueva México

c) De acuerdo con el  $\triangle BCA$ , subraya las razones trigonométricas correctas con respecto al ángulo  $\beta$ :

- $\text{sen}(\beta) = \frac{b}{a}$ ,     $\text{cos}(\beta) = \frac{b}{c}$ ,     $\text{tan}(\beta) = \frac{a}{b}$
- $\text{sen}(\beta) = \frac{a}{c}$ ,     $\text{cos}(\beta) = \frac{c}{a}$ ,     $\text{tan}(\beta) = \frac{b}{c}$
- $\text{sen}(\beta) = \frac{a}{b}$ ,     $\text{cos}(\beta) = \frac{c}{b}$ ,     $\text{tan}(\beta) = \frac{a}{c}$



### 2. Lean la siguiente información y respondan en el cuaderno. Justifiquen sus respuestas.

A continuación se muestra una fotografía del Observatorio de Arecibo, parte del centro de investigación del Centro Nacional de Astronomía e Ionosfera, ubicado en Puerto Rico. Este observatorio es operado por la Universidad de Cornell, de Estados Unidos de América, y la Fundación Nacional de Ciencias del mismo país. Es un lugar muy importante para el estudio de la radioastronomía, astronomía planetaria y estudios atmosféricos. El radiotelescopio que lo forma es el más grande del mundo y está suspendido sobre una antena de 305 m de diámetro por un entramado de cables de acero.



En la imagen se ha trazado el triángulo  $GHF$ , donde  $\overline{FI}$  representa su altura.  $\overline{FH}$  y  $\overline{FG}$  representan cables de acero que sujetan el radiotelescopio. Se quiere conocer la medida de  $\overline{IH}$  y  $\overline{FI}$ . Ubica con respecto al ángulo  $\beta$ , el cateto adyacente, el cateto opuesto y la hipotenusa.

a) ¿Qué razón trigonométrica puede ayudarles a determinar el valor del cateto opuesto al ángulo  $\beta$ ? \_\_\_\_\_

b) Hagan las operaciones necesarias y determinen el valor de  $x$ ,  $y$  y de  $y$ . Escriban una explicación detallada de su procedimiento. \_\_\_\_\_

© Nueva México





3. Con la ayuda de su profesor, contesten en el cuaderno.

- a) ¿Con una misma razón trigonométrica se pueden conocer los valores de  $x$  y  $y$ ? ¿Por qué?  
 b) Analicen el razonamiento de Jacinto, quien afirma que primero se debe determinar el valor de  $x$  o de  $y$ . Es decir, que se debe obtener un valor y después otro.

- i. Debido a que tengo dos valores conocidos, el ángulo  $\beta$  y la medida de la hipotenusa, puedo usar la razón seno para encontrar el valor de  $x$ :

$$\text{Sen}(24.74) = \frac{x}{274.36}$$

- ii. Aplico las reglas de la cancelación de términos y multiplico por 274.36 en ambos lados de la igualdad:

$$(274.36)(\text{sen}(24.74)) = \frac{(274.36)x}{274.36}$$

$$x = (274.36)(\text{sen}(24.74)), \text{ entonces: } x = 114.81$$

- iii. Para conocer el valor de  $y$ , puedo usar la función coseno:

$$\cos(24.74) = \frac{y}{274.36}$$

$$y = 249.17$$

- iv. Si uso la función tangente, tengo que:  $\tan(24.74) = \frac{114.81}{y}$

$$y = \frac{114.81}{\tan(24.74)}$$

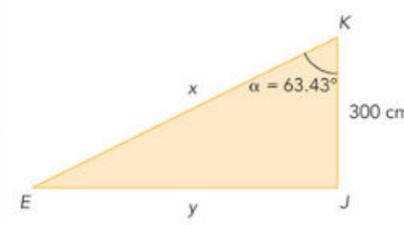
$$y = 249.15$$

- v. Hay un margen de error de dos décimas, pero es posible construir el triángulo con las medidas dadas.

- Comparen su procedimiento con el que se muestra. ¿Sus resultados son iguales a los obtenidos por Jacinto?

4. Revisen su tarea con la dirección de su profesor y mencionen las razones trigonométricas que se pueden utilizar para determinar los valores de  $x$  y  $y$ .





**Realiza lo que se te pide.**

Obtén la medida de la hipotenusa y del cateto opuesto al ángulo  $\alpha$  del triángulo  $EJK$ .

a) Explica qué razón trigonométrica usaste para conocer los valores de  $x$  y  $y$ .

b) Verifica que tu procedimiento sea claro y tus resultados correctos.

© Nueva México

## 2. Razones trigonométricas y teorema de Pitágoras

1. Discutan y respondan en el cuaderno. Justifiquen sus respuestas.

- a) Determinen la medida de los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  del triángulo  $ABC$ . Para ello analicen cuál de las razones trigonométricas les es de utilidad.
- Con respecto al ángulo  $\beta$ , ¿qué datos se conocen?
  - ¿Con los datos anteriores se puede establecer la razón  $\tan(\beta)$ ?
  - Usen su calculadora y obtengan el valor del ángulo  $\beta$ .

- b) ¿Cómo son el seno, coseno y tangente de los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  al compararlos?  
 c) Obtengan la medida de la hipotenusa y calculen el perímetro del triángulo.  
 d) Obtengan la medida de la hipotenusa aplicando el teorema de Pitágoras.

- Validen sus respuestas con ayuda del profesor.

2. Observen el triángulo de la derecha y contesten en el cuaderno.

- a) Aplicando las razones trigonométricas, obtengan la medida de los ángulos  $\varphi$  y  $\phi$  del triángulo  $ABC$ .  
 b) Obtengan la medida del perímetro del triángulo  $ABC$ .

3. Con ayuda de su profesor revisen y justifiquen sus respuestas. Después contesten.

- a) ¿Qué razones trigonométricas utilizaron para determinar la medida del ángulo  $\varphi$  y del ángulo  $\phi$ ? ¿Por qué? \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

- b) Expliquen con qué razón trigonométrica obtuvieron el valor del cateto opuesto al ángulo  $\phi$ . Justifiquen su respuesta. \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

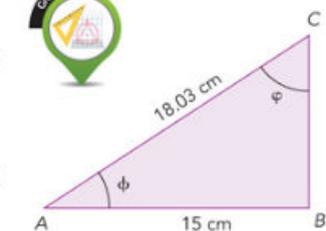
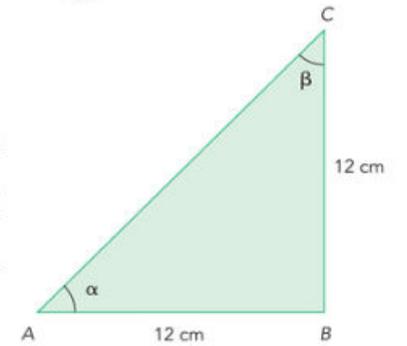
- c) Apliquen el teorema de Pitágoras para calcular la medida del cateto opuesto. \_\_\_\_\_

- d) Expliquen en qué casos las razones trigonométricas son de utilidad para obtener las medidas desconocidas de los lados de un triángulo rectángulo. \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

- Lleguen a consensos con ayuda del profesor.



© Nueva México

Ingresa al sitio <http://www.telesecundaria.sep.gob.mx/> elige "Materiales Educativos Audiovisuales", haz clic en "TERCER GRADO" y después selecciona la opción "Matemáticas III". En la barra derecha escoge "Bloque 4" y busca en la barra de títulos el recurso "Aplicación de las razones trigonométricas", ahí podrás ver el video explicativo para consolidar lo estudiado en la lección. (consulta: 22 de diciembre de 2016, 18:00 horas)

4. Revisen su tarea. Respondan las siguientes preguntas.

- ¿Cómo calcularían el valor del ángulo formado por los lados  $x$  y  $y$ ?  
\_\_\_\_\_
  - ¿Se puede emplear el teorema de Pitágoras para determinar los valores de  $x$  y  $y$ ? \_\_\_\_\_ ¿Por qué? \_\_\_\_\_
- Validen sus respuestas con la ayuda de su profesor.

Haz en el cuaderno lo que se solicita.

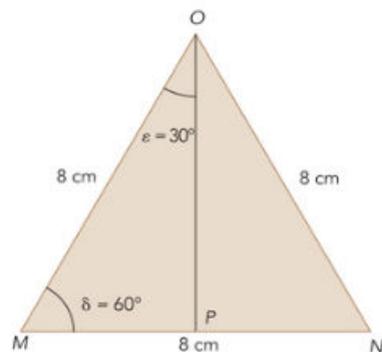
- Traza un triángulo equilátero  $ABC$  cuya medida de sus lados sea de 4 cm. Traza su altura, de manera que se formen dos triángulos rectángulos semejantes. Selecciona uno de ellos e identifica uno de sus ángulos internos distinto al de  $90^\circ$ . Llámalo ángulo  $\varepsilon$ , y a su complemento, ángulo  $\sigma$ .
- Determina la medida de la altura del  $\Delta ABC$ .



3. Relaciones entre seno, coseno y tangente

Comenten sus respuestas a la tarea. Con ayuda del profesor lleguen a consensos. Escriban sus respuestas y conclusiones en el cuaderno.

- ¿Cuál es el seno, coseno y tangente del ángulo  $\varepsilon$ ?
- ¿Cuáles son las razones trigonométricas del ángulo  $\sigma$ ?
- ¿Es cierto que si se aplica el teorema de Pitágoras, la medida de la altura del triángulo es  $\sqrt{12}$ ?
- ¿Es cierto que  $\cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{12}}{4}$ , es lo mismo que  $\frac{(\sqrt{4})(\sqrt{3})}{(2)(2)} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ?
- Analicen el triángulo  $MNO$  y determinen si las razones trigonométricas son correctas o no. Justifiquen su respuesta.



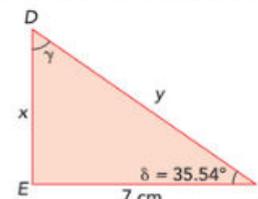
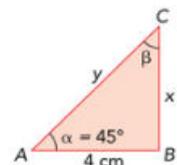
Ángulo	Seno ( $\frac{CO}{H}$ )	Coseno ( $\frac{CA}{H}$ )	Tangente ( $\frac{CO}{CA}$ )
$30^\circ$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$60^\circ$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

- ¿Por qué  $\sin(30^\circ) = \frac{4}{8}$ , y además es equivalente a  $\frac{1}{2}$ ?
- ¿Por qué  $\cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{48}}{8}$ , y es equivalente a  $\frac{\sqrt{4} \sqrt{4} \sqrt{3}}{(2)(2)(2)}$ ?
- Verifiquen que  $\sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{4} \sqrt{4} \sqrt{3}}{(2)(2)(2)}$ .

© Nueva México

Practico

1. Determina la medida de la hipotenusa y cateto opuesto al ángulo dado en los siguientes triángulos.



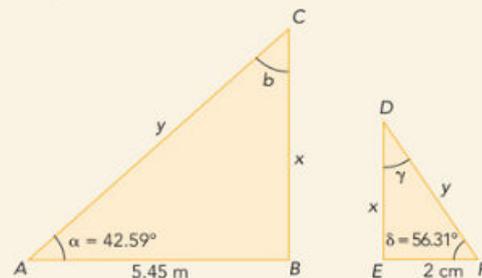
- Con la ayuda de su profesor argumenten y justifiquen sus respuestas. Después lean y analicen la siguiente afirmación. Lleguen a consensos.

Las razones trigonométricas establecen relaciones entre los lados y los ángulos interiores de triángulos rectángulos y ayudan a modelar algunas situaciones reales.

Validemos lo aprendido

1. Analiza y resuelve lo que se solicita. Escribe tus respuestas en el cuaderno.

- En el triángulo rectángulo  $ABC$ , el cateto opuesto al ángulo  $\alpha$  representa la altura de un edificio y el cateto adyacente la longitud de su sombra. ¿Cuál es la altura del edificio?
- Planteen un problema que se resuelva con el triángulo  $EDF$ .



Analiza y resuelve el siguiente problema.

Una compañía cumplió un contrato por seis meses para surtir 1 200 piezas de maquinaria a una fábrica. Las piezas se entregaron de acuerdo con la siguiente tabla.

Mes	1	2	3	4	5	6
Piezas entregadas	200	400	600		1 000	

- Completa la tabla de entregas.
- ¿Cuántas piezas se entregaron en el cuarto mes? ¿Y en el sexto?

© Nueva México

# La razón de cambio en un proceso o fenómeno lineal

Eje: Manejo de la información

Tema: Proporcionalidad y funciones

Contenido: Cálculo y análisis de la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identificación de la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa



## 1. Razón de cambio en una función lineal

### 1. Resuelve los problemas y responde las preguntas.

Bellota es un pequeño robot sujeto a una prueba de movilidad. La siguiente gráfica describe cuánto ha recorrido durante unas horas.



- ¿Cuántos kilómetros ha recorrido en seis horas? \_\_\_\_\_  
 • ¿Y en dos horas?, ¿en una hora? \_\_\_\_\_
- A partir de la gráfica, ¿a qué velocidad se mueve Bellota? \_\_\_\_\_  
 • ¿Cómo hiciste el cálculo de la velocidad? \_\_\_\_\_
- Si utilizas la fórmula que se muestra, ¿qué datos de la siguiente lista usarías para determinar la velocidad? \_\_\_\_\_

Fórmula

$$v = \frac{d}{t}$$

i.  $d = 3 \text{ km}, t = 6 \text{ h}$

ii.  $d = 2 \text{ km}, t = 4 \text{ h}$

iii.  $d = 1 \text{ km}, t = 2 \text{ h}$

iv.  $d = 0.5 \text{ km}, t = 1 \text{ h}$

- Calcula la velocidad con los datos de cada una de las opciones.  
 • Al realizar las operaciones anteriores, ¿qué relación hay entre los resultados obtenidos? \_\_\_\_\_

© Nueva México

- ¿Por qué sucede lo anterior? \_\_\_\_\_
- Entre las dos y seis horas de prueba, ¿qué distancia recorre? \_\_\_\_\_  
 ¿Cómo obtuviste el resultado? \_\_\_\_\_
- Cuando se habla de velocidad, se hace referencia a la relación entre dos parámetros que son: \_\_\_\_\_ y \_\_\_\_\_.

e) La velocidad es la razón entre dos parámetros. Según lo mencionado, señala la o las opciones correctas:

- Es la magnitud del cambio de una variable por el cambio de la otra.
- Es la magnitud del cambio de una variable por unidad de cambio de la otra.
- Es la magnitud por unidad de cambio de una variable por unidad de cambio de la otra.

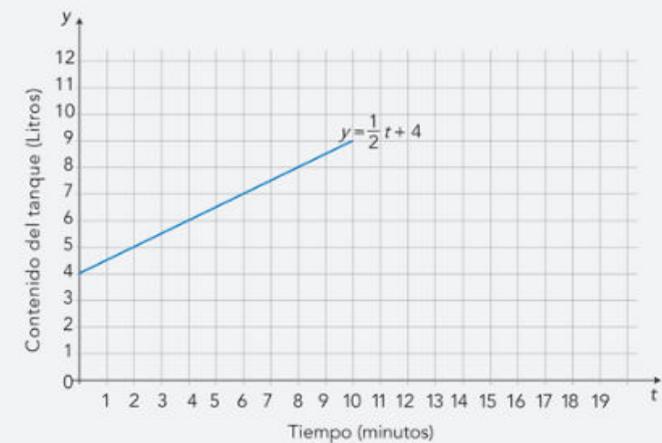
### 2. Analicen y resuelvan el siguiente problema.

En un experimento, un tanque de 15 L, se llena de la manera en que se presenta en la siguiente gráfica y de acuerdo con la ecuación:

$$y = \frac{1}{2}t + 4,$$

donde  $y$  es el contenido en litros y  $t$ , el tiempo en minutos.

#### Llenado de un tanque



- De los miembros de la ecuación, ¿qué significado tiene el término independiente 4, en el contexto del problema? \_\_\_\_\_  
 • ¿Cómo se refleja este valor en la gráfica? \_\_\_\_\_



© Nueva México

- b) ¿Qué significa en el llenado del tanque la cantidad que se observa en el coeficiente del tiempo? \_\_\_\_\_
- c) Siguiendo la velocidad de llenado, ¿a qué hora estará completamente lleno el tanque? \_\_\_\_\_
- d) ¿Cuál es el cambio, en litros, en el llenado del tanque por hora? Si solo tuvieran la gráfica, ¿cómo se aprecia este cambio en ella?

## Razón de cambio

La razón de cambio de una variable con respecto a otra, es la magnitud del cambio de una variable por unidad de cambio de la otra.

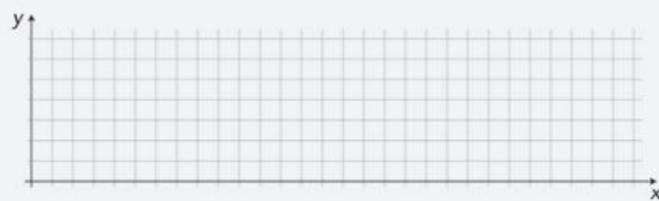


### 3. Analicen la información y resuelvan el problema.

La temperatura de un horno industrial está regulada para subir  $50\text{ }^{\circ}\text{C}$  cada hora, hasta alcanzar los  $900\text{ }^{\circ}\text{C}$ . El horno siempre tiene una temperatura base de  $400\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

- a) Grafiquen la situación planteada en el siguiente plano cartesiano.

Temperatura de un horno industrial



- b) Obtengan la ecuación que define el comportamiento de la temperatura. \_\_\_\_\_
- c) ¿Cuál es la razón de cambio de la temperatura con respecto al tiempo? \_\_\_\_\_
- d) ¿Cuánto tiempo tardará en alcanzar los  $900\text{ }^{\circ}\text{C}$ ? \_\_\_\_\_

■ Comenten los resultados que obtuvieron y analicen sus procedimientos. Con ayuda del profesor, lleguen a acuerdos.

### 4. Revisen la tarea y justifiquen cómo la resolvieron. Después, respondan las preguntas.

- a) ¿Cuántas piezas se entregaron cada mes? \_\_\_\_\_
- b) Con base en los datos de la tabla, determinen la razón de cambio de las piezas entregadas por mes.

© NuevaMéxico



### Realiza en tu cuaderno lo que se solicita.

Cuando un motor industrial se prende, la temperatura sube  $1\text{ }^{\circ}\text{C}$  cada minuto hasta alcanzar su temperatura óptima de trabajo, que es de  $90\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Considera que la temperatura ambiente es de  $22\text{ }^{\circ}\text{C}$  y resuelve.

- a) Elabora una gráfica del comportamiento de la temperatura del motor.
- b) Obtén la ecuación que define el comportamiento de la temperatura.
- c) ¿Cuál es la razón de cambio de la temperatura con respecto al tiempo?
- d) ¿Cuánto tiempo tardará en alcanzar  $90\text{ }^{\circ}\text{C}$ ?

## 2. Razón de cambio y la pendiente I

### 1. Analicen la información y resuelvan los siguientes problemas. Justifiquen sus respuestas.

En la actividad del inciso 2, de la página 203, una forma de encontrar la razón de cambio fue observando cómo variaba el contenido en litros en un minuto.

Para determinarlo a partir de la gráfica, se consideran intervalos como los que se muestran, entonces  $\frac{1\text{L}}{2\text{min}} = \frac{1}{2} \frac{\text{L}}{\text{min}}$ ; así sabemos que en un minuto aumenta  $\frac{1}{2}$  litro.

- a) ¿Se obtiene un resultado diferente si ocupan otros intervalos? Calculen.

• ¿Cuál es la razón de cambio si el intervalo considerado es de dos minutos, por ejemplo, de 6 a 8?

\_\_\_\_\_

• ¿Cuánto se llena en ese intervalo? \_\_\_\_\_

• ¿Y si fuera de tres minutos, por ejemplo de 1 a 4?

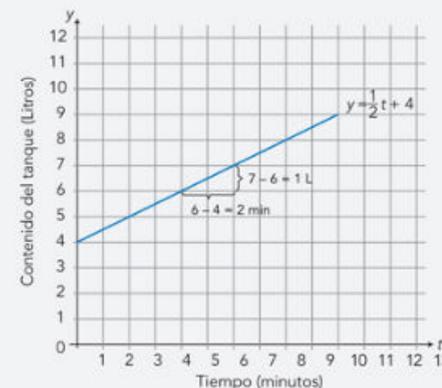
\_\_\_\_\_

Analicen el concepto de pendiente y respondan.

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Razón de cambio en el llenado de un tanque



## Pendiente (m)

La pendiente  $m$  es la razón de cambio de la variación vertical ( $y$ ) entre la variación horizontal ( $x$ ) al considerar dos puntos de una recta:  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$ . La pendiente está dada por la razón:  $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

© NuevaMéxico



TRS

**Educación para la salud.** Analizar la información nutricional que tienen algunos productos es un hábito saludable, ya que te permite saber qué nutrientes contiene, qué otras sustancias y en qué cantidades. Comparar la cantidad de kilocalorías de algunos alimentos ayuda a tomar decisiones que llevan al cuidado del funcionamiento del organismo. Con ayuda de tu profesor, determina el nivel de nutrientes que requieres para tener un desarrollo saludable.

- Al considerar diferentes intervalos, ¿cambia la pendiente de la recta? ¿Varía la razón de cambio? \_\_\_\_\_
- Calculen la pendiente de la recta. \_\_\_\_\_
- ¿Cómo es la pendiente con respecto a la razón de cambio? \_\_\_\_\_
- ¿La pendiente obtenida es la misma que la de la ecuación? \_\_\_\_\_

Un caracol que se encuentra en el fondo de un pozo de 5 m empieza a ascender a las 3:00 p. m. y sale del pozo a las 3:00 a. m. del día siguiente.

- Consideren que el ascenso es constante y encuentren la razón de cambio de su avance con respecto al tiempo.
- Grafiquen en su cuaderno el avance del caracol.
- Encuentren la ecuación que define el avance del caracol.

La imagen muestra parte de una escalera formada por 17 peldaños, cada escalón tiene la medida que se muestra.

- Tracen los primeros escalones sobre un plano cartesiano u hoja cuadrículada y calculen la pendiente de cada escalón. \_\_\_\_\_
  - ¿Cuál es la altura de toda la escalera? \_\_\_\_\_
  - Encuentren el largo total de la escalera. \_\_\_\_\_
  - ¿Cuál es la pendiente total de la escalera? \_\_\_\_\_
- ¿Cómo es la pendiente de cada escalón comparada con la pendiente de toda la escalera? \_\_\_\_\_

**2. Con ayuda de su profesor resuelvan los problemas.**

Leticia comparó las tablas nutricionales de dos jugos: en el primero, cada porción de 100 mL contiene 130 kcal y en el segundo, cada porción de 150 mL contiene 170 kcal.

- A partir de una gráfica, ¿cómo se puede saber cuál de los dos jugos contiene menos kilocalorías por cada 100 mL? \_\_\_\_\_

© Nueva México

Un automóvil avanza 30 km cada media hora, durante tres horas.

- Construyan, en el plano de la izquierda, la gráfica que represente la situación y calculen la razón de cambio.
  - ¿Cuánto avanza en una hora? \_\_\_\_\_
  - ¿A qué velocidad avanza? \_\_\_\_\_

Recorrido de un automóvil



Un cohete experimental es lanzado para probar su comportamiento, en tres etapas. Su comportamiento se muestra en la siguiente gráfica:

- ¿Cuánto tiempo duró la primera etapa? \_\_\_\_\_
  - ¿Cuál es la velocidad inicial y cuál es la final en esta etapa? \_\_\_\_\_
  - Calculen la razón de cambio. \_\_\_\_\_
- Calculen la razón de cambio en las siguientes dos etapas.
  - ¿Cuál de las razones muestra un avance mayor por segundo? \_\_\_\_\_
  - A partir de la pendiente de cada recta, ¿qué permite reconocer cuál de las razones de cambio es mayor? \_\_\_\_\_
- Calculen la **aceleración** del cohete en cada etapa.
  - La primera etapa: \_\_\_\_\_
  - La segunda etapa: \_\_\_\_\_
  - La tercera etapa: \_\_\_\_\_

Traectoria de un cohete



- Deduzcan la fórmula de la aceleración a partir de la razón de cambio. \_\_\_\_\_
- Describan la relación entre el signo de la razón de cambio y la pendiente. \_\_\_\_\_

**Glosario**

**aceleración.** Es la razón de cambio entre la velocidad y el tiempo.

© Nueva México



### Realicen en su cuaderno lo que se solicita.

Un tanque de 12 L se encuentra a la mitad de su capacidad a las 6:00 a.m. y debe estar vacío a las 2:00 p. m., pero solo puede vaciarse exactamente un litro por hora.

- Grafiquen la situación tiempo/capacidad y calculen la pendiente de la recta resultante, según la razón de cambio.
- Encuentren la ecuación de la recta que define el problema.
- ¿Se cumple la meta? ¿A qué hora se encuentra vacío el tanque?

### 3. Razón de cambio y pendiente II

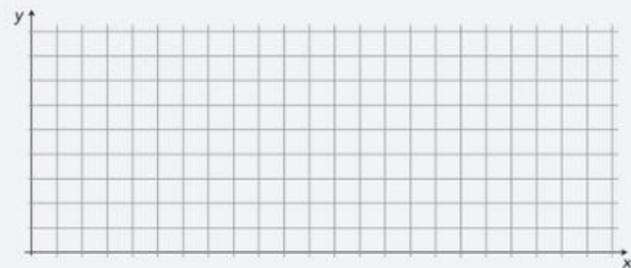
Comparen el resultado de su tarea y, con ayuda de su profesor, respondan las siguientes preguntas.

- ¿En qué difiere la razón de cambio del problema de la tarea con los casos que se han considerado antes?
  - ¿En qué difiere la ecuación de la tarea con las ecuaciones de los casos anteriores?
  - ¿Cómo interpretan el signo de la razón de cambio?
1. Con la ayuda de su profesor, argumenten y justifiquen sus respuestas. Luego respondan las siguientes preguntas.

La temperatura en invierno en una ciudad empieza a bajar en la noche. De las 10:00 p. m. a las 5:00 a. m. del día siguiente, la temperatura baja 12 °C, registrándose una temperatura de 8 °C.

- ¿Qué temperatura se registraba a las 10:00 p. m.?
- Grafiquen el cambio de temperatura y calculen la razón de cambio. Consideren que el descenso fue constante.

#### Cambio de temperatura



- ¿Cómo es la pendiente de la recta? ¿Qué signo tiene?
- Encuentren la ecuación de la recta que describe el comportamiento de la temperatura.
- ¿Qué indica el signo de la pendiente en la gráfica?

© Nueva México

### TIC

Ingresa al sitio: <http://www.telesecundaria.sep.gob.mx/>

elige "Materiales Educativos Audiovisuales", haz clic en "TERCER GRADO" y después selecciona la opción "Matemáticas III". En la barra derecha escoge "Bloque I" y busca en la barra de títulos el recurso "Pendiente y razón de cambio" y "Ejemplos de razones de cambio significativas", ahí podrás ver los videos explicativos para consolidar lo estudiado en la lección.

Ingresa al siguiente sitio y resuelve las actividades que se proponen.

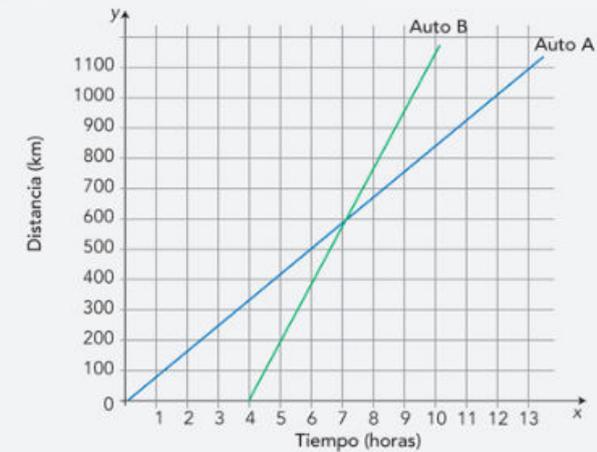
[www.bunam.unam.mx/mat\\_apoyo/MaestrosAlumnos/mApoyo/01/Unidad\\_2/a10u2t02p07.html#1](http://www.bunam.unam.mx/mat_apoyo/MaestrosAlumnos/mApoyo/01/Unidad_2/a10u2t02p07.html#1)

(consulta: 22 de diciembre de 2016, 12:20 horas)

Dos automóviles que van al mismo lugar salen del mismo punto con diferencia de cuatro horas y se encuentran en algún punto de la carretera, como se muestra en la gráfica. Respondan en su cuaderno.

- ¿Cuál es la razón de cambio en cada caso?
- ¿Cuál es la relación entre las razones de cambio y la pendiente o inclinación de las rectas?
- ¿Qué significado tiene que la distancia a las siete horas de viaje del primer automóvil sea la misma que la del segundo?
- A partir de las gráficas, ¿cómo se puede determinar qué automóvil va más rápido?
  - ¿A qué velocidad van los dos automóviles?
  - ¿Cómo determinaron la velocidad?

#### Recorrido de dos automóviles



### Validemos lo aprendido

#### 1. Analiza la información y resuelve.

Los precios de la gasolina Magna durante los primeros cinco meses del 2013 se presentan a continuación:

Mes	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo
Precio	\$10.92	\$11.03	\$11.14	\$11.25	\$11.36

- Encuentra la razón de cambio del precio con respecto al mes.
- Si el incremento es el mismo cada mes, ¿cuál fue el precio de la gasolina Magna en junio de 2013?
  - Si se mantuvo el incremento, ¿qué precio alcanzó en diciembre?
- Grafica el precio de la gasolina Magna con respecto al mes, y proyéctala a diciembre.
- Encuentra la ecuación que define el precio de acuerdo con el mes.

#### Resuelve la siguiente actividad.

El entrenador de un equipo estudiantil de basquetbol quiere comprar uniformes por lo que midió la estatura de sus jugadores y obtuvo los siguientes datos:

1.67 m, 1.70 m, 1.83 m, 1.85 m, 1.77 m,  
1.60 m, 1.80 m, 1.77 m, 1.65 m, 1.62 m

- Si piensa comprar uniformes de una misma talla, ¿qué dato requiere calcular para determinar la talla? Justifica.

© Nueva México

# Dispersión de un conjunto de datos

Eje: Manejo de la información

Tema: Análisis y representación de datos

Contenido: Medición de la dispersión de un conjunto de datos mediante el promedio de las distancias de cada dato a la media (desviación media). Análisis de las diferencias de la "desviación media" con el "rango" como medidas de la dispersión

## 1. Desviación media y rango



Compara tu respuesta de la tarea con tus compañeros y, con ayuda de tu profesor, responde lo que se pide.

Para decidir si se compran uniformes de una sola talla, se requiere saber qué tan cerca están los integrantes del equipo de la estatura promedio.

- Calcula el valor absoluto de la diferencia entre la estatura de cada jugador y la estatura promedio. Anota los resultados en tu cuaderno.
- Ahora, calcula el promedio de esas diferencias.

### Medidas de dispersión

Las medidas de dispersión se indican la variabilidad de los valores de un conjunto de datos. La **desviación media (Dm)** es una medida de dispersión y es el promedio del valor absoluto de la diferencia de cada dato y la media del conjunto de datos.

$$Dm = \frac{|\bar{x} - x_1| + |\bar{x} - x_2| + \dots + |\bar{x} - x_n|}{n}$$

Donde  $\bar{x}$  representa la media del conjunto,  $x_1, x_2, \dots$ , cada uno de los datos y  $n$  el número de datos del conjunto.

- Con base en la información anterior, ¿la desviación media puede servir para tomar la decisión de adquirir los uniformes de una sola talla? Argumenta.

### 1. Resuelvan el siguiente problema.

En la siguiente tabla se presenta el tipo de cambio del dólar frente al peso durante enero de 2013:

Día	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Precio del dólar	12.90	12.76	12.79	12.74	12.73	12.73	12.76	12.80	12.72
Día	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Precio del dólar	12.60	12.64	12.64	12.64	12.60	12.61	12.61	12.58	12.68
Día	19	20	21	22	23	24	25	26	27
Precio del dólar	12.66	12.66	12.69	12.62	12.70	12.63	12.70	12.71	12.71
Día	28	29	30	31					
Precio del dólar	12.77	12.71	12.72	12.69					

© Nueva México

- Calculen el precio medio durante enero. \_\_\_\_\_
  - Calculen la desviación media de los precios en dicho mes. \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 • ¿Qué tan dispersos están los precios respecto al precio promedio del mes? \_\_\_\_\_
- Con la ayuda de su profesor revisen y justifiquen cómo resolvieron las actividades 1 y 2.

### 2. Resuelvan lo siguiente.

De cinco alumnos que participaron en un triatlón académico (competencia que incluye Matemáticas, Español y Ciencias), se debe elegir a dos para una competencia local. Los aciertos de cada estudiante están registrados en la tabla.

	Néstor	Carlo	Alejandro	Emiliano	Emmanuel
Matemáticas	10	5	8	4	6
Español	6	9	5	8	7
Ciencias	5	7	8	9	8

- ¿Cuántos aciertos tuvo en promedio cada alumno? \_\_\_\_\_
- El profesor quiere elegir a dos de los alumnos con el mayor número de aciertos y sugirió a Néstor y a Emiliano.
- ¿Por qué los eligió a ellos? \_\_\_\_\_  
 • Otro profesor sugiere que se debe elegir a dos estudiantes cuyo número de aciertos es más constante.
  - Calculen la desviación media de cada caso para encontrarlos.  
 • Según la desviación media, ¿qué alumnos deben competir: los que presentan mayor número de aciertos en alguna materia o aquellos cuyo número de aciertos fue más constante? \_\_\_\_\_

### Realicen en su cuaderno lo que se solicita.

De la lista de las estaturas de los estudiantes del problema que se dejó en la última tarea:

1.67, 1.70, 1.83, 1.85, 1.77, 1.60, 1.80, 1.77, 1.65, 1.62

- ¿Cuál es la estatura máxima?
- ¿Cuál es la estatura mínima?
- Calcula la diferencia entre la estatura máxima y la estatura mínima.

© Nueva México

## 2. Diferencias de la desviación media con el rango



Con ayuda de su profesor, expongan el resultado de su tarea y respondan las preguntas.

- Comparen la desviación media de las estaturas y el resultado que obtuvieron de la diferencia entre la estatura máxima y la mínima. ¿Cuál es mayor? \_\_\_\_\_
- ¿Esta información puede ayudar a tomar una decisión acerca de la talla de los uniformes? \_\_\_\_\_



### 1. Analicen, discutan y resuelvan los problemas.

En una clase para adultos, las edades de los estudiantes son las siguientes: 56, 53, 42, 54, 28, 64, 41, 58, 32, 45, 59, 30, 21, 38, 54, 47, 55, 52, 37, 45, 60, 29, 39, 40, 28, 33, 53, 54, 43, 39, 40, 53, 34, 63, 63, 43, 27, 33, 41, 37, 24, 38, 35, 48, 27, 48, 20, 35, 23, 45

- Ordenen los datos de menor a mayor y calculen la media.
- Arturo, el coordinador del grupo, decidió agrupar los datos y los ordenó en una tabla como la que se muestra. Complétala.

Edad	Marca de clase ( $x_i$ )	Frecuencia ( $f_i$ )	$ \bar{x} - x_i $	$ \bar{x} - x_i  f_i$
20-29	25	9	$ \_\_\_ - 25  =$	$ \_\_\_ - 25  9 =$
30-39				
40-49				
50-59				
60-69				
Total				

### Glosario

**marca de clase.** Se refiere al promedio del intervalo inferior y superior de cada clase en un conjunto de datos, agrupados por intervalos de clase.

Para calcular la desviación media de datos agrupados, se sigue un procedimiento diferente al anterior. Para calcular el Dm cuando se trabaja con clases, se usa la siguiente fórmula:

$$Dm = \frac{|\bar{x} - x_1| f_1 + |\bar{x} - x_2| f_2 + \dots + |\bar{x} - x_n| f_n}{n}$$

- Calculen la desviación media de los datos agrupados de la tabla.
- Lean la información y contesten.

### Rango

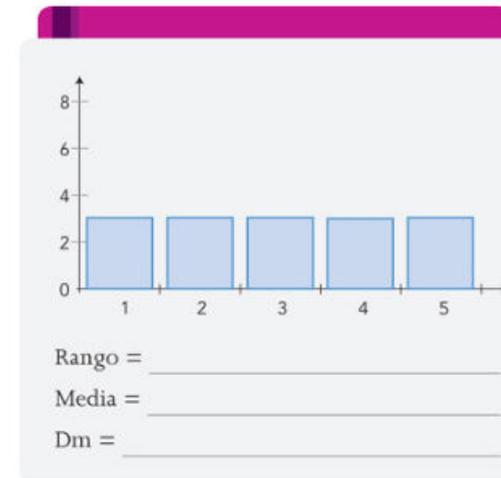
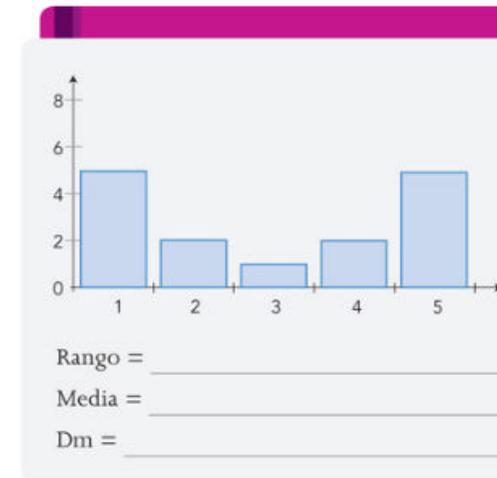
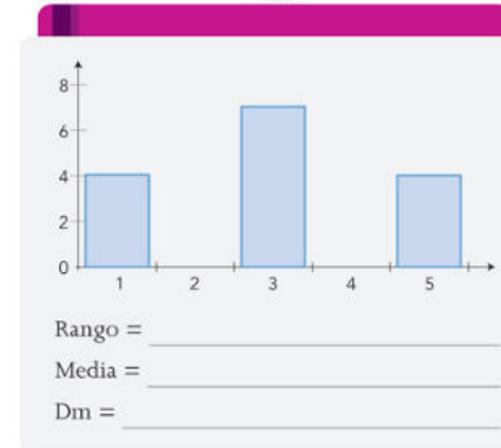
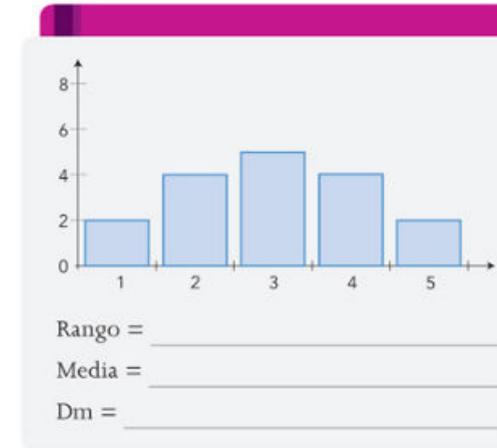
El rango es otra medida de dispersión, y es la diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo de un conjunto de datos. Cuanto mayor es el rango, más dispersos están los datos de un conjunto.

© Nueva México

- Determinen el rango del conjunto de datos. \_\_\_\_\_

- ¿Qué diferencia observan entre el rango y la desviación media? \_\_\_\_\_

### 2. Obtengan en cada caso el rango y la desviación media de los siguientes conjuntos de datos.



- ¿Cómo es el rango en todos los casos? \_\_\_\_\_
- A partir de las gráficas, ¿puedes decir cómo es la desviación media en cada caso? \_\_\_\_\_
- ¿Cómo se relaciona la desviación media con la forma de las gráficas de frecuencia? \_\_\_\_\_

- Validen sus respuestas con ayuda de su profesor.

© Nueva México

## Practica

1. Calcula la desviación media y el rango de las listas de datos. Con ayuda de tu profesor compara tus resultados con el resto del grupo para validarlos.

a) 5, 7, 1, 2 y 4

b) 86      71      72      83      76      90      79      68      83      87  
 89      73      84      84      80      65      71      90      66      85  
 72      86      78      66      78      79      83      67      88      78  
 84      85      87      72      73      68      88      65      72      83



Realiza en tu cuaderno lo que se solicita.

- a) Encuentra el rango de los datos del problema sobre el precio del dólar.
- ¿Cómo es el rango con respecto de la desviación media?
  - ¿Cuál de las dos medidas de dispersión te será más útil si quieres comprar dólares? Justifica tu respuesta.

### 3. Comparando medidas de dispersión



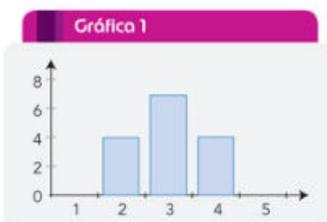
Con ayuda de su profesor, expongan el resultado de su tarea y respondan las siguientes preguntas.

- a) ¿Se pueden tomar las mismas decisiones utilizando el rango que usando la desviación media?
- b) Consideren el caso de los estudiantes del problema 2 de la primera sección y obtengan el rango de las estaturas.
- ¿Se puede tomar la misma decisión sobre la adquisición del uniforme usando el rango o la desviación media?



1. Analicen, discutan y resuelvan los siguientes problemas. Justifiquen sus respuestas.

a) En las siguientes gráficas calculen la media y el rango:



b) ¿En qué gráfica existe más variabilidad en los datos?

■ Con la ayuda de su profesor argumenten y justifiquen sus respuestas.

© Nueva México

2. Resuelvan la siguiente actividad.



El porcentaje de óxido de hierro encontrado en cinco láminas como parte de una muestra de 50 láminas es:

1.37%, 1.55%, 2.33%, 1.24% y 1.98%

- a) Calculen el rango y la desviación media.  
 b) ¿Qué se espera encontrar en las siguientes 50 láminas?

Guadalupe tomó lecturas mensuales en su medidor de luz para calcular lo que tendría que pagar y planificar su consumo:

Mes	Gasto (\$)	Mes	Gasto (\$)
Enero	172	Julio	211
Febrero	169	Agosto	276
Marzo	258	Septiembre	236
Abril	260	Octubre	204
Mayo	161	Noviembre	269
Junio	203	Diciembre	227

- a) Calculen el rango, y la desviación media.
- ¿Existe mucha diferencia entre lo que Guadalupe gasta mensualmente en electricidad durante el año?

## Validemos lo aprendido



1. Lee la información y resuelve.

La siguiente lista presenta el peso en kilogramos de 10 bolsas de arroz:  
 1.01, 1.02, 0.93, 0.95, 1.07, 0.97, 1.08, 1.07, 0.96, 0.99

- a) ¿Cuál es el peso medio de las bolsas de arroz?  
 b) ¿Cómo varía el peso con respecto al kilo que deberían contener las bolsas?  
 c) Encuentra la desviación media y el rango.  
 d) ¿Qué tan dispersa es la muestra en cuanto a pesos?  
 e) ¿Se deben arreglar las máquinas para que la media sea de un kilo?  
 f) ¿Cuánto pierde o gana la compañía al fabricar así su producto?

## TIC



En la siguiente página:  
<https://es.khanacademy.org/math/cc-sixth-grade-math/cc-6th-data-statistics/cc-6-mad/v/mean-absolute-deviation-example>  
 encontrarás un ejemplo de desviación media. (consulta: 22 de diciembre de 2016, 19:20 horas)



© Nueva México

Resuelve el siguiente problema.

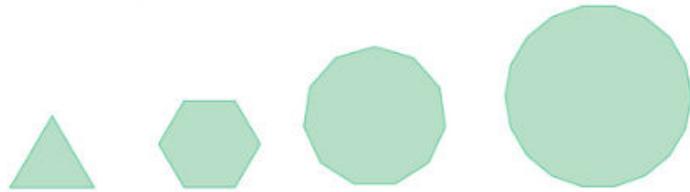
Dada una sucesión, ¿es posible programar una hoja electrónica de cálculo de manera que permita obtener la expresión algebraica que modele dicha sucesión? Justifica tu respuesta.

# Evaluación tipo PISA

## UNIDAD 1: Sucesiones

Un análisis muy común en matemáticas es de las sucesiones en figuras geométricas. Existen sucesiones muy famosas como la de los números triangulares, pentagonales, hexagonales, entre otras, que se encuentran en la Naturaleza.

A continuación se presenta una serie de figuras, en las que la primera tiene tres lados; la segunda, seis; la tercera, 11 y la cuarta tiene 18 lados.



1. Considera la información anterior, analiza los enunciados y determina si son falsos o verdaderos. Coloca una  en la casilla correspondiente.

Enunciado	Falso	Verdadero
Las figuras no forman una sucesión, porque el aumento de los lados no genera un patrón que se repita.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
La siguiente figura de la sucesión debe tener 27 lados.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
La expresión algebraica que modela el enésimo término de la sucesión es cuadrática.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
La figura con 9024 lados forma parte de la serie.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
La expresión algebraica que modela una sucesión cuadrática es de la forma $An^2 + Bn + C$ , por tanto, la expresión que modela la sucesión que modela los lados de los polígonos es de la forma $Bn + C$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

2. ¿Cuál es la expresión general que permite encontrar el enésimo término de la sucesión?

a)  $n^2 + 2$       b)  $2n + 2$       c)  $2n^2 + 2$       d)  $2n^2 + 2n + 2$

3. De la sucesión anterior, determina el número de diagonales de cada figura y genera la sucesión correspondiente.

Número de figura	1	2	3	4
Número de diagonales				

- ¿La sucesión que obtuviste es cuadrática?
- Escribe los procedimientos o argumentos que permitan validar tu resultado.

© Nueva México

## UNIDAD 2: Construcciones

Los ingenieros civiles y arquitectos utilizan diversos instrumentos de medición cuando se encuentran realizando obras, uno de ellos es el teodolito, que sirve principalmente para medir ángulos verticales y horizontales.

Un ingeniero observa la parte más alta de una obra que mide 12 m de altura, su teodolito señala un ángulo de  $23^\circ$  y este instrumento se encuentra a una altura de 1.50 m de altura.



El teodolito, junto con otras herramientas auxiliares, puede medir distancias y desniveles.

1. Considera la siguiente información:  $\sin 23^\circ = 0.3907$ ,  $\cos 23^\circ = 0.9205$ ,  $\tan 23^\circ = 0.4244$  y determina la distancia de la obra a la que se encuentra el ingeniero.

¿A qué distancia de la obra está tomando la lectura de los datos el ingeniero? Escribe los procedimientos que permiten validar tu resultado.

## UNIDAD 3: Gastos

Algunas familias tienen planeados sus gastos para poder administrar su dinero de manera más efectiva, pero en ocasiones ocurren imprevistos que nos hacen gastar algo que no teníamos planeado.

A continuación se presenta el gasto mensual, durante un año, que tuvieron dos familias distintas:

1. Determina el rango y la desviación media de cada conjunto de datos.
2. Escribe los procedimientos que permiten validar tu resultado.
3. Con base en los resultados, explica cómo son los gastos de cada familia.

	Familia A	Familia B
	\$3100.00	\$46200.00
	\$3500.00	\$6300.00
	\$3500.00	\$6500.00
	\$13300.00	\$6800.00
	\$4000.00	\$6200.00
	\$3200.00	\$46200.00
	\$3300.00	\$6300.00
	\$3100.00	\$6200.00
	\$3000.00	\$6100.00
	\$3100.00	\$6000.00
	\$5000.00	\$6500.00
	\$3200.00	\$6200.00

Luego de resolver la evaluación, expongan sus respuestas. Si las tuyas no coinciden con las de tus compañeros, argumenta las estrategias que seguiste. Con ayuda del profesor lleguen a conclusiones.

© Nueva México



Revisen su tarea y compartan con el grupo sus respuestas. Con la ayuda de su profesor lleguen a consensos y respondan las siguientes preguntas.

- ¿Cuál es la expresión general de una sucesión cuadrática?
  - ¿Qué operaciones están involucradas? Escríbanlas según su jerarquía.
- ¿Han considerado el uso de operaciones inversas?
  - Si la respuesta anterior es negativa, ¿es posible utilizar operaciones inversas?
  - Las operaciones que han escrito en los incisos *a* y *b*. ¿Se pueden utilizar en la hoja electrónica de cálculo?

## Programación de la expresión algebraica que modela una sucesión aritmética



- Realicen y resuelvan en una hoja electrónica de cálculo lo que se solicita y argumenten sus respuestas.
  - Escriban en una hoja electrónica de cálculo el texto que se muestra en la figura 1, analícenlo y respondan.

	A	B	C	D
1	<b>Expresión algebraica de una sucesión cuadrática</b>			
2	$An^2 + Bn + C$			
3				
4	<i>n</i> representa la posición del término en la sucesión			
5				

Figura 1

- ¿Qué modela lo que escribieron en la celda A2?
- En la misma hoja electrónica escriban lo que se muestra en la figura 2 y respondan.

Figura 2

	A	B	C	D
1	<b>Expresión algebraica de una sucesión cuadrática</b>			
2	$An^2 + Bn + C$			
3				
4	<i>n</i> representa la posición del término en la sucesión			
5				
6	A			
7	n			
8	^			
9	2			
10	+			
11	B			
12	C			
13				
14	=CONCATENAR(A6,A7,A8,A9,A10,A11,A7,A10,A12)			
15				

- ¿Cómo se relacionan el texto, los números y los operadores que escribieron en las celdas A6 a A12 con respecto a la expresión algebraica de la celda A2?
- ¿Cuál es la expresión que obtuvieron en la celda A14?
- ¿Qué función utilizaron para obtener dicha expresión?
- ¿Es la misma expresión que se muestra en la celda A2?

© NuevaMéxico

- Retomen el método de diferencias que aprendieron en la lección 21 para responder las siguientes preguntas. Para ello analicen y escriban en la hoja electrónica de cálculo lo que se muestra en la figura 3.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	
1	<b>Expresión algebraica de una sucesión cuadrática</b>					<b>Término <i>n</i></b>		1	2	3	4	5	6	7	8	...	<i>n</i>	
2	$An^2 + Bn + C$					<b>Sucesión "<i>a<sub>n</sub></i>"</b>												
3						<b>1a diferencia "<i>b<sub>n</sub></i>"</b>												
4	<i>n</i> representa la posición del término en la sucesión					<b>2a diferencia "<i>r</i>"</b>												
5																		
6	A																	
7	n																	
8	^																	
9	2																	
10	+																	
11	B																	
12	C																	
13																		
14	$An^2 + Bn + C$																	
15																		

Figura 3

- ¿Qué datos escribirían en las celdas H2, I2, J2, K2, L2, etcétera?
- En las celdas F3 y F4 escribieron "1a diferencia "*b<sub>n</sub>*" y "2a diferencia "*r*". ¿Qué significan dichos textos?
- ¿Qué operaciones tendrían que escribir en las celdas I3 y J4 de acuerdo con lo anterior?
- En la celda I3, escriban la operación que representa al texto que escribieron en la celda F3, pulsen *Enter*, ¿qué resultado se obtiene?

Si en una hoja electrónica de cálculo escribes una fórmula que implique realizar operaciones, y estas operaciones hacen referencia a diferentes celdas en donde no se tiene escrito valor numérico, la hoja electrónica lo interpreta como cero.

- Con base en la información anterior, ¿se justifica el resultado que obtuvieron en el inciso *c*?
- Seleccionen la esquina derecha inferior de la celda I3 y deslicen el cursor hasta la celda O3.
    - ¿Qué valor se muestra en las celdas J3, K3, L3, M3, N3 y O3?
  - Den doble clic en la celda J3 ¿qué operación se muestra? Pulsen *Enter* y hagan lo mismo para las otras celdas del punto anterior.
    - ¿Cómo son entre sí las operaciones que se mostraron en dichas celdas con respecto a la que escribieron en la celda I3?
    - ¿Qué las hace diferentes?
- Retomen el punto tres del inciso *c* y escriban en la celda J4 la operación con base en el texto que escribieron en la celda F4.
    - Copien la fórmula que escribieron en la celda J4 en las celdas K4, L4, M4, N4 y O4
  - Comparen los resultados obtenidos en el inciso *c* con la figura 4, y corrijan lo que consideren necesario.

© NuevaMéxico

	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1	<b>Término <i>n</i></b>												
2	<b>Sucesión "<i>a<sub>n</sub></i>"</b>												
3	<b>1a diferencia "<i>b<sub>n</sub></i>"</b>												
4	<b>2a diferencia "<i>r</i>"</b>												
5													
6													

Figura 4

- f) Hasta este momento han obtenido la parte que hará el cálculo de las diferencias. Pero es necesario escribir las funciones con las cuales se calcularán los valores de A, B y C de la expresión algebraica que escribieron en la celda A2;
- Para determinar A, hagan lo que se indica:
    - En la celda F8 escriban  $A = \frac{r}{2}$ .
    - De lo que han escrito en su hoja de cálculo, ¿qué celda o celdas tienen el valor de r?
    - Sombreen la celda G8 en color anaranjado y escriban  $=J4/2$ .
    - ¿Obtendría lo mismo si en lugar de J4, escribieran K4, L4 o M4?
    - ¿Qué relación tiene lo que escribieron en las celdas F8 y G8?
  - Para determinar B, hagan lo que se indica:
    - En la celda F11 escriban  $b_0 = b_1 - r$ .
    - De lo que han escrito en su hoja de cálculo, ¿qué celda o celdas tienen el valor de  $b_1$ ?
    - En la celda G11 escriban  $=I3 - J4$ . ¿Qué relación tiene el resultado que se obtiene con respecto a la 1a diferencia?
    - ¿Qué relación tiene lo que escribieron en la celda F11 y G11?
    - En la celda F12 escriban  $B = b_0 - A$ .
    - De lo que han escrito en su hoja de cálculo, ¿qué celda o celdas tienen el valor de  $b_0$ ?
    - Sombreen la celda G12 en color rojo y escriban  $=G11 - G8$ . ¿Qué relación tiene lo escrito con la celda F12?
  - Para determinar C, hagan lo que se indica:
    - En la celda F15 escriban  $a_0 = a_1 - b_0$ .
    - De lo que han escrito en su hoja de cálculo, ¿qué celda o celdas tienen el valor de  $a_1$ ?
    - En la celda G15 escriban  $=H2 - G11$ . ¿Qué relación tiene lo escrito con la celda F15?
    - En la celda F16 escriban  $C = a_0$ .
    - De lo que han escrito en su hoja de cálculo, ¿qué celda o celdas tienen el valor de  $a_0$ ?
    - Sombreen en color azul la celda G16 y escriban la expresión  $=G15$ . ¿Qué relación tiene lo escrito con la celda F16?
- g) Con base en lo que han realizado en los puntos anteriores pueden obtener la expresión algebraica que modele cualquier sucesión cuadrática. Para ello realicen lo siguiente.
- En la celda B6 escriban  $=SI(J4=K4, G8, "")$ , en la celda B11 escriban  $=SI(J4=K4, G12, "")$  y en la celda B12 escriban  $=SI(J4=K4, G16, "")$
  - En las celdas B7, B8, B9, B10 escriban  $=SI(J4=K4, A7, "")$ ,  $=SI(J4=K4, A8, "")$ ,  $=SI(J4=K4, A9, "")$  y  $=SI(J4=K4, A10, "")$  respectivamente.

- En la celda A17 escriban el texto "La expresión algebraica de la sucesión dada," y, en la celda A18 y A19 escriban:
  - $=SI(J4=K4, CONCATENAR(B6,B7,B8,B9,B10,B11,B7,B10,B12), "NO CORRESPONDE A UNA SUCESIÓN CUADRÁTICA")$
  - $=SI(J4=K4, SI(G8=0, SI(G11=0, SI(B12=0, "NO ES UNA SUCESIÓN", "ES UNA CONSTANTE"), "ES UNA SUCESIÓN DE PRIMER ORDEN"), "ES UNA SUCESIÓN CUADRÁTICA"), "ES UNA SUCESIÓN DE OTRO TIPO")$

- Compartan con el grupo y verifiquen lo que hicieron como se muestra en la figura 5. Si surgen dudas pidan apoyo a su profesor.



La figura 5 muestra las fórmulas solicitadas en los incisos c y d; comparen con lo que ustedes escribieron. Si hubo una mejor forma de escribir las fórmulas, coméntenla con el grupo.

Figura 5

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	
1	Expresión algebraica de una sucesión cuadrática					Término n			1	2	3	4	5	6	7	8	...	n
2	$An^2 + Bn + C$					Sucesión "an"												
3	n representa la posición del término en la sucesión					1a diferencia "bn"			0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4						2a diferencia "r"			0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5																		
6	A	$=SI(J4=K4, G8, "")$																
7	n	$=SI(J4=K4, A7, "")$					Para determinar A de la expresión algebraica de una sucesión cuadrática											
8	^	$=SI(J4=K4, A8, "")$				A=r/2	$=J4/2$											
9	2	$=SI(J4=K4, A9, "")$																
10	+	$=SI(J4=K4, A10, "")$					Para determinar B de la expresión algebraica de una sucesión cuadrática											
11	B	$=SI(J4=K4, G12, "")$				$b_0 = b_1 - r$	$=I3 - J4$											
12	C	$=SI(J4=K4, G16, "")$				$B = b_0 - A$	$=G11 - G8$											
13																		
14	$An^2 + Bn + C$						Para determinar C de la expresión algebraica de una sucesión cuadrática											
15						$a_0 = a_1 - b_0$	$=H2 - G11$											
16						$C = a_0$	$=G15$											
17	La expresión algebraica de la sucesión dada																	
18	$=SI(J4=K4, CONCATENAR(B6,B7,B8,B9,B10,B11,B7,B10,B12), "NO CORRESPONDE A UNA SUCESIÓN CUADRÁTICA")$																	
19	$=SI(J4=K4, SI(G8=0, SI(G11=0, SI(B12=0, "NO ES UNA SUCESIÓN", "ES UNA CONSTANTE"), "ES UNA SUCESIÓN DE PRIMER ORDEN"), "ES UNA SUCESIÓN CUADRÁTICA"), "ES UNA SUCESIÓN DE OTRO TIPO")$																	
20																		
21																		

- De la fórmula escrita en la celda A19, ¿qué significa que  $J4=K4$ ?
  - ¿Qué sucede si estos son diferentes entre sí?
- De la fórmula escrita en la celda A20, ¿qué significa que  $G8 = 0$ ?
  - ¿Qué sucede si G8 es diferente que cero?
- En las celdas H2, I2, J2, K2, y L2 escriban las siguientes sucesiones
 

I. 10, 21, 36, 55, 78	II. 55, 60, 65, 70, 75
III. 8, 8, 8, 8, 8	IV. 1, 2, 4, 8, 16

  - ¿Cuál de los casos anteriores no corresponde a una sucesión cuadrática, lineal, ni constante?
  - ¿Qué sucesión es cuadrática y cuántos términos algebraicos tiene la expresión que la modela?
- Retomen alguna de las sucesiones que resolvieron en la lección 21 y validen sus resultados.
- Planteen expresiones algebraicas que modelen una sucesión lineal, cuadrática o de otro tipo y verifiquen que la hoja de cálculo obtenga la expresión algebraica.



### Blaise Pascal

(Clermont-Ferrand, Francia, 1623-París, 1662)

Matemático, físico y filósofo francés. Desde pequeño mostró destreza para las matemáticas. Su padre lo inició en la geometría y lo llevó a ser parte del círculo de Mersenne, academia a la que él mismo pertenecía. A los dieciséis años, Pascal formuló uno de los teoremas básicos de la geometría proyectiva, el cual describió en su *Ensayo sobre las cónicas*.

Cuando el padre de Pascal fue nombrado comisario del impuesto real, la familia se marchó a vivir a Ruán. En ese lugar, Pascal construyó una máquina de sumar, cuyos principios se utilizarían, tiempo después, para las calculadoras mecánicas.

Pascal se interesó por la hidrostática, realizó experimentos para comprobar la existencia del vacío y en apoyo a la explicación dada por Evangelista Torricelli al funcionamiento del barómetro, demostró que el aumento en la columna de mercurio de este instrumento está determinado por la presión atmosférica.

Pascal también fue contemporáneo de Pierre de Fermat; por la correspondencia entre ellos se conoce que Pascal trabajó en las propiedades del triángulo aritmético que hoy lleva su nombre y genera los coeficientes de los desarrollos de las sucesivas potencias de un binomio; por el tratamiento de dicho triángulo en términos de una geometría del azar es reconocido como fundador del cálculo matemático de probabilidades.

## Bloque

# 5

### Aprendizajes esperados

- Resuelve y plantea problemas que involucren ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones y ecuaciones de segundo grado.
- Resuelve problemas que implican calcular el volumen de cilindros y conos o cualquiera de las variables que intervienen en las fórmulas que se utilicen. Anticipa cómo cambia el volumen al aumentar o disminuir alguna de las dimensiones.
- Lee y representa, gráfica y algebraicamente, relaciones lineales y cuadráticas.
- Resuelve problemas que implican calcular la probabilidad de eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.



El sombrero vietnamita, cuyo nombre es Non La (*Nón Lá* escrito con acentos vietnamitas), cuyo significado en español es "sombrero cónico", es uno de los símbolos de Vietnam.

# Solución de problemas que implican el uso de ecuaciones

Eje: Sentido numérico y pensamiento algebraico

Tema: Patrones y ecuaciones

Contenido: Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones. Formulación de problemas a partir de una ecuación dada

## 1. Ecuaciones lineales



1. Resuelve el siguiente problema. Contesta en tu cuaderno.

Juan tiene una papelería y en su último pedido compró, entre otras cosas, lápices, plumas, marcatextos y sacapuntas.

- En el pedido hay el mismo número de lápices que de plumas. ¿Qué expresión algebraica modela los lápices que hay en el pedido?
- El número de marcatextos es el triple que el de lápices. ¿Qué expresión algebraica modela el número de marcatextos?
- En el pedido hay cinco sacapuntas más que el número de plumas. ¿Qué expresión algebraica modela cuántos sacapuntas hay en el pedido?
- Si se sabe que se solicitaron 150 marcatextos, ¿qué expresión algebraica modela la situación?
- ¿Cuántos lápices, plumas, marcatextos y sacapuntas compró?

■ Describe y comenta tu procedimiento con tus compañeros.

2. Determina la expresión algebraica o enunciado en cada caso.

Enunciado	Ecuación algebraica
	$x + (x + 1) = 3$
El producto de un número por sí mismo es 100.	
	$\frac{x}{2} = 1$
El doble de un número es igual a 72.	
	$x + 5 = 3x - 8$

3. Analicen la siguiente situación y respondan.

Beti es supervisora de calidad en una empresa dedicada a producir botellas de plástico. Fabrican tres botellas de diferentes tamaños: la botella grande tiene el triple de capacidad que la botella chica, y la capacidad de la botella chica es tres litros menor que la botella mediana.

- Si  $x$  representa la capacidad de la botella grande, escriban la expresión algebraica que corresponda a cada botella:
  - Grande: \_\_\_\_\_
  - Chica: \_\_\_\_\_
  - Mediana: \_\_\_\_\_
- Justifiquen por qué las expresiones algebraicas dadas son correctas.

© Nueva México

**TR**

**Educación del consumidor.** De acuerdo con la Profeco, el consumidor tiene **derecho a la seguridad y calidad**. Es decir, los bienes y servicios que se ofrecen en el mercado deben cumplir con las normas y las disposiciones en materia de seguridad y calidad. Además, los instructivos deben incluir las advertencias necesarias y explicar claramente el uso adecuado de los productos.



- Revisen cómo resolvieron las actividades anteriores y, con ayuda de su profesor, respondan en su cuaderno.
  - ¿Qué tipo de expresiones algebraicas representan a las situaciones de las actividades 1 y 2?
    - ¿Cuántos resultados se pueden obtener en cada caso?
  - En la actividad 3,  $x$  es la expresión algebraica que representa la capacidad de la botella grande;  $x + 2$ , la capacidad de la botella mediana y  $x + 3$  es la capacidad de la botella chica.
    - ¿Están de acuerdo con estas expresiones algebraicas? Justifiquen.
    - Si del líquido de la botella grande y la pequeña se obtienen 8 L, ¿cuántos litros le caben a la botella chica?
    - ¿Cuántos litros le caben a la botella grande?
    - ¿Cuántos litros le caben a la botella mediana?



### Analicen y resuelvan el siguiente problema.

Retomen el problema de Beti y consideren que se hacen los siguientes ajustes en la producción de botellas: la botella grande tiene cuatro veces la capacidad de la botella chica, y la capacidad de la botella mediana es la mitad de la grande.

- Si el producto de los litros de la botella grande y la pequeña es de 2.25 L, determinen la capacidad de los tres tipos de botella.



## 2. Ecuaciones cuadráticas

1. Analicen y resuelvan el siguiente problema.

Completen las tablas y escriban la expresión algebraica o el enunciado que falta y determinen el valor o valores de las literales.

Enunciado	Ecuación algebraica
¿Cuál es el número cuyo quintuplo aumentado en seis es igual a su cuadrado?	
La suma de los cuadrados de dos números impares consecutivos es 394. ¿Cuáles son estos números?	
	$(x + 4)^2 = 32$
El triple del cuadrado de un número aumentado en su duplo es 85. ¿Cuál es ese número?	
	$7x^2 = 28$



© Nueva México



2. Analicen el siguiente problema, determinen la ecuación que corresponda y resuélvanlo.

Miguel trabaja para una empresa donde fabrican distintos tipos de cajas de cartón. Cada caja se hace con una hoja de cartón cuadrado o rectangular. Miguel está haciendo cajas de 14 cm de altura y con un volumen de  $4\,536\text{ cm}^3$ , con hojas de cartón cuadradas.

- ¿Qué forma debe tener la base para ocupar el mínimo cartón posible? Justifiquen. \_\_\_\_\_
- ¿Cuáles son las medidas mínimas que puede tener cada hoja? \_\_\_\_\_
- Si  $x$  representa la longitud de cada lado de las hojas de cartón, ¿qué ecuación permite determinar las medidas de la base? \_\_\_\_\_
  - ¿De qué tipo es la ecuación que permite determinar las medidas de la base de las cajas de cartón? \_\_\_\_\_
- Resuelvan la ecuación y determinen las medidas de las cajas. \_\_\_\_\_
- Describan el procedimiento que siguieron para dar solución a la ecuación y encontrar las medidas faltantes de las cajas de cartón.



3. Revisen sus resultados de las actividades 1 y 2 y, con ayuda de su profesor, respondan.

- Consideren los datos de la tabla de la actividad 1.
  - ¿Qué tipo de expresiones algebraicas son? \_\_\_\_\_
  - ¿Cuántos resultados posibles se pueden obtener en cada caso? \_\_\_\_\_
  - ¿Qué tipo de procedimiento es posible seguir para resolverlo? \_\_\_\_\_
- Ahora, consideren el problema de las cajas de cartón.
  - ¿Cuáles son las expresiones algebraicas que representan el lado y el área de la base de las cajas de cartón hechas por Miguel? \_\_\_\_\_
  - Si el área total de la hoja de cartón fuera  $(x + 28)^2$ , ¿qué significado tendría  $(x + 28)$ ? \_\_\_\_\_
  - ¿Por qué el ancho de la base de la caja no se puede representar con la expresión algebraica  $(x - 14)$ ? \_\_\_\_\_
- Miguel elabora las tapas de las cajas, las cuales deben tener 3 cm de altura y un volumen de  $1\,883\text{ cm}^3$ . Si cada tapa se elabora con una hoja de cartón cuadrada, ¿cuáles son las dimensiones de cada tapa de cartón? \_\_\_\_\_

© Nueva México

4. Revisen su tarea y justifiquen cómo resolvieron el problema; con ayuda de su profesor respondan preguntas.

- ¿Qué tipo de expresiones algebraicas obtuvieron? \_\_\_\_\_
- ¿Cuántos resultados posibles se pueden obtener en cada caso? \_\_\_\_\_
- ¿Qué tipo de procedimiento es posible seguir para resolverlo? \_\_\_\_\_

## Practica

1. Resuelvan los siguientes problemas.

Una tabla de 8 m de largo es cortada en dos partes. Una parte es tres metros más larga que la otra.

- ¿Cuál es la longitud de cada pedazo?
- ¿Qué tipo de expresión algebraica se obtiene?
- ¿Cuántos resultados puede adquirir la literal?

Con una hoja de papel rectangular, cuyo largo mide 4 cm más que el ancho, se construye una caja de  $840\text{ cm}^3$ . Esto se logra al cortar un cuadrado de 6 cm de lado en cada esquina de la hoja y doblando los bordes.

- ¿Cuáles son las dimensiones de la caja?
- ¿Qué tipo de expresión algebraica es la que obtuvieron?
- ¿Cuántos resultados posibles puede adquirir la literal?

Con ayuda del profesor compara tus resultados con el resto del grupo para validarlos.

### Realice lo que se solicita.

Plantea dos problemas que puedan ser resueltos mediante un sistema de ecuaciones de  $2 \times 2$ . Después, describe el procedimiento que seguiste para solucionarlos.

## 3. Sistemas de ecuaciones

1. Resuelve lo siguiente.

Justifica si los valores  $x = 2$  y  $y = 7$  son soluciones de los siguientes dos sistemas de ecuaciones.

- $$\begin{cases} -3x + y = 1 \\ 5x - y = 3 \end{cases}$$
- $$\begin{cases} 4x - 1 = y \\ 10x - 2y = 5 \end{cases}$$





2. Realicen lo que se pide y resuelvan en su cuaderno.

Itzel es comerciante y compró \$13 500 en mercancía, al venderla obtuvo una ganancia de \$6 100. A una parte de la mercancía le ganó 36% y a la otra, 46%. Para determinar la cantidad original sobre la que obtuvo cada utilidad, respondan las siguientes preguntas:

- Si  $x$  y  $y$  representan la mercancía que compró Itzel, ¿qué ecuación algebraica representa el costo total de esa mercancía?
- Si  $x$  representa el costo de una parte de la mercancía que compró Itzel, ¿qué expresión algebraica representa 36% de ganancia de esa parte?
- Si  $y$  representa el costo del resto de la mercancía que compró Itzel, ¿qué significa la expresión algebraica  $0.46y$ ? Argumenten por qué costó esto el resto de la mercancía.
- De acuerdo con el problema, ¿qué representa el sistema de ecuaciones:  $x + y = 13500$  y  $0.36x + 0.46y = 6100$ ?
- A partir de las soluciones del sistema de ecuaciones anterior, determinen de qué parte de \$13 500 se obtuvo 36% de ganancia y de cuál se obtuvo 46%.



3. Comparen cómo resolvieron los problemas anteriores y, con ayuda de su profesor, respondan las preguntas.

- Del problema de la actividad 1 describan lo que realizaron para validar las soluciones propuestas.
  - ¿Para qué caso los valores propuestos no se cumplen?
  - ¿Qué procedimiento es conveniente para resolver cada caso?
- Del problema de Itzel, ¿por qué \$5 704 es la ganancia que se obtuvo de una de las partes de la mercancía?
  - ¿Cuál es tu argumento para justificar que \$396.00 es la ganancia que obtuvo Itzel de 36% del resto de la mercancía?
  - Demuestren por qué  $x$  es igual a 1 100 y  $y$  no es igual a 12 000.

4. Revisen su tarea y justifiquen cómo resolvieron el problema; con ayuda de su profesor respondan las preguntas.

- ¿Qué métodos utilizaron para resolver los sistemas de ecuaciones que han planteado? \_\_\_\_\_
- De los siguientes problemas, ¿cuál de ellos se puede resolver recurriendo al método de igualación o sustitución? \_\_\_\_\_  
¿Cuál es la solución en cada caso?
  - Un rectángulo es 6 m más largo que ancho. ¿Cuánto mide de largo y de ancho, si su perímetro es de 72 m? \_\_\_\_\_
  - La diferencia de dos números consecutivos es 1, y su suma es 41. ¿Cuáles son esos números? \_\_\_\_\_

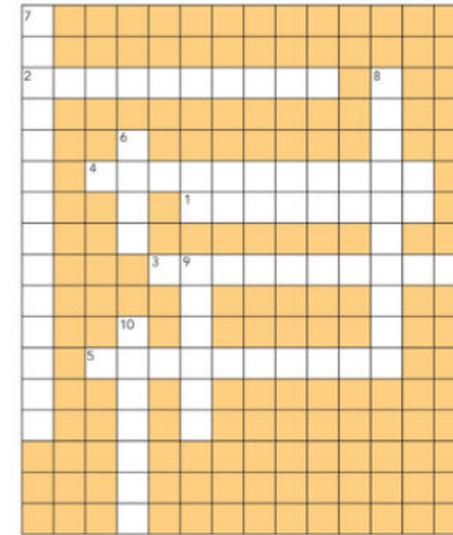
Validemos lo aprendido



1. Resuelve lo que se solicita. Posteriormente, comparte tus respuestas con el resto del grupo y validalas.

- A una clase de Matemáticas asistieron 36 alumnos, de los cuales las mujeres son el triple que los hombres. ¿Cuántos hombres y cuántas mujeres hay?
- El perímetro de un triángulo es de 52 m. Un lado es el doble que el otro, y el tercero es siete unidades mayor que el segundo. ¿Cuánto mide cada lado?
- Si Osiris tuviera el doble de su edad sería 19 años mayor que Antonio, y la suma de las dos edades sería de 41 años. ¿Qué edad tiene cada uno?
- Una persona suelta una piedra desde lo alto de un edificio. Si la piedra cae con una velocidad de 5 m/s y la altura del edificio es de 120 m, ¿cuánto tiempo tarda la piedra en llegar al suelo?

Contesta el siguiente crucigrama.



Horizontales

- Sólido de revolución que se puede generar al trasladar un círculo en dirección perpendicular al plano.
- ¿Qué forma tienen las dos bases de un cilindro?
- Las bases de un cilindro recto cumplen con dos condiciones, una de ellas es:
- La otra condición es:
- Lado del rectángulo opuesto al eje de giro.

Verticales

- Se genera al rotar un triángulo rectángulo sobre uno de sus catetos.
- El desarrollo plano del cono está formado por una cara que es un:
- ¿A qué es igual la medida del radio del sector circular del desarrollo plano de un cono recto?
- Se genera al rotar una semicircunferencia sobre un eje.
- Punto de intersección de la generatriz con el eje del cono.

# Secciones cónicas

Eje: Forma, espacio y medida

Tema: Medida

Contenido: Análisis de las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto. Cálculo de las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto

## 1. Cortes al cilindro



1. Lean el planteamiento, discútanlo y respondan.

La mamá de Carlos preparará un plato con carnes frías y le encargó comprar productos del supermercado. Cuando Carlos pidió jamón, la vendedora tomó una pieza cilíndrica como la que se muestra a la izquierda, y le preguntó cómo quería el corte, si en una pieza o en rebanadas gruesas o delgadas. Carlos observó la pieza y trató de imaginar cómo serían los cortes.



a) Considerando que el jamón tiene forma de cilindro recto, si se le rebana con un corte paralelo a la base, ¿cómo será el contorno de las secciones obtenidas? ¿Cambiará la forma cilíndrica del embutido? Discutan qué características geométricas tendrán las secciones y respondan.

- Si se hacen rebanadas delgadas, ¿estas seguirán teniendo forma cilíndrica? Expliquen. \_\_\_\_\_
- ¿Y si las rebanadas son gruesas, serán cilindros? Expliquen. \_\_\_\_\_

Carlos observó que esos alimentos tienen forma de cilindros rectos así que pensó de cuántas maneras se podrían cortar para obtener diferentes formas.



b) Discutan cuántos y qué cortes diferentes se le pueden hacer al cilindro recto para obtener distintas figuras. Anótenlo en el cuaderno y luego respondan.

- Si Carlos quiere obtener cuerpos como los que se muestran en la imagen que aparece al lado, ¿cómo deberá hacerse el corte? \_\_\_\_\_
- Describan la forma geométrica que tendrán las caras en el cilindro luego del corte. \_\_\_\_\_
- Si se hacen dos cortes diferentes a los cilindros, modificando la inclinación del cuchillo, ¿las caras de las secciones generadas serán iguales entre sí? Expliquen. \_\_\_\_\_

© Nueva México

2. Con plastilina elabora varios cilindros de 10 cm de altura y 5 cm de radio. Haz lo que se solicita y contesta las preguntas. Justifica tus respuestas.



a) Retoma tus notas del inciso b de la página anterior, y usa los cilindros para hacer todos los cortes que mencionaste en ese caso.

- Observa las formas obtenidas. En tu cuaderno, reproduce la siguiente tabla (añade las columnas que necesites) y complétala.

Características de los cuerpos generados al cortar un cilindro recto			
Tipo de corte al cilindro recto			
Forma de las bases			
Características de los cuerpos			
Dibujo de las caras de los cuerpos obtenidos			

b) Los alumnos de tercero de una secundaria hicieron la actividad anterior, pero no registraron con qué tipo de corte se generó cada cuerpo. Completa la tabla describiendo el tipo de corte realizado. Considera si es paralelo, **oblicuo** o perpendicular respecto de la base.

**Glosario**

**oblicuo.** Plano que corta a otro, formando un ángulo que no es recto.

Cuerpos obtenidos			
Corte realizado			

c) Responde las preguntas en el cuaderno.

- ¿Qué tipo de corte debes hacer para generar dos cuerpos sin que se modifique la medida de la altura del cilindro recto?
- ¿Qué tipo de corte debe hacerse para que los cuerpos generados tengan bases no circulares?
- Escribe con qué cortes al cilindro recto los cuerpos obtenidos ya no son cilindros rectos, además, escribe con qué cortes se continúan generando cilindros.

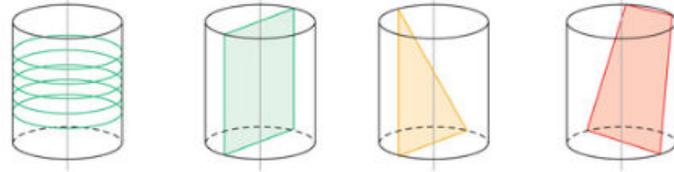
© Nueva México

- Con la guía de su profesor, revisen y justifiquen las respuestas de la tarea, así como de las actividades 1 y 2. Escribe en tu cuaderno tus conclusiones.



3. Respondan las siguientes preguntas.

- Al trasladar continuamente un círculo de forma perpendicular al eje que lo contiene, se genera un cilindro. ¿Qué relación hay entre esto y los cuerpos obtenidos al hacer al cilindro cortes paralelos a su base?  
\_\_\_\_\_
- ¿Por qué al hacer un corte perpendicular a la base del cilindro se generan caras rectangulares? \_\_\_\_\_
- Los siguientes son cortes que pueden hacerse en un cilindro recto. Si en su grupo no se realizó alguno de ellos, háganlo. Integren sus observaciones en la primera tabla que elaboraron en la página 231.



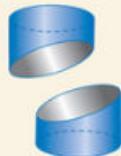
- Describan las diferencias de los cuerpos que se generan al hacer los cuatro cortes. \_\_\_\_\_
- Hagan diversos cortes oblicuos a un cilindro variando la medida del ángulo de inclinación del corte, ¿qué diferencias y semejanzas identifican entre los cuerpos obtenidos? \_\_\_\_\_



4. Compara la siguiente información con lo que escribiste en las actividades anteriores.

### Cortes al cilindro recto

Al hacer un **corte oblicuo** a la base de un cilindro recto, las caras de los cuerpos obtenidos tienen forma de **elipses**.



Al hacer un **corte perpendicular** a la base de un cilindro recto, las caras de los cuerpos obtenidos tienen forma de **rectángulos**.



Al hacer un **corte paralelo** a la base de un cilindro recto, las caras de los cuerpos obtenidos tienen forma de **círculos**.



© Nueva México

- Retomen sus respuestas y, con la guía de su profesor, concluyan acerca de los tipos de corte que se pueden hacer a un cilindro recto, así como las características de cada uno. Escribe en tu cuaderno sus conclusiones.



**Realiza lo siguiente.**

Investiga en revistas especializadas, medios electrónicos o impresos, qué secciones se obtienen al hacer cortes a un cono recto, cómo se denominan y cuáles son sus características. Además, elabora con plastilina tres conos rectos de 10 cm de alto y 12 cm de radio y llévalos a la clase.

## 2. Cortes al cono

Retomen su investigación de la tarea y analicen, discutan y resuelvan las siguientes situaciones. Justifiquen sus respuestas.

- Si a un cono recto se le hacen cortes paralelos a la base, ¿los cuerpos obtenidos seguirán siendo conos? Describan sus características.  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_
  - Recuerden qué ocurrió al hacer al cilindro cortes paralelos a su base. En este caso, si el corte es delgado, ¿el cuerpo obtenido sigue siendo de forma cónica? \_\_\_\_\_
  - ¿Y si el corte es grueso? \_\_\_\_\_
- De acuerdo con sus investigaciones, ¿cuántos cortes diferentes (y cuáles) se le pueden hacer a un cono recto? \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_
  - Al hacer dos cortes distintos, ¿las caras de los cuerpos generados en cada caso son iguales entre sí? Expliquen. \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_
  - Para obtener cuerpos como los que se muestran a la derecha, ¿cómo debe realizarse el corte al cono recto? \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_



1. Tomen los conos que elaboraron de tarea y hagan lo siguiente.

- Hagan en sus conos todos los cortes que indicaron en el inciso b de la actividad anterior.
- En su cuaderno, elaboren una tabla y titúlenla "Características de los cuerpos generados al cortar un cono recto" (tomen como modelo la tabla que completaron en el inciso a de la página 231).

© Nueva México

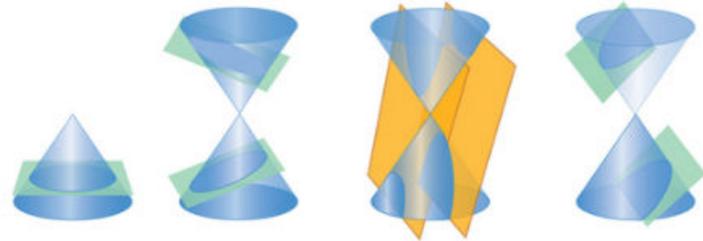
- c) Describan el tipo de corte realizado a cada uno de los siguientes conos rectos, consideren si son cortes paralelos o perpendiculares y respecto de qué punto (la base, la generatriz, el eje, etcétera).

Cuerpos obtenidos				
Corte realizado				



2. Lean y hagan lo que se indica.

- a) Los siguientes son cortes que se pueden hacer en un cono recto. Si nadie experimentó con alguno de ellos, háganlo en grupo e integren sus observaciones en su tabla anterior. Luego, respondan.



- Dado un cono recto cualquiera, si se hace un corte con un plano, ¿qué formas específicas se pueden generar? \_\_\_\_\_
- ¿Con qué corte se generan cuerpos con bases elípticas? \_\_\_\_\_
- ¿Con algún corte se pueden generar cuerpos con bases rectangulares? Expliquen por qué. \_\_\_\_\_

- b) Lean y discutan la siguiente información, contrástenla con sus apuntes y compléntenlos.

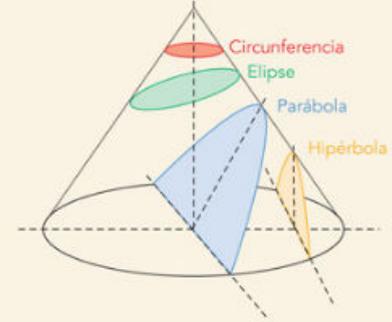
© Nueva México

## Secciones cónicas



Al cortar un cono por un plano, se obtienen las secciones cónicas.

- Si el corte es perpendicular al eje del cono, se forma una sección **circular**.
- Si el corte es oblicuo al eje y además corta a las generatrices de un mismo lado del vértice, se forma una sección llamada **elipse**.
- Si el corte es oblicuo al eje, y además es paralelo a una de las generatrices del cono, se forma una sección llamada **parábola**.
- Si el corte interseca a todas las generatrices en ambos lados del cono, se forma una sección llamada **hipérbola**.



- Si tienen dudas, extérnenlas y resuélvanlas en grupo. Después, con la coordinación de su profesor, muestren la información anterior enriquecida o complementada.

Elaboren con plastilina dos conos rectos con 4 cm de radio y 10 cm de altura. Llámenlos Cono A y Cono B.

- Al cono A, háganle un corte paralelo a la base, a 2 cm de esta.
- Al cono B, realícenle un corte paralelo a la base, a 4 cm de esta.
- Usen instrumentos de medición y determinen la medida del radio de los conos obtenidos al hacer los cortes. Comparen los radios y escriban sus observaciones en su cuaderno.

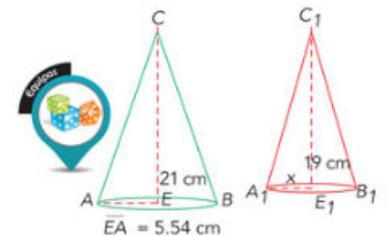
### 3. Cortes paralelos a la base de un cono recto

Retomen su tarea de la sesión anterior y, con la guía de su profesor, respondan lo siguiente.

- Si no tuvieran instrumentos de medición, ¿cómo podrían conocer la medida del radio de los conos generados al hacerles cortes paralelos a sus bases?
- Discutan si hay alguna relación entre la disminución de la altura del cono al hacerle cortes paralelos a su base y la medida del radio del cono generado. Planteen una hipótesis al respecto.
- Socialicen sus hipótesis y registrenlas para verificarlas luego.

1. Lean el planteamiento y respondan.

- Al cono recto verde se le hizo un corte de 2 cm, paralelo a su base, y se obtuvo el cono rojo. Planteen un procedimiento para calcular la medida del radio del cono rojo usando los datos que se presentan y escríbanlo en el cuaderno. Luego, respondan.



- ¿Qué datos de las figuras les sirven para determinar la medida del radio ( $x$ )? Escribanlos. \_\_\_\_\_
- Establezcan una igualdad entre las razones asociadas a los datos para determinar el valor de  $x$ . \_\_\_\_\_
- ¿Por qué la razón entre  $\triangle ACE$  y  $\triangle A_1C_1E_1$  permite determinar el valor de  $x$ ? \_\_\_\_\_
- Determinen la medida del radio del cono resultante luego de hacer los cortes y completen la tabla.

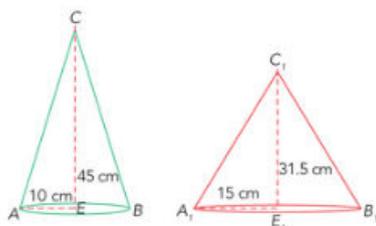
TIC

En la siguiente página encontrarás un programa que muestra las secciones cónicas que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto.  
[www.matematicasvisuales.com/html/geometria/plane\\_nets/cylinderobliq.html](http://www.matematicasvisuales.com/html/geometria/plane_nets/cylinderobliq.html)  
 (consulta: 22 de diciembre de 2016, 12:30 horas)

Corte (cm)	3	4	5	6	8	10
Medida del radio (cm)						
Medida de la altura (cm)						

- ¿Cuánto mide el radio de la base del cono cuando este ha perdido la mitad de su altura? \_\_\_\_\_
- ¿Qué relación identifican entre la variación de la medida de la altura del cono al hacerle cortes paralelos a su base y la medida del radio del círculo formado con el corte? Explíquena. \_\_\_\_\_
- Según la relación anterior, ¿cuál será la medida del radio de la base del cono, si este tiene una altura de 31 cm? \_\_\_\_\_

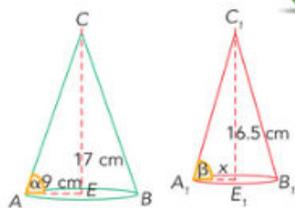
### Practica



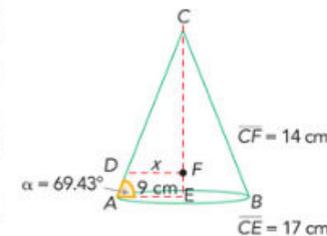
- Haz los cálculos y responde en el cuaderno.
  - Al cono verde se le hacen cortes de 1.5 cm, paralelos a su base. Determina la medida del radio en los primeros 10 cortes.
  - Elabora la gráfica que representa cómo varía la medida del radio de la base al disminuir la medida de la altura.
  - Al cono rojo se le hacen cortes de 1.25 cm. Determina cuántos cortes deben hacerse para que la medida del radio esté entre 9 y 10 cm.

- Con la ayuda de su profesor argumenten y justifiquen sus respuestas de la sección "Practica". Además, resuelvan lo siguiente.

- ¿Cuál es la medida del radio del cono verde cuando este mide la mitad de su altura? \_\_\_\_\_
- Calculen la altura del cono rojo cuando la medida de su radio tiene los siguientes valores.
  - 3.08 cm \_\_\_\_\_
  - 10.8 cm \_\_\_\_\_
  - 9.6 cm \_\_\_\_\_



- Consideren un cono recto, el triángulo rectángulo  $AEC$  representa la medida de su altura, el radio y la generatriz. Al disminuir la altura, por hacer un corte paralelo a la base del cono, se tienen los valores dados.
  - ¿Cuál es el valor del radio ( $x$ )? \_\_\_\_\_
  - ¿Qué procedimientos pueden seguir para obtener el valor de  $x$ ? \_\_\_\_\_
- Comparen sus respuestas con las de sus compañeros y validen los procedimientos que propusieron.
- Revisen sus respuestas en grupo. Después, con la guía de su profesor, comenten cómo se relacionan entre sí los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos a un cono y cómo usaron esa relación para resolver problemas. Escribe tus conclusiones en tu cuaderno.



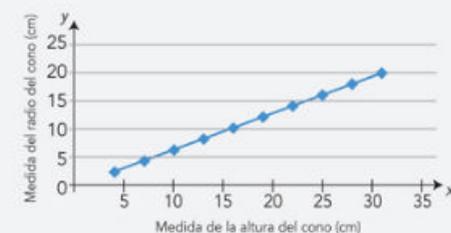
### Validemos lo aprendido

- Analiza y resuelve lo que se solicita. Luego, responde las preguntas.

Con base en la gráfica, determina la medida de la altura del cono recto y de su radio.

- ¿Cuántos cortes paralelos a su base se le hicieron al cono? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es la medida del radio del cono al hacerle un corte de 3 cm paralelo a su base? \_\_\_\_\_

Relación entre la altura y el radio de un cono



### Resuelvan el problema y respondan las preguntas en su cuaderno.

Petrova elabora y vende mermeladas caseras. Está eligiendo envases para su producto y le ofrecen de tres tipos, como se muestra a continuación.



- Petrova asegura que el envase con forma de prisma hexagonal es el que se llena con la menor cantidad de mermelada. ¿Está en lo correcto?
- ¿Los envases tendrán diferente volumen o tendrán el mismo?
- Escribe un procedimiento para obtener la medida del volumen de los tres envases y determinar si todos tienen el mismo volumen o alguno tiene más que los otros.

# Volumen del cono y del cilindro

Eje: Forma, espacio y medida

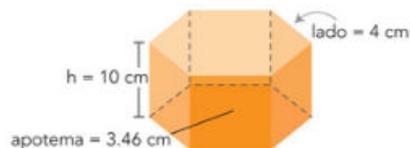
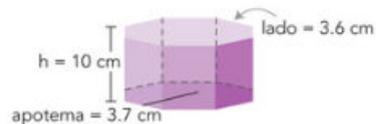
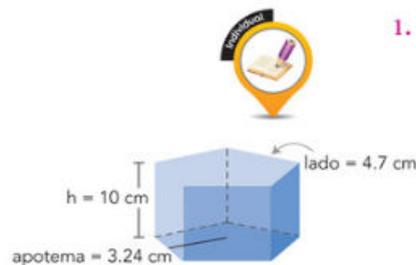
Tema: Medida

Contenido: Construcción de las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos, tomando como referencia las fórmulas de prismas y pirámides

## 1. Fórmula del volumen del cilindro recto

### 1. Analiza los cuerpos y responde.

Adolfo elabora velas aromáticas y, para comercializarlas, propuso nuevos diseños, como los que se muestran a la izquierda.



- ¿Cuál cuerpo geométrico tiene mayor volumen? \_\_\_\_\_
- ¿Para qué tipo de vela se requiere más parafina? \_\_\_\_\_
- ¿Qué tienen en común los diseños y en qué se diferencian? \_\_\_\_\_
- De acuerdo con la forma de sus bases, ¿cómo varía el volumen de los cuerpos? \_\_\_\_\_
- Escribe la fórmula para determinar el volumen de cualquier prisma y explica qué significa cada una de sus literales. \_\_\_\_\_
- Plantea un procedimiento para obtener la medida del volumen de un cilindro recto cualquiera. \_\_\_\_\_
- Con base en lo anterior, escribe una fórmula para calcular el volumen de un cilindro recto. \_\_\_\_\_

### 2. Revisen las respuestas que dieron a la tarea de la sesión anterior y realicen lo siguiente.

Con el procedimiento que propusieron en la actividad anterior, calculen la medida del volumen de los tres frascos de mermelada. Consideren las siguientes medidas:

- Prisma hexagonal: altura 12 cm; **apotema** 5.2 cm y lado 6 cm
- Prisma octogonal: altura 12 cm; apotema 5.5 cm y lado 4.59 cm
- Cilindro: altura 12 cm y medida del radio 6 cm

- Comparen el procedimiento que siguieron para hacer la tarea con el que aplicaron en la actividad 1. Comenten con su profesor qué diferencias encontraron.



### Glosario

**apotema.** Es el segmento de recta que se puede trazar desde el centro de un polígono regular al punto medio de cualquiera de sus lados.

### 3. Analicen los procedimientos de otros alumnos y respondan.

- a) Al plantearles el problema anterior, un equipo de alumnos propuso esta estrategia para calcular el volumen del cilindro recto.

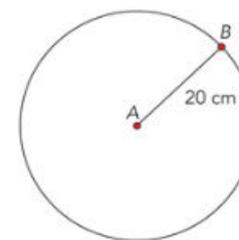
#### Equipo Geómetras

Pensamos en un cilindro como una colección de círculos. Si se calcula el área de cada círculo, se puede multiplicar por la cantidad de círculos que forman al cilindro. Para comprobarlo, conseguimos tortillas y las apilamos hasta tener una torre de 35 cm de alto. Luego, vimos que en 35 cm había 53 tortillas. Multipicamos el área un círculo:  $1256.64 \times 53 = 66601.92 \text{ cm}^3$ , que es el volumen del cilindro.



- ¿Qué piensan de la estrategia empleada por este equipo? \_\_\_\_\_
- ¿Es correcto el resultado obtenido? ¿Ustedes obtuvieron el mismo resultado? \_\_\_\_\_
- ¿Qué preguntas le harías a este equipo sobre su estrategia? \_\_\_\_\_
- ¿Habrá una estrategia para calcular el volumen que sea más eficiente que la empleada por este equipo? \_\_\_\_\_

Área = 1256.64 cm<sup>2</sup>

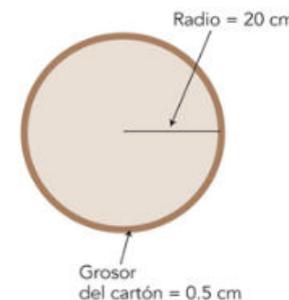


### b) Ahora analicen la estrategia propuesta por otro equipo.

#### Equipo Numéricos

Trazamos sobre cartón un círculo de radio 20 cm, luego, vimos que el cartón mide 0.5 cm de ancho, por lo que 2 círculos = 1 cm, y para tener un cilindro de 35 cm de altura se necesitan, 70 círculos. Multipicamos la medida de la base circular por 70 y dividimos entre 2;  $\frac{70 \times 1256.64}{2} = 43982.4 \text{ cm}^3$ .

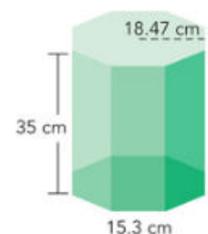
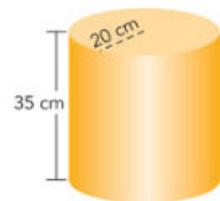
- ¿Por qué piensan que multiplicaron por 70 y luego dividieron, y no multiplicaron directamente por 35? \_\_\_\_\_
- ¿Ustedes obtuvieron el mismo resultado que el equipo de los Numéricos? \_\_\_\_\_
- ¿Qué preguntas le harías a este equipo sobre su estrategia? \_\_\_\_\_



c) Finalmente, analicen esta estrategia.

### Los Pitagóricos

Consideramos el problema completo: se pide calcular el volumen de un prisma octagonal y un cilindro. Primero calculamos el volumen del prisma, y al hacerlo pensamos que hay una relación entre ambos cuerpos. Para obtener el volumen de un prisma, se calcula el área de su base y se multiplica por la altura; entonces calculamos el área de la base del cilindro y la multiplicamos por la altura. De esta manera  $35 \times 1256.64 = 43982.4$



• Analicen ambos cuerpos e identifiquen la relación que existe entre el volumen de estos a la que se refieren los estudiantes. \_\_\_\_\_

• ¿Esta relación entre un cilindro recto y un prisma octagonal se puede generalizar para cualquier prisma, es decir, hay una relación entre un cilindro recto y un prisma cuya base tenga 10, 20, 40, 50 lados? \_\_\_\_\_

• ¿Cuál de las tres estrategias consideran que es más adecuada? ¿Esta estrategia es más confiable? Expliquen por qué. \_\_\_\_\_

• ¿Será importante usar una fórmula que funcione para calcular el volumen de cualquier cilindro recto? Expliquen por qué y qué literales debería tener. \_\_\_\_\_

d) Propongan una fórmula con la cual se pueda calcular el volumen de cualquier cilindro recto. \_\_\_\_\_

4. Con la ayuda de su profesor revisen sus respuestas de las actividades 1, 2 y 3. Discutan estas preguntas en grupo.

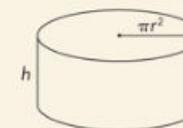
- ¿Qué ventajas o desventajas tiene el procedimiento de los Geómetras? ¿Y el de los Numéricos?
- ¿Qué ventajas o desventajas tiene usar una fórmula para calcular el volumen de un cilindro?
- Expongan las fórmulas que propusieron al final de la actividad 2. Seleccionen alguna en la que todo el grupo esté de acuerdo, anótenla y expliquen el significado de cada literal.
  - Retomen la actividad 1 de la página 238, y respóndanla en grupo.
  - Expliquen la relación que se establece entre un prisma de base poligonal cualquiera y un cilindro recto.



5. Lean y discutan la siguiente información.

### Fórmula para calcular el volumen de un cilindro

Para determinar la medida del **volumen de un cilindro** recto cualquiera, se calcula el producto de la medida del área de la base por la altura; esta relación matemática se expresa:  $V = \pi r^2 h$ , donde  $r$ , es la medida del radio y  $h$  la altura del cilindro.



- Verifiquen si la fórmula anterior sirve para calcular el volumen de:
  - un cilindro recto de radio  $x$ , y altura 12 cm.
  - un cilindro recto de radio 4 cm y altura  $y$ .
  - un cilindro recto de radio  $x$ , y altura  $y$ .
- Escriban las ventajas de contar con una fórmula que se aplique en todos los casos y las limitantes de los procedimientos personales.

Haz lo que se indica y registra tus resultados en el cuaderno.

Con material resistente (cartón, cartulina), construye un cono y un cilindro recto de 12 cm de altura y 6 cm de radio.

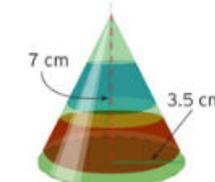
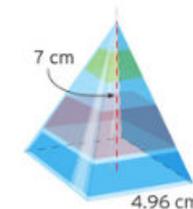
- Llena el cono de algún grano como arroz o lentejas.
- Vierte los granos en el cilindro. ¿Cuántas veces necesitas vaciar el contenido del cono en el cilindro?
- Con base en lo realizado, ¿qué relación puedes establecer entre los volúmenes de estos dos cuerpos geométricos?



## 2. Fórmula del volumen del cono recto

1. Analicen la siguiente situación y respondan en el cuaderno. Justifiquen sus respuestas.

- Adolfo ofrecerá velas como las que se muestran a la derecha.
- ¿Para qué modelo de vela se requiere menor cantidad de cera?
  - Registren las diferencias y semejanzas que hay entre un cono recto y una pirámide.
  - ¿Qué volumen tiene la vela en forma de pirámide?
    - ¿Con qué fórmula se calcula la medida del volumen de una pirámide? Indiquen qué significa cada una de sus literales.
  - Con base en lo anterior, propongan una fórmula para calcular el volumen de la vela cónica. Incluyan el significado de cada una de sus literales.
  - Apliquen su fórmula para calcular el volumen de estos conos:
    - radio  $x$ , altura 5 cm
    - radio 1, altura  $y$
    - radio  $x$ , altura  $y$





- Compartan sus respuestas de la actividad 1, y contesten lo siguiente. Anoten sus respuestas en el cuaderno.
  - ¿Su fórmula es igual a la que establecieron otros equipos?
  - Los significados de las literales, ¿son semejantes o diferentes?
  - ¿Qué desventajas se tienen al usar fórmulas con literales distintas? ¿Es necesario generalizar y usar literales en común acuerdo?
- Con ayuda de su profesor, comenten los resultados de la tarea.
  - ¿Cuántas veces vertieron el contenido del cono en el cilindro?
  - ¿Se puede afirmar que: dados un cono y un cilindro con la misma medida del radio y de la altura, el cilindro tiene el triple de capacidad que el cono?
  - En estas condiciones, ¿también se puede afirmar que el volumen del cono es  $\frac{1}{3}$  del volumen del cilindro recto?
  - Con base en lo realizado, establezcan una fórmula para calcular el volumen del cono: \_\_\_\_\_
  - Discutan la siguiente información.

### Fórmula para calcular el volumen de un cono

Para calcular el **volumen de un cono** regular cualquiera, se obtiene el producto del área de la base por la altura, lo cual se divide entre tres; matemáticamente se escribe:  $V = \frac{1}{3}Bh$ , donde  $B = \pi r^2$ .

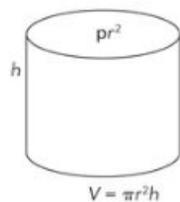
- ¿Por qué el volumen del cono se calcula dividiendo entre tres el producto del área de la base por la altura?
- Registren una conclusión sobre las ventajas de usar esa fórmula al resolver problemas en los que se necesita el volumen de conos.



#### Investiguen lo que se solicita a continuación:

¿Qué relación se establece entre las medidas del volumen de un cono recto y de un cilindro recto, cuando ambos tienen...

- la misma medida de la altura y el mismo radio?
- distinta altura y el mismo radio?
- distinto radio y distinta altura?



### 3. Relación entre el volumen del cono y del cilindro

- Resuelvan y respondan en el cuaderno.
  - Analicen las imágenes de la izquierda y comparen las literales de las fórmulas empleadas para calcular su volumen.
    - ¿Por qué el volumen del cono se calcula dividiendo entre tres el producto del área de la base por la altura?

© NuevaMéxico



- ¿Existe alguna relación entre el volumen de un cilindro y un cono? ¿Qué condiciones deben tener los cuerpos para que esta relación sea válida?

- Argumenten y justifiquen sus respuestas. Escriban sus conclusiones y contrástenlas con la siguiente información.

### Relación del volumen de conos y cilindros

El volumen de un cono es la tercera parte del volumen de un cilindro, siempre y cuando la medida de la altura y la base del cono sean iguales a la medida de la altura y la base del cilindro.

- Complementen sus conclusiones si lo consideran necesario.

- Con ayuda del profesor, revisen los resultados de su tarea.

- ¿Qué condiciones se necesitan para que el volumen de un cilindro recto sea el triple del volumen de un cono recto?
- Escriban sus conclusiones y los acuerdos finales a los que llegaron.

### Validemos lo aprendido

- Resuelve el problema.

Si un cono mide 26 cm de radio y 38 cm de altura y el volumen de este es  $\frac{1}{12}$  parte del volumen de un cilindro recto, ¿cuáles son las medidas del cilindro? Explica.

### Practica

- Analicen y resuelvan el problema; luego, comparen sus resultados en grupo.

¿Qué medidas debe tener un cono recto para que se cumpla la relación que identificaron en la actividad anterior, si un cilindro tiene de altura 17.5 cm y radio  $\sqrt{2.56}$  cm?

#### Resuelve el problema y registra tus resultados en el cuaderno.

Rosaura tiene dos tinacos cilíndricos. Uno es más alto que el otro, pero ambos tienen la misma medida de diámetro: 0.80 m. Un tinaco mide 1.5 m de alto y el otro 1.7 m.

- Calcula la medida del volumen de los tinacos.
- Analiza los resultados obtenidos y revisa si las medidas de los volúmenes tienen alguna relación.

© NuevaMéxico

TIC

Ingresa al sitio:

<http://www.telesecundaria.sep.gob.mx/>

elige "Materiales Educativos Audiovisuales", haz clic en "TERCER GRADO" y después selecciona la opción "Matemáticas III". En la barra derecha escoge "Bloque 5" y busca en la barra de títulos el recurso "Volumen de conos y cilindros", ahí podrás ver el video explicativo para consolidar lo estudiado en la lección.

Entra a:

<http://www.redmagisterial.com/med/6530-comparacion-del-volumen-de-clindro-y-cono/>

y podrás ver el video del volumen del cilindro y el cono.



# Estimación y cálculo del volumen de conos y cilindros rectos

Eje: Forma, espacio y medida

Tema: Medida

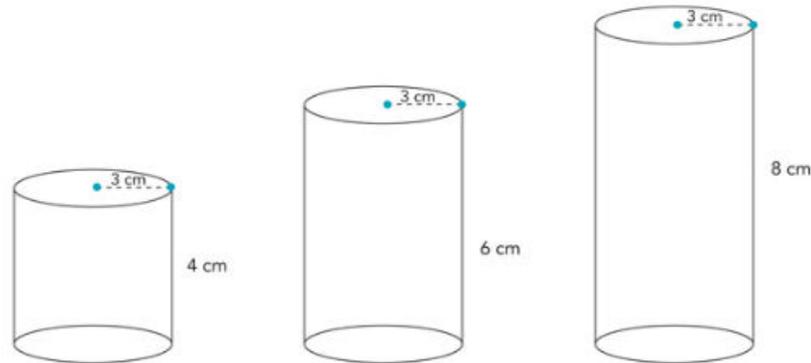
Contenido: Estimación y cálculo del volumen de cilindros y conos o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas

## 1. Volumen de cilindros



1. Analicen y respondan, justifiquen sus respuestas.

Se tienen tres cilindros con los datos que se muestran:



a) Sin hacer operaciones escritas, estimen el volumen de cada uno.

\_\_\_\_\_

b) Supongan que existe un cuarto cilindro con igual radio, pero de 10 cm de altura. Estimen su volumen.

\_\_\_\_\_

c) Ahora calculen el volumen de cada cilindro y comparen sus resultados con sus estimaciones. ¿Se aproximaron sus estimaciones?

\_\_\_\_\_

d) ¿Qué relación pueden establecer entre los volúmenes de los cuatro cilindros?

\_\_\_\_\_

■ Socialicen sus respuestas. Comenten en qué aspectos difieren o concuerdan. Sustenten sus posturas.

© Nueva México

2. Lean los planteamientos, discutan y acuerden sus respuestas. Escriban también sus argumentos.

a) Si se quiere construir una cisterna con capacidad de  $1\,000\text{ m}^3$  y se tiene que calcular y presupuestar el material que se requerirá para ello, ¿qué resulta más conveniente, estimar o calcular la cantidad de material que se requerirá? \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

b) ¿En qué situaciones es útil estimar el resultado en vez de hacer un cálculo exacto? \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

3. Hagan lo que se solicita.

a) Retomen sus respuestas de la tarea de la lección anterior y expliquen cuál es la mejor estimación de cada volumen y por qué.

b) Acuerden qué ventajas tiene estimar la medida del volumen de un cilindro o un cono en comparación con calcular el resultado exacto.



## 2. Cálculo del volumen de cilindros rectos

1. Analicen, discutan y resuelvan cada planteamiento. Justifiquen sus respuestas.

a) En la tabla se presentan las dimensiones de un cilindro que mide 4 cm de radio y cuya altura varía. Calculen el volumen y complétenla.

Radio (cm)	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
Altura (cm)	4.5	5	5.5	6	6.5	23	24	24.5	25	25.5
Volumen (cm <sup>3</sup> )										

• ¿Qué sucede con la medida del volumen si la altura varía y el radio se mantiene fijo? \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

• ¿Qué tipo de relación (de proporcionalidad, lineal o cuadrática) se establece entre los datos anteriores? Expliquen. \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

• ¿Cómo sería la gráfica que representa estos datos? Expliquen. \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

© Nueva México



- b) En la tabla se presentan las dimensiones de un cilindro que mide 8 cm de altura, y cuyo radio varía. Calculen el volumen y complétenla.

Radio (cm)	2.7	3.2	3.7	4.2	4.7	5.2	21.2	21.7	22.2	22.7
Altura (cm)	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
Volumen (cm <sup>3</sup> )										

- ¿Qué sucede con el volumen al mantener fija la altura y variar el radio? \_\_\_\_\_
- ¿Qué tipo de relación (de proporcionalidad, lineal o cuadrática) se establece entre los datos anteriores? Expliquen. \_\_\_\_\_
- ¿Cómo sería la gráfica que representa estos datos? Expliquen. \_\_\_\_\_

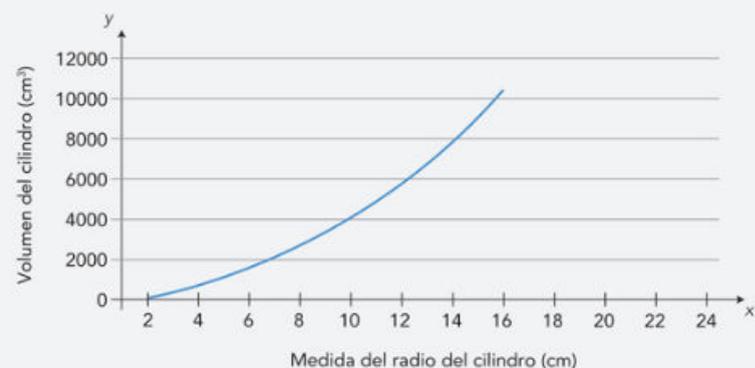
■ Con la ayuda de su profesor, revisen y justifiquen sus respuestas.

2. Resuelvan lo siguiente y respondan.

- a) Las siguientes gráficas representan la variación en el volumen de un cilindro cuando se mantiene fija la medida de su altura o la medida de su radio. Escriban en qué gráfica la medida del radio es fija y en cuál varía.



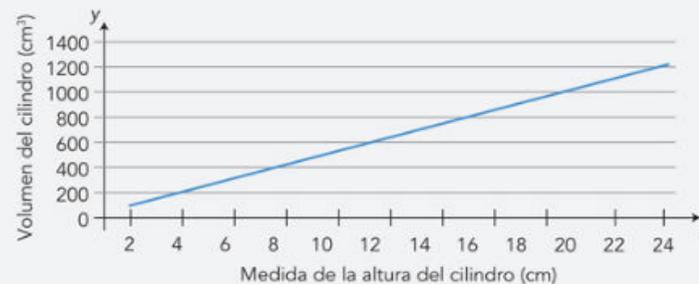
Gráfica A



- Medida fija: \_\_\_\_\_
- Medida que varía: \_\_\_\_\_

© Nueva México

Gráfica B



- Medida fija: \_\_\_\_\_
  - Medida que varía: \_\_\_\_\_
- b) Según los datos de la gráfica A, ¿cuál es la medida de la altura del cilindro? Expliquen cómo llegaron a su respuesta. \_\_\_\_\_
- c) ¿Qué tipo de relación representan los datos de la gráfica A? \_\_\_\_\_
- d) ¿Y los de la gráfica B? \_\_\_\_\_

Haz en tu cuaderno lo que se solicita.

- a) Calcula la medida del radio de un cono recto que mide 17 cm de altura y tiene un volumen de 160.22 cm<sup>3</sup>.
- b) Calcula la medida del radio de un cilindro recto que mide 19 cm de altura y tiene un volumen de 238.76 cm<sup>3</sup>.
- c) Observa los datos, calcula los volúmenes y completa las tablas.

Volumen de un cono									
Radio (cm)	9	9	9	9	9	9	9	9	9
Altura (cm)	4.5	5	5.5	6	6.5	23.5	24	24.5	25
Volumen (cm <sup>3</sup> )									

Volumen de un cilindro									
Radio (cm)	7.5	8	8.5	9	12	14	17.5	21.5	22
Altura (cm)	6.5	6.5	6.5	6.5	6.5	6.5	6.5	6.5	6.5
Volumen (cm <sup>3</sup> )									

- Explica qué sucede con el volumen, al mantener fijo el radio y variar la altura.
- ¿Qué tipo de relación (de proporcionalidad, lineal o cuadrática) se establece entre los datos de la segunda tabla?
- Elabora las gráficas correspondientes a las tablas de datos.



© Nueva México

### 3. Cálculo del volumen de conos rectos



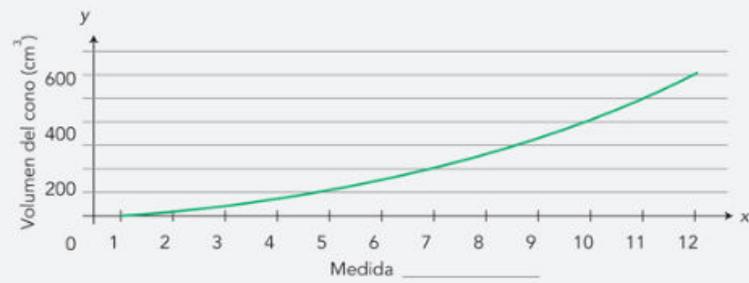
Comenten los resultados de la tarea; con ayuda de su profesor, respondan las preguntas y lleguen a consensos.

- ¿De qué tipo es la gráfica que representa la variación del volumen del cono al modificarse su altura y mantener constante el radio?
- ¿Qué tipo de gráfica representa la variación del volumen del cilindro al modificarse su radio y mantener constante la altura?

1. Analicen, discutan y contesten en el cuaderno.

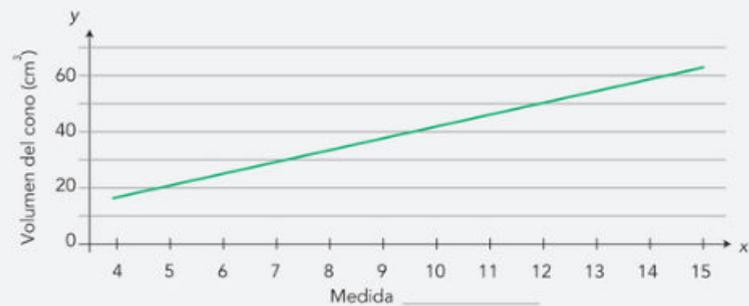
Las siguientes gráficas indican la variación del volumen de dos conos al mantener fija la medida del radio o de la altura. Indiquen a qué caso corresponde cada una.

Gráfica A



- Medida fija: \_\_\_\_\_
- Medida que varía: \_\_\_\_\_

Gráfica B



- Medida fija: \_\_\_\_\_
- Medida que varía: \_\_\_\_\_

- Según los datos de la gráfica A, ¿cuál es la medida de la altura del cono? Expliquen cómo llegaron a su respuesta.
- Según los datos de la gráfica B, ¿cuál es la medida del radio del cono? Expliquen cómo llegaron a su respuesta.
- ¿Qué tipo de relación representan los datos de la gráfica A? ¿Y los de la gráfica B?

© Nueva México

#### TIC

En las siguientes páginas encontrarás mayor información sobre el cálculo de volumen de los cuerpos geométricos.

[www.portalplanetasedna.com.ar/volumenes.htm](http://www.portalplanetasedna.com.ar/volumenes.htm)  
(consulta: 22 de diciembre de 2016, 12:40 horas)

### Practica

1. Haz lo siguiente en tu cuaderno. Cuando concluyas, compara tus resultados con el resto del grupo. Elabora una gráfica en la que se muestre la variación de la medida del radio o la altura de un cono y de un cilindro recto que tienen la misma medida de altura y radio.

2. Con la guía de su profesor, argumenten y justifiquen sus respuestas de la actividad. Expliquen lo siguiente.

- ¿Por qué cuando la medida del radio de un cono o de un cilindro recto se mantiene fija, la gráfica es una recta?
- ¿Por qué cuando la medida de la altura de un cono o de un cilindro recto es fija, la gráfica es una curva?
- Comparen sus descripciones con la siguiente información.

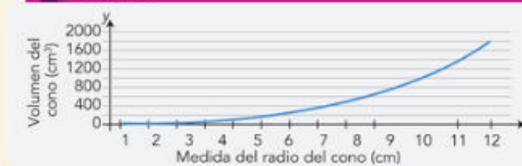
### Volumen de conos y cilindros

Gráfica A



Para cualquier cono o cilindro recto, si la medida de su radio se mantiene fija, se establece una relación de proporcionalidad entre la medida de la altura y la medida de su volumen, como se ve en la gráfica A.

Gráfica B



Para cualquier cono o cilindro recto, si la medida de su altura se mantiene fija, se establece una relación cuadrática entre la medida del radio y la medida de su volumen, como se ve en la gráfica B.

### Validemos lo aprendido

Hagan las siguientes actividades en su cuaderno. Al terminar, comenten sus resultados con sus compañeros.

- Determina la medida del radio de un cilindro recto que mide 13 cm de altura y tiene un volumen de  $653.45 \text{ cm}^3$ .
- Elabora la gráfica del volumen del cilindro cuando se varía su radio y se mantiene fija su altura.

### Analiza y resuelve el problema.

Joshua, Osiris y Alfonsina son tres hermanos de 10, 8 y 5 años, respectivamente. A Joshua le dan \$30 a la semana, y a los demás de manera proporcional a su edad. ¿Cuánto reciben Osiris y Alfonsina? Elabora una tabla con estos datos y sus soluciones.

© Nueva México

# Variación lineal o cuadrática

Eje: Manejo de la información

Tema: Proporcionalidad y funciones

Contenido: Análisis de situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades



## 1. Expresiones algebraicas de fenómenos lineales y cuadráticos

1. Lee el problema y contesta lo que se pide.

Karen leyó en una revista la siguiente receta para cocinar hot cakes para cuatro personas:

- 1 taza de harina
- $\frac{1}{2}$  cucharada de mantequilla
- Un huevo
- $\frac{3}{4}$  de taza de leche

- a) ¿Qué cantidad de cada ingrediente necesita para preparar hot cakes para ocho personas? \_\_\_\_\_
- b) Completa la siguiente tabla que muestra la cantidad de ingredientes que se necesitan para un número variable de personas.

Personas	Harina (tazas)	Mantequilla (cucharadas)	Huevo (piezas)	Leche (tazas)
4	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{4}$
8				
12				
16				

- c) Selecciona cómo es la relación entre la cantidad de harina y el número de personas para quienes se tienen que preparar hot cakes.
- Proporcional inversa
  - Cuadrática
  - ¿Cómo lo sabes? \_\_\_\_\_
  - Proporcional directa
  - Ninguna de las anteriores
- ¿Es la misma relación que hay entre la cantidad, cada uno de los otros ingredientes, y el número de personas? Argumenta tu respuesta. \_\_\_\_\_
- d) Sea  $x$  el número de personas y  $y$  la cantidad de tazas de harina, representa algebraicamente la relación entre  $x$  y  $y$ . Justifica tu respuesta. \_\_\_\_\_

© Nueva México



2. Resuelve el siguiente problema en tu cuaderno. Justifica tus respuestas.

A un resorte que mide 10 cm de largo, se le van agregando pesas de 200 g cada una. Esto hace que aumente su longitud, como se observa en la tabla y en la imagen de la derecha.

Pesas	1	2	3	4
Longitud del resorte (cm)	13	16	19	22

- a) Sea  $x$  el número de pesas y  $y$  la longitud del resorte, representa algebraicamente la relación entre  $x$  y  $y$ .
- b) Grafica la relación que encontraste.
- c) Describe la relación entre el peso y la longitud del resorte y explica por qué.



3. Completen las tablas.

x	y
3	9
4	
5	25
6	
7	
8	64

x	y
1	2
2	8
3	18
4	
5	
6	72

x	y
1	3
2	9
3	
4	33
5	
6	73

- $y =$  \_\_\_\_\_
- $y =$  \_\_\_\_\_
- $y =$  \_\_\_\_\_

- a) Escriban de manera algebraica la relación que existe entre  $x$  y  $y$  en cada caso; luego, tracen las gráficas en su cuaderno y describanlas.
- b) Expliquen la relación entre los valores de  $x$  y  $y$  en cada caso.

4. Revisen las actividades anteriores, comenten estas preguntas y respondanlas en su cuaderno.

- a) De lo que resolvieron en equipos.
- En los conjuntos de valores que aparecen en tablas, ¿cómo se puede determinar si se trata de una relación lineal, si es de proporcionalidad, o si es cuadrática?
  - Al graficarse una relación lineal que se da en una tabla, ¿cómo se determina la expresión algebraica a partir de la gráfica?
  - ¿Cuál es la representación gráfica de una relación cuadrática?
    - i. Una recta
    - ii. Una curva
    - iii. Una circunferencia
  - ¿Cómo se representa una función? (Pueden seleccionar más de una opción).
    - i. \_\_\_ Mediante una expresión algebraica ( $y = mx + b$ ,  $y = ax^2 + bx + c$ )
    - ii. \_\_\_ Mediante una gráfica
    - iii. \_\_\_ Mediante una tabla de valores
    - iv. \_\_\_ Otras. ¿Cuáles?



© Nueva México

- b) De lo que resolvieron en equipos.
- Retomen las preguntas de los dos primeros puntos de esta actividad y respóndanlas para cada problema.



5. Revisen su tarea y respondan en su cuaderno.

- a) ¿Es posible modelar el problema mediante una expresión algebraica lineal o cuadrática? ¿Por qué?
- Si la respuesta anterior fue afirmativa, ¿qué tipo de expresión algebraica sería?
  - En caso contrario, ¿qué tipo de expresión algebraica modela la situación? Justifiquen su respuesta.
- Con la guía de su profesor, argumenten sus respuestas de las actividades anteriores. Comenten cómo hicieron para conocer qué casos correspondían a una variación lineal y cuáles a una variación cuadrática. Escribe en tu cuaderno tus conclusiones.



Resuelve los problemas en tu cuaderno, justifica tus respuestas.

- Joshua le lleva cuatro años a su hermana Bibi.
  - Sea  $x$  la edad de Bibi y  $y$  la edad de Joshua, expresa algebraicamente la relación entre las edades de los hermanos y grafica la relación.
- Construye las tablas correspondientes a las siguientes expresiones algebraicas y después graficalas en un mismo plano cartesiano. Considera al menos cinco valores para cada variable.
 

a) $y = x^2$	b) $y = x^2 + 1$	c) $y = -x^2$
d) $y = 2x^2$	e) $y = x^2 + x + 1$	
- Construye las tablas correspondientes a las siguientes expresiones algebraicas y después graficalas en un mismo plano cartesiano. Considera al menos cinco valores para cada variable.
 

a) $y = x$	b) $y = x + 1$	c) $y = x + 3$
d) $y = 2x$	e) $y = 3x + 1$	

En cada caso define los datos en los que  $x$  y  $y$  toman sus valores.

## 2. Gráficas de variaciones lineales y cuadráticas I

- Resuelvan el problema en su cuaderno. Justifiquen sus respuestas.

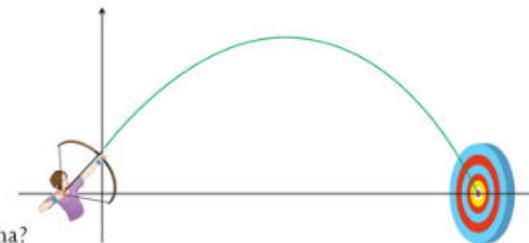
Se sabe que la fórmula para calcular el área de un círculo se define por:

$$A = \pi r^2.$$

- Construyan una tabla en la que se pueda observar cómo cambia el área del círculo al ir variando el radio (consideren cinco valores y describan la relación identificada).
- Grafiquen los valores de la tabla. ¿Qué forma tiene la gráfica?
- ¿Qué tipo de expresión representa el área del círculo? Argumenten su respuesta.

- Analicen, discutan y resuelvan en su cuaderno los siguientes problemas. Justifiquen sus respuestas.

El tiro de una flecha que realiza un arquero sigue la trayectoria que se muestra en la siguiente imagen, y se puede modelar usando la ecuación  $y = 0.05x^2 + 1.5x + 1.3$ , donde  $x$  es la distancia recorrida en metros y  $y$  es la altura, también en metros.



- ¿Qué tipo de relación existe entre la distancia recorrida y la altura del tiro?
  - ¿Qué tan largo fue el tiro?
- Elaboren una tabla en el cuaderno con algunos valores para  $x$  y  $y$ . Utilicen intervalos de 2 m y tracen la gráfica correspondiente.
  - ¿Cuál fue la altura máxima que alcanzó la flecha?

Un tanque de agua se llena con una llave que proporciona 20 litros cada minuto. Al empezar el llenado, el tanque tenía 15 de los 800 litros que puede contener.

- Tracen una gráfica que represente la relación entre el tiempo y la cantidad de agua que contiene el tanque.
- A partir de la gráfica, obtengan la ecuación del tipo  $y = mx + b$  que modela la situación. ¿Cuál es el valor de  $m$ ? ¿Y el de  $b$ ?
  - ¿En cuánto tiempo se llenará el tanque?

Una pelota es arrojada por un desnivel, de tal suerte que baja por el este y sale. Su movimiento está modelado por la ecuación  $y = x^2 - 10x$ .

- Grafiquen la ecuación en su cuaderno.
  - ¿Qué valores de  $x$  sirven para modelar la situación? Definan el intervalo.
  - ¿Qué valores alcanza  $y$ ? Definan el intervalo.
- ¿Qué distancia recorrió la pelota en el desnivel?

- Comenten las actividades anteriores. Después, contesten. Argumenten sus respuestas.

- ¿Qué problemas se modelan mediante una expresión lineal? \_\_\_\_\_
  - ¿Cuáles de ellas tiene dos soluciones? \_\_\_\_\_
- ¿Qué problemas se modelan por medio de una expresión cuadrática? \_\_\_\_\_
  - ¿Cuál tiene dos soluciones? \_\_\_\_\_
  - ¿Cuál tiene una solución? \_\_\_\_\_





#### 4. Resuelvan el siguiente problema.

Joshua lanza hacia arriba una pelota con una velocidad de 30 m/s. El movimiento de esta es definido por la ecuación:  $v = v_1 - gt$ , en la cual  $v_1$  es la velocidad inicial y  $g$ , la aceleración por la gravedad, es igual a  $9.8 \text{ m/s}^2$ .

- Determinen la velocidad que tiene la pelota dos segundos después del lanzamiento. \_\_\_\_\_
- ¿Cuánto tarda la pelota en llegar a su punto más alto, es decir, cuando la velocidad es cero? \_\_\_\_\_
- En su cuaderno, hagan una tabla en la que relacionen el tiempo con la altura y la velocidad de la pelota (debe tener tres columnas). \_\_\_\_\_
- Describan cómo varían la altura y la velocidad con el tiempo. \_\_\_\_\_

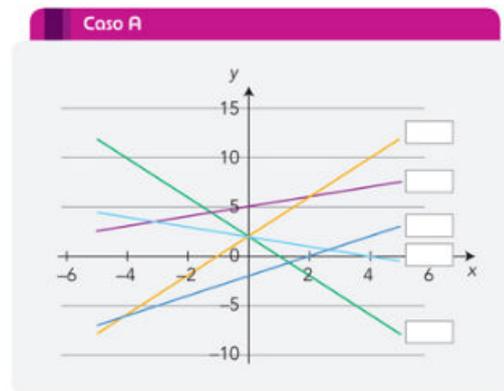
#### 5. Revisen su tarea y respondan en su cuaderno las siguientes preguntas.

- ¿Qué tipo de expresión algebraica modela el problema de las edades?
  - ¿Qué diferencia hay entre la expresión cuadrática que se muestra en la pregunta 2, inciso a y la del inciso c?
  - De las expresiones lineales, ¿en cuáles se muestra una relación de proporcionalidad? ¿Cómo lo saben?
- Retomen las actividades anteriores y, con la guía de su profesor, acuerden las respuestas correctas. Comenten ejemplos de otras situaciones que crean que pueden presentar variación lineal o cuadrática y escribanlas en su cuaderno.



Analiza las gráficas que se muestran e identifica cada una con su expresión algebraica.

- $y = x - 2$
- $y = 2x + 2$
- $y = -2x + 2$
- $y = \frac{1}{2}x + 5$
- $y = -\frac{1}{2}x + 2$

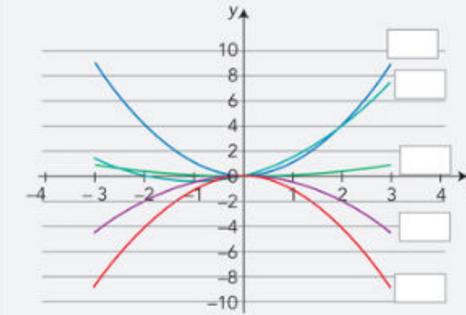


- Elabora en el cuaderno una tabla con cinco valores que toman  $x$  y  $y$  en cada una de las ecuaciones anteriores.

© Nueva México

Caso B

- $y = x^2$
- $y = -x^2$
- $y = \frac{1}{10}x^2$
- $y = -\frac{1}{2}x^2$
- $y = \frac{1}{2}x^2 + x$



- Elabora en el cuaderno una tabla con cinco valores que toman  $x$  y  $y$  en cada una de las ecuaciones anteriores.

### 3. Gráficas de variaciones lineales y cuadráticas II

#### 1. Analiza y resuelve el siguiente problema. Justifica tus respuestas.

Para calcular la dosis de cierta medicina hay que considerar el peso del paciente. Se deben administrar 30 mg por cada 5 kg de peso.

- ¿Cuánta medicina debe tomar un niño que pesa 32 kg? \_\_\_\_\_
- ¿Cuánto se le administrará a un adulto que pesa 65 kg? \_\_\_\_\_
- Elabora en el cuaderno una tabla en la que se consideren otros cinco pesos y su respectiva dosis de medicina y traza la gráfica correspondiente al problema.
- Escribe la ecuación que modela el problema. \_\_\_\_\_

#### 2. Analicen, discutan la siguiente situación y resuélvanla en su cuaderno. Justifiquen sus respuestas.

Al tomar un taxi en la Ciudad de México, se cobra una tarifa inicial por el servicio (banderazo). Julio sube a un taxi, en el que el banderazo es de \$7.04 y cada 45 s se incrementa el costo \$0.86. Julio por lo general necesita 12 min para llegar a su destino. Cuando hay tráfico, la tarifa que suele pagar aumenta. Calculen cómo aumenta la tarifa del taxi si se retrasa debido al tráfico:

- Elaboren una tabla en la que se pueda observar el aumento de la tarifa.
  - Grafiquen los datos que calcularon.
  - Encuentren la ecuación que modela la situación.
- Con la guía de su profesor, comparen sus respuestas. Mencionen qué tipo de variación se presenta en cada caso y argumenten por qué.

© Nueva México

## Practica

- Definan los intervalos para los cuales las siguientes ecuaciones tienen sentido según el problema que se encuentran modelando, sin graficar o elaborar una tabla de valores. Argumenten cada caso.
  - Se lanza una pelota hacia arriba. La expresión que modela la situación es:  $y = 10t - 5t^2$ , donde  $t$  es el tiempo. ¿Cuánto tarda en llegar al suelo la pelota? \_\_\_\_\_
  - El vaciado de un tanque está modelado por la expresión  $y = 750 - 10t$ , donde  $y$  es la cantidad de litros y  $t$  el tiempo dado en minutos.
    - ¿Cuánto tarda en vaciarse el tanque si está lleno? \_\_\_\_\_
  - ¿Tiene sentido la solución si  $y$  es un valor negativo en ambos casos? Argumenta. \_\_\_\_\_
- Respondan.
  - ¿Cuáles de los problemas anteriores se modelan mediante una expresión algebraica lineal? \_\_\_\_\_
    - ¿Cuántas soluciones tienen? ¿Cuáles son? \_\_\_\_\_
    - ¿Las relaciones son de proporcionalidad? ¿Cómo lo saben? \_\_\_\_\_
- Comparen sus respuestas y, con ayuda de su profesor, argumenten sus procedimientos. Si tienen dudas, resuélvanlas en grupo.



### 3. Retomen su tarea y, con la guía del profesor, respondan.

- En una expresión del tipo  $y = mx + b$ , ¿qué pasa cuando  $b$  toma valores positivos? ¿Y cuando toma valores negativos? \_\_\_\_\_
  - ¿Lo anterior se cumple en las expresiones de los incisos  $a$  y  $d$  del caso A? \_\_\_\_\_
- En una expresión del tipo  $y = ax^2$ , ¿qué sucede en la gráfica si el coeficiente del término cuadrático aumenta? \_\_\_\_\_
  - ¿Qué sucede en la gráfica si el coeficiente del término cuadrático disminuye? \_\_\_\_\_
  - ¿Lo anterior se cumple para las expresiones de los incisos  $a$  y  $c$  del caso B? \_\_\_\_\_

© Nueva México

TIC



En los siguientes sitios podrás practicar el contenido de la lección.

[www.thatquiz.org/es-0/matemáticas/algebra/](http://www.thatquiz.org/es-0/matemáticas/algebra/)

(consulta: 22 de diciembre de 2016, 12:50 horas)

- Si se tiene la expresión  $y = ax^2 + bx$ , ¿cómo es la gráfica cuando el coeficiente del término cuadrático toma valores positivos? \_\_\_\_\_
    - ¿Cómo es la gráfica cuando el coeficiente del término cuadrático toma valores negativos? \_\_\_\_\_
    - ¿Lo anterior se cumple para los incisos  $d$  y  $e$  del caso B? \_\_\_\_\_
- Compartan sus respuestas en grupo; después, con la coordinación de su profesor, repasen las situaciones con las que trabajaron en esta lección y redacten un texto sobre lo aprendido.

## Validemos lo aprendido

### 1. Analicen, discutan y resuelvan lo que se solicita.

- Encuentren la relación entre las variables de las siguientes tablas y escriban los datos que faltan. Después, escriban la expresión algebraica correspondiente a cada conjunto de datos.

x	y
0	2.0
1	2.5
2	3.0
3	3.5
4	4.0
5	
6	
7	
8	
9	
10	

$y =$  \_\_\_\_\_

x	y
0	1.0
1	4.5
2	9.0
3	14.5
4	
	28.5
6	
	46.5
8	
	68.5

$y =$  \_\_\_\_\_

x	y
0	0.50
	0.75
	1.50
	2.75
4	
5	
6	
	12.75
8	16.50
9	20.75
10	25.50

$y =$  \_\_\_\_\_

- Grafiquen en el cuaderno las relaciones encontradas.
- Describan qué relación existe en cada uno de los conjuntos de datos, y si la expresión algebraica obtenida es lineal o cuadrática y por qué.

### Realiza en tu cuaderno lo que se solicita.

- Investiga qué características debe tener un juego de azar para que sea justo para todos los participantes.
- Al lanzar tres monedas:
  - ¿Cuál es la probabilidad de que caigan tres soles?
  - ¿Cuál es la probabilidad de que caiga al menos un águila?



# Condiciones para que un juego de azar sea justo

**Eje:** Manejo de la información  
**Tema:** Nociones de probabilidad  
**Contenido:** Análisis de las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables

## 1. Juegos justos e injustos

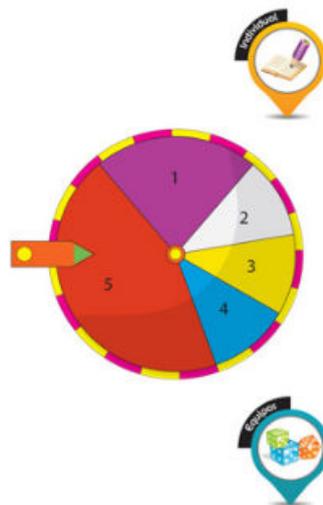
1. Resuelve en tu cuaderno el siguiente problema.

Observa la ruleta de la izquierda. Para jugar, debes seleccionar un número y girarla. Al detenerse, la flecha señalará el número ganador.

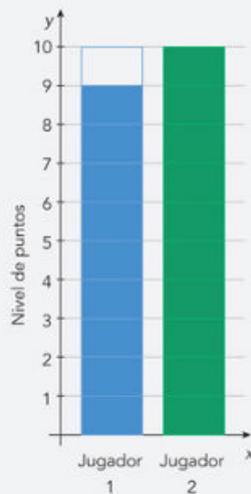
- ¿Tienes las mismas posibilidades de ganar si eliges cualquier número? ¿Por qué?
- ¿Qué número elegirías para ganar?
- ¿Qué números tienen la misma probabilidad de ser señalados?
- ¿Este juego es justo? Argumenta.
- Dadas las condiciones del juego, ¿cuál es la mejor estrategia para ganarlo?

2. Consigan un dado, realicen el siguiente juego, y contesten, en su cuaderno.

- Antes de jugar respondan:
  - ¿Los dos jugadores tienen las mismas posibilidades de ganar?
  - Si se uniera un tercer jugador, ¿tendría las mismas oportunidades que los demás?
  - ¿Qué jugador tiene más posibilidades de ganar?
  - ¿Qué jugador tiene más posibilidades de quedar en segundo lugar?
  - ¿Es este un juego justo?
- Después de jugar dos personas:
  - ¿Se cumplieron sus predicciones?
  - ¿Qué jugador ganó?
  - Dadas las condiciones del juego, ¿cuál es la mejor estrategia para ganarlo?
  - ¿Cuáles son los elementos que consideraron en su primer análisis del juego?
  - ¿Si vuelven a jugar, se obtendrá el mismo resultado?
- Ahora, jueguen hasta alcanzar los 100 puntos.
  - ¿Se siguen cumpliendo las predicciones iniciales?
  - ¿La cantidad de tiros cambió la situación de los jugadores? Si es así, ¿de qué manera lo hizo?
  - ¿Es un juego justo o injusto cuando se considera alcanzar los 100 puntos?



Gráfica de lanzamiento de dados



© Nueva México



BAE

Busca en la serie Libros del Rincón, en la colección Espejo de Urania, la obra ¡Sal si puedes! Laberintos y rompecabezas matemáticos, de Charles Snape y Heather Scott. En la página 40 encontrarás el juego "Laberinto de probabilidades". Juégallo con tus compañeros y comenten en clase sus experiencias. Necesitarán una moneda y fichas de colores. Al final, argumenten si se trata de un juego justo o no.



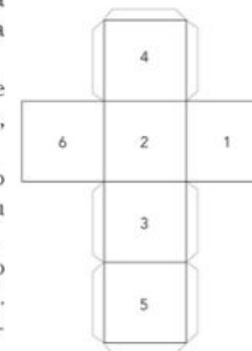
- Revisen y justifiquen sus respuestas a las actividades anteriores. Después, respondan las siguientes preguntas en su cuaderno.
  - ¿Cuáles son las condiciones que hacen que un juego sea justo?
  - ¿Qué condiciones deben darse para que el juego de la ruleta sea un juego justo?
  - ¿Qué condiciones deben darse para que el juego del dado sea un juego justo?
- Revisen su tarea y validen sus respuestas. Al terminar, contesten en su cuaderno. Argumenten sus respuestas.
  - Escriban el espacio muestral de lanzar tres monedas.
  - ¿Cuántos son los posibles resultados?
  - ¿Todos los resultados posibles tienen la misma probabilidad de salir? ¿Por qué?

■ Revisen en grupo sus respuestas de las actividades anteriores; después, con la guía de su profesor, definan qué es un juego justo y qué lo caracteriza.

### Realiza en tu casa lo que se solicita.

Traza y recorta en cartulina tres desarrollos planos, como el que se muestra, para armar dados cúbicos con 4 cm de arista.

- El primer dado, será el dado "justo".
- En el segundo dado, el "sesgado 1", pega un botón pequeño en la parte de atrás de la cara con el número 2, justo en el centro.
- En el tercer dado, el "sesgado 2", detrás de la cara con el número 6 y justo en el centro, pega un botón pequeño.
- Realiza algunos lanzamientos con cada uno de los dados y registra los resultados en tu cuaderno utilizando una gráfica de barras.
- Investiga qué características tiene un "dado sesgado" y también busca "dado cargado".
- Lleva un dado tradicional junto con tus dados a la siguiente clase.



## 2. Equiprobabilidad

Revisen su tarea. Con ayuda de su profesor respondan las siguientes preguntas.

- ¿Qué efecto tiene el botón en los dados? \_\_\_\_\_
- ¿Qué es un dado cargado? \_\_\_\_\_
- Escriban con sus palabras qué entienden por "equiprobabilidad".  
 \_\_\_\_\_



© Nueva México



### TR5

**Prevención de la violencia escolar.** Al trabajar en equipos, escuchar las opiniones e ideas de todos los integrantes, valorar los puntos de vista y llegar a acuerdos son acciones de prevención de la violencia escolar. Cuando tus compañeros tengan dificultades, no te burles; mejor apóyalos y ayúdalos a resolver sus dudas. Trabajando en equipo lograrán el éxito en sus tareas.

Suma	Frecuencia
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	

1. En la tabla siguiente escriban las sumas que se obtienen al tirar dos dados "justos". Después respondan y justifiquen sus respuestas.

+	1	2	3	4	5	6
1	2					
2						
3						
4						
5						
6						12

- ¿Cuál es el espacio muestra de tirar dos dados? \_\_\_\_\_
- ¿Cuántas combinaciones forman el espacio muestral? \_\_\_\_\_
- ¿Qué suma tiene más posibilidades de salir? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es la probabilidad de que al tirar los dos dados la suma sea 5? \_\_\_\_\_
- ¿Qué combinaciones tienen la misma probabilidad de ocurrir? \_\_\_\_\_
- Con dos dados tradicionales, realicen 40 lanzamientos y registren en la tabla de la izquierda los resultados.
  - ¿Qué combinación es la que aparece con más frecuencia? \_\_\_\_\_
  - ¿Qué resultados son los que están de acuerdo con el análisis que hicieron en el inciso c? \_\_\_\_\_
  - Si se aumenta el número de tiros, ¿cómo cambiará la frecuencia de cada resultado? \_\_\_\_\_

2. Analicen el problema, realicen el experimento que se pide y respondan en su cuaderno. Justifiquen sus respuestas.

Primero, hagan 40 lanzamientos con un dado tradicional y con el dado justo que fabricaron. Después, con el mismo dado tradicional y el dado sesgado 1, realicen otros 40 lanzamientos, y al final otros 40 con el dado tradicional y el sesgado 2. Antes de hacer los lanzamientos, hagan una tabla como la de la página siguiente, con la suma del 2 al 12, para registrar sus resultados. Realicen una predicción sobre los resultados que esperan obtener y escribanla. Luego, complétenla con los resultados observados y respondan las preguntas.

© Nueva México

### Frecuencia (dado tradicional y...

Suma	Frecuencia (dado tradicional y...		
	dado justo) Predicción Observado	dado sesgado 1) Predicción Observado	dado sesgado 2) Predicción Observado
2			
3			

- ¿Existen coincidencias entre lo predicho y lo observado al lanzar los dados? Señálenlas en la tabla.
  - ¿Por qué piensan que se dieron estas coincidencias?
- ¿Existen coincidencias entre los datos de las tres columnas de la tabla? ¿Por qué consideran que ocurre esto?
  - ¿Qué pasaría si hicieran más lanzamientos?
- En la primera columna, ¿coinciden las frecuencias observadas con las obtenidas en la actividad anterior?
- A partir de los resultados obtenidos, ¿se puede percibir el efecto del botón en los dados sesgados? Expliquen cómo se manifiesta en cada caso.
- Si se usara el dado sesgado 1 en el juego de la página 258, ¿sería un juego justo? Explica por qué.

3. Lean la información y compárenla con lo que escribieron en el inciso c, al final de la página 259.



### Equiprobabilidad

Dos **eventos** posibles de un experimento son **equiprobables** cuando tienen la misma probabilidad de ocurrencia.

- Discutan cuáles de los resultados de las actividades anteriores son equiprobables.

### Practica

1. Analicen y resuelvan el siguiente problema en su cuaderno. Una vez que concluyan, comparen sus resultados en grupo.

Érik, Joshua y Bibi realizaron juntos un trabajo escolar; debido a la calidad del trabajo, su maestro les dará un punto adicional, que se repartirán entre los tres. Joshua, Bibi y Érik llegaron a un acuerdo y el punto extra que dará el profesor se lo quedará solo uno de ellos, por lo que decidieron competir por él en el juego "Carrera a 10".

El juego consiste en colocar fichas en un tablero con el nombre de cada uno y casillas del 1 al 10. Se lanzan dos dados y se observa el resultado:

- Si los dos números son pares, la ficha de Bibi avanza una casilla.
- Si los dos números son impares, la ficha de Érik avanza una casilla.
- Si un número es par y el otro impar, la ficha de Joshua avanza una casilla.
- El primero en llegar a la casilla 10 será el ganador.

© Nueva México



# Evaluación tipo PISA

## UNIDAD 1: Preparativos para la fiesta

En una fiesta se suele ofrecer a los invitados distintas cosas, como botanas, comida o refrescos, etc. Los anfitriones hacen cálculos de lo que requieren para hacer las compras, tomando en cuenta el rendimiento y el número de invitados, entre otras cosas.

Matías tenía en su refrigerador dos botellas de refresco, de distinta capacidad (grande y mediano) y al repartirlos entre sus invitados pudo llenar 16 vasos. Después, mandó comprar un paquete con ocho refrescos grandes y otro con tres medianos, con los que llenó 108 vasos.

1. Considera que los vasos tienen una capacidad de 250 mL. ¿Qué procedimiento permite determinar la capacidad de los envases de refresco?
  - a) Se utiliza la fórmula general de las ecuaciones de segundo grado.
  - b) Se utiliza una ecuación de la forma  $ax + b = cx + d$ .
  - c) Se utiliza un sistema de ecuaciones  $2 \times 2$ .
  - d) Ninguna de las anteriores.

## UNIDAD 2: Reciclando

Existen muchos materiales que en ocasiones pueden ser considerados como basura, pero de los cuales se pueden obtener cosas muy útiles y con un sentido estético. Hoy día existen muchas páginas de Internet y guías para transformar muchos objetos de desecho en objetos prácticos o agradables a la vista.



Gabriela decidió decorar algunos tubos de papel de baño, como el que se muestra, para la fiesta de su hijo, los cuales quiere llenar con amaranto.

1. Analiza los enunciados y marca con una  en la casilla de falso o verdadero según consideres.

Toma en cuenta los siguientes valores:  $\pi = 3.1416$ , diámetro del cilindro = 4.4 cm; altura del cilindro = 9.5 cm y que 100 g de amaranto ocupan un volumen de 144.38 cm<sup>3</sup>.

Enunciado	Falso	Verdadero
Para calcular el volumen del cilindro se sigue la siguiente fórmula: $\pi dh$ donde $d$ es el diámetro y $h$ , la altura del cilindro.		
El área del círculo de la base de cada tubo es de 15.1976 cm <sup>2</sup> .		
Con 1 kg de amaranto puede llenar 15 cilindros.		
Con 2 kg de amaranto se pueden llenar 20 cilindros.		

© Nueva México

## UNIDAD 3: Movimientos que se modelan con funciones

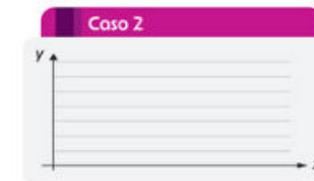
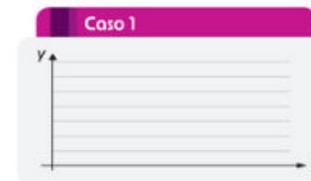
La ciencia explica que todo se encuentra en movimiento, hasta una piedra que parece estática, tiene átomos cuyos electrones se mueven. Algunos movimientos se pueden graficar con la finalidad de analizar los datos y tomar decisiones sobre los resultados del análisis.

1. A continuación se muestran dos situaciones:

Situación 1	Situación 2
Un corredor establece un ritmo de entrenamiento de 10 km/h, a una velocidad constante. Determina el tiempo en el que se encontrará a 235 m, 408 m, 607 m y 2 km del inicio de su entrenamiento.	Un paracaidista se deja caer desde un avión. Supón que no tiene resistencia y determina la distancia que recorrerá a los 2, 3, 8 y 12 segundos. Toma en cuenta la fórmula $d = \frac{gt^2}{2}$ y que $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

Situación 1: \_\_\_\_\_ Situación 2: \_\_\_\_\_

2. Realiza la gráfica correspondiente a cada caso, compáralas y determina qué tipo de ecuaciones representan.



## UNIDAD 4: Juegos de azar

En ocasiones suelen encontrarse juegos en los que no se sabe con seguridad qué es lo que pasará, y por tal razón se desconoce el resultado de los mismos. Algunas personas recurren a un análisis matemático para tomar decisiones en torno a ellos.

- En una urna A se tiene tres fichas con un premio de \$200, cuatro fichas con \$300 y dos fichas con \$500 de premio.
  - En la urna B se tienen dos fichas sin premio, una ficha con \$400 y dos fichas con \$600.
1. Al sacar una ficha de la urna A y una ficha de la urna B, ¿cuál es la probabilidad de que la suma de los premios sea \$500? Argumenta. \_\_\_\_\_
  2. En el juego de los "volados", una persona obtuvo águila. ¿Cuál es su probabilidad de obtener sol en el siguiente lanzamiento? Argumenta. \_\_\_\_\_

Luego de resolver la evaluación, expongan sus respuestas. Si las tuyas no coinciden con las de tus compañeros, argumenta las estrategias que seguiste. Con ayuda del profesor lleguen a conclusiones.

© Nueva México



Revisen su tarea y compartan con el grupo sus respuestas; con la ayuda de su profesor lleguen a consensos, además respondan las siguientes preguntas.

- a) En las funciones, ¿qué interpretación tienen en la gráfica las expresiones cuando  $0 \leq x \leq 1$  y cuando  $0 \leq x \leq 10$ ?
  - ¿En los intervalos, qué significa el uso de los signos mayor o igual que, y menor o igual que? ¿Es posible ampliarlos?
  - ¿Las gráficas que obtuvieron fueron lineales, curvas o de otro tipo?

## Funciones cuadráticas en una hoja electrónica de cálculo



1. Realicen y resuelvan lo que se solicita, argumenten sus respuestas.

En los proyectos de los bloques anteriores utilizaron la hoja electrónica de cálculo, en ella graficaron funciones lineales, escribieron y obtuvieron ecuaciones cuadráticas. Ahora graficarán funciones cuadráticas.

- a) Retomen la función  $y = x^2$  y en una hoja electrónica hagan lo siguiente:
  - i. En las dos columnas que se muestran en la figura 1 escriban las variables,  $x$  y  $y$ .

	A	B
1		
2	x	y = x*x
3	0	0
4		
5		

Figura 1

- Escriban el valor 0 en la celda A3 para el primer valor de  $x$  y en la celda B3 escriban la expresión de acuerdo con la función para obtener el primer valor de  $y$ . Apóyense en la figura 1.
- ¿Qué literal representa la variable independiente? ¿Cuál la dependiente?

- ii. ¿Cómo se relaciona la expresión que escribieron en la celda B3 con la función  $y = x^2$ ?
  - ¿Es posible escribir de otra manera la fórmula y obtener la misma relación?
- iii. En la celda A4, escriban  $=A3+1$  y den Enter. Para generar los valores de  $x$ , seleccionen la celda A4 y arrastren el cursor hasta obtener el número 10. Apóyense en la figura 2. Luego, seleccionen la celda B3 y arrastren el cursor para obtener los valores de  $y$ , correspondientes a los valores de  $x$ .

	A	B
1		
2	x	y = x*x
3	0	0
4	1	
5	2	
6	3	
7	4	
8	5	
9	6	
10	7	
11	8	
12		

Figura 2

- iv. Seleccionen la tabla (títulos y resultados), y con el ratón elijan el menú principal "Insertar", luego la "gráfica de dispersión o xy".

En este punto se te presentan varias opciones, seleccionen cada una de ellas para evaluar la opción que les parezca más adecuada.

- ¿Cuándo un tipo de gráfica es más adecuada que otra? Discútanlo en clase con su profesor.
- ¿En este caso la opción que mejor se ajusta es la de *Dispersión* con líneas suavizadas y marcadores?

- v. Describan la gráfica que se genera:
  - ¿Es una línea o es una curva? ¿Va creciendo o decreciendo?
  - ¿Qué intervalo de valores se alcanzan en el eje de las ordenadas?
- vi. Amplíen el intervalo de  $-10$  a  $10$  para la variable independiente. Para ello escriban en la celda A3, el número  $-10$  y pulsen Enter.
  - ¿Qué sucede con los valores de  $x$ ? ¿y con los de  $y$ ?
  - Seleccionen con el ratón la esquina inferior derecha de la celda A13 y deslícenla hasta obtener el número 10.
  - Hagan lo mismo para obtener los valores de la variable dependiente.
- vii. Den clic sobre la gráfica. Seleccionen el punto medio inferior de las dos columnas sombreadas y deslicen el ratón hasta sombrear las celdas A23 y B23.
  - Describan la gráfica que se ha generado. ¿En qué intervalo se encuentran los valores alcanzados en el eje de las ordenadas?
  - ¿En las abscisas y en las ordenadas, en qué intervalos decrece la función?
  - ¿En las abscisas y en las ordenadas, en qué intervalos crece la función?
  - ¿Cuál es el punto de inflexión, es decir, el punto de cambio, donde deja de decrecer y empieza a crecer la función?

- b) En una hoja electrónica de cálculo grafiquen la función  $y = ax^2 + bx + c$ , consideren el intervalo  $-10$  a  $10$ .

Para ello escriban en la hoja lo que se muestra en la figura 3.

- i. En la celda A6 escriban el valor mínimo que hay que considerar para el eje de las abscisas, y en la celda B6 las operaciones correspondientes para aplicar la función y obtener el primer valor del eje de las ordenadas.
- ii. Describan la fórmula escrita en B6 en términos de las celdas a las que se hace referencia. ¿Es importante escribir el signo de pesos (\$) en la fórmula escrita? ¿Por qué?
- iii. Construyan la tabla de valores y generen la gráfica.

	A	B
1	a =	1
2	b =	1
3	c =	1
4		
5	x	y = a*x*x + b*x + c
6	-10	91
7		

Figura 3

- iv. ¿La gráfica pertenece a la función  $x^2 + x + 1$ ?
  - ¿Cómo cambia la gráfica si  $a = -1$ ?
  - Si  $a = 0$ , ¿sigue siendo cuadrática?, ¿qué tipo de función es?
- v. Si  $b = -1$ , ¿cómo cambia la gráfica?, ¿y la tabla de valores? ¿Qué función es?
- vi. Si  $b = 0$ , y  $a = 1$  ¿cómo cambia la tabla de valores y la gráfica? Escriban la nueva función.
- vii. Consideren  $b = 0$ , y  $a = 1$ ; con  $c = 10$  y luego con  $c = -10$ .
  - Cuando cambias los valores de  $c$ , ¿qué le pasa a la gráfica?



2. Compartan con el grupo sus resultados y con la ayuda de su profesor lleguen a conclusiones, además respondan las preguntas.

- ¿La función  $y = x^2$  es un caso particular de la función  $y = ax^2 + bx + c$ ?
- ¿La gráfica cambia si los coeficientes  $a$  y  $b$  tienen valores decimales?
- Den un ejemplo de una función cuadrática en el que todos sus valores sean positivos.
  - Den un ejemplo de una función cuadrática en donde todos sus valores sean negativos.
- Cuando una función cuadrática cruza el eje de las abscisas:
  - ¿Lo hace una sola vez? ¿Lo puede hacer tres veces?

Una manera de definir la circunferencia es mediante una ecuación de segundo grado con dos variables. En esta sección tendrán la oportunidad de construir una circunferencia de radio 1 aplicando la ecuación cuadrática  $x^2 + y^2 = 1$ .

- Primero analicen el comportamiento de la ecuación, cuando  $y = 0$ , es decir, al sustituir  $y = 0$  en la ecuación cuadrática obtienen  $x^2 = 1$ .
  - ¿La igualdad anterior se cumple cuando  $x = -1$  y cuando  $x = 1$ ?
    - ¿Las coordenadas  $(1, 0)$  y  $(-1, 0)$  están relacionadas con los valores de  $x$  que obtuvieron al proponer  $y = 0$ ?
    - ¿Las dos coordenadas están sobre el eje de las abscisas?
    - Si trazan en el plano cartesiano una circunferencia con radio 1 y centro en el origen, ¿las coordenadas  $(1, 0)$  y  $(-1, 0)$  pertenecen a la circunferencia?
    - Cuando sustituyen los valores de  $x = 1$  y  $x = -1$  en la ecuación  $x^2 + y^2 = 1$ , tienen que  $y = 0$ ; para obtener los demás valores despejen la variable  $y$ .
    - La ecuación queda como  $y = \sqrt{1 - x^2}$ .
    - ¿Por qué los valores que toma  $x$  se encuentran en el intervalo  $(-1, 1)$ ?
  - Abran una hoja electrónica de cálculo y realicen lo siguiente:
    - Para la tabla de valores de  $x$ , el primer valor de  $x$  es  $-1$  para el siguiente sumen 0.1 y así sucesivamente.
    - Para encontrar los valores de  $y$  con respecto a  $x$ , utilicen la ecuación del punto cinco del inciso i.
  - Comparen lo que han realizado con lo que se muestra en la figura 4, corrijan lo que consideren necesario.

	A	B	C
1			
2			
3	x	y = RAIZ(1 - x*x)	-y
4	-1	0	0.00
5	-0.9	0.44	-0.44
6	-0.8	0.60	
7	-0.7		
8	-0.6		

Figura 4

- Recordemos que al calcular la raíz cuadrada de un número se obtienen dos valores, uno positivo y uno negativo. Por ejemplo, la raíz cuadrada de 9 es 3, pero también  $-3$ . En la hoja electrónica solo se presenta el valor positivo que genera la raíz cuadrada de un número.

	A	B	C
1			
2			
3	x	y = RAIZ(1 - x*x)	-y
4	-1	0	0.00
5	-0.9	0.44	-0.44
6	-0.8	0.60	
7	-0.7	0.71	

Figura 5

- Para los valores negativos agreguen otra columna y hagan referencia a las celdas donde se encuentran los valores de  $y$ , utilicen el signo menos (ver figura 5).

- Para la gráfica seleccionen todos los datos y el tipo de gráfico.
  - ¿Dónde se encuentra el centro de esta circunferencia?
  - ¿Cuál es el radio de esta circunferencia?

3. Resuelvan y grafiquen la funciones necesarias de los siguientes problemas, justifiquen cada respuesta.

- La función  $x^2 + y^2 = 1$  modela una circunferencia unitaria.
  - De acuerdo con lo que hicieron en el ejercicio anterior:
    - ¿Cuál es su radio y su perímetro?
    - ¿Cuál es el área que encierra la circunferencia?
  - Con base en lo anterior encuentren la gráfica de la función  $x^2 + y^2 = 4$ .
    - ¿Cuánto mide su radio y su perímetro?
    - ¿Cuál es el área que encierra esta circunferencia?
    - ¿Qué diferencia encuentran con la circunferencia unitaria?
    - Construyan una tabla y una gráfica en donde se pueda observar lo que han contestado.
- El área de un círculo se define por  $A = \pi \times r^2$ . Construyan una tabla y una gráfica en donde se pueda observar cómo cambia el área del círculo al ir variando el radio (consideren valores que se encuentren en el intervalo de 1 a 10).
  - ¿Cómo cambia el área con respecto al radio?
- El tiro de una flecha por un arquero puede ser modelado usando la ecuación  $y = -0.3x^2 + 12x + 1$ , donde  $x$  es la distancia recorrida en metros y  $y$  es la altura (también en metros).
  - ¿Qué tan largo es el tiro? (Sugerencia: apliquen la fórmula general).
  - ¿Qué tipo de relación existe entre el largo y la altura del tiro?
  - ¿Qué valores toman  $x$  y  $y$ ? Definan los intervalos.
  - Construyan la tabla de valores y grafiquen la función.
  - ¿Qué tipo de gráfica es?
- El lanzamiento de una pelota hacia arriba se define como:  $y = 10t - 5t^2$ .
  - ¿Cuánto tarda en llegar al suelo? (Sugerencia: apliquen la fórmula general).
  - ¿Qué tan lejos cae la pelota?
  - ¿Qué tipo de relación existe entre el largo y la altura del tiro?
  - Define los intervalos en el eje de las abscisas y en el eje de las ordenadas.
  - Construyan la tabla de valores y grafiquen la función.

Comenten en grupo sus experiencias y juntos lleguen a una conclusión acerca de las ventajas y las desventajas del uso de la hoja electrónica de cálculo.

# Fuentes de información

## Para el alumno

### Libros

- Arce, J. (2003). *El matemático del rey*. España: Planeta.
- Andradas, C. (2005). *Póngame un kilo de matemáticas*. Madrid: SM (El barco de vapor. Saber número 4)
- Balbuena, L. (2005). *Cuentos del cero*. España: Nivola.
- Carlavilla, J. (2003). *Historia de las matemáticas en cómics*. México: Proyecto Sur de Ediciones.
- Cerasoli, Anna (2006). *La sorpresa de los números*. Madrid: Ediciones Maeva (colección Biblioteca de aula, serie Astrolabio).
- Collantes, J. y A. Pérez (2004). *Matecuentos. Cuentamates 1 (cuentos con problemas)*. España: Nivola.
- Collantes, J. y A. Pérez (2003). *Matecuentos. Cuentamates 2 (cuentos con problemas)*. España: Nivola.
- Collantes, J. y A. Pérez (2005). *Matecuentos. Cuentamates 3 (cuentos con problemas)*. España: Nivola.
- Elwes, Richard (2011). *Cómo contar hasta el infinito y otros 34 usos prácticos de las matemáticas*. Barcelona: Ariel (colección Biblioteca de Aula, serie Espejo de Urania).
- Enzensberger, M. (1998). *El diablo de los números*. España: Siruela.
- Frabetti, C. (1998). *El gran juego*. Madrid: Alfaguara.
- Frabetti, C. (2000). *Malditas matemáticas: Alicia en el País de los Números*. Madrid: Alfaguara.
- Gómez, R. (2000). *La selva de los números*. Madrid: Alfaguara.
- González, Pedro (2009). *Pitágoras. El filósofo del número*. México: AGT Editor (colección Biblioteca de Aula, serie Astrolabio).
- Guedj, D. (2000). *El teorema del loro*. Barcelona: Anagrama.
- Guedj, D. (2002). *El metro del mundo*. Barcelona: Anagrama.
- Haddon, M. (2004) *El curioso incidente del perro a medianoche*. Barcelona: Salamandra.
- Malba, T. (1998). *El hombre que calculaba*. España: Catapulta Editores.
- Manfrino, R. y J. Gómez (2007). *Geometría*. México: UNAM. (colección Biblioteca de Aula, serie Espejo de Urania).
- Masaichiro, A. y Mitsumasa A. (2004). *El misterioso jarrón multiplicador*. México: Fondo de Cultura Económica, Biblioteca escolar (colección Biblioteca de Aula, serie Espejo de Urania).
- Molina, I. (2004). *El señor del cero*. Barcelona: Alfaguara.
- Millás, J. y J. Forgas. (2006). *Números pares, impares e idiotas*. España: Alba.
- Muñoz, J. (2008). *Ernesto, el aprendiz de matemago*. España: Nivola.
- Norman, L. (2002). *El país de las mates para expertos*. España: Nivola.
- Paulos, J. (1998). *El hombre anumérico*. España: Tusquets Editores.
- Sierra, J. (2001). *El asesinato del profesor de Matemáticas*. México: Grupo Anaya.
- Takeuchi, Noboru y M. Romo. (2007). *Números y estrellas mayas*. México: UNAM. (colección: Biblioteca de Aula, serie Espejo de Urania).
- Whitelaw, Ian (2009). *La medida de todas las cosas. Historia del ser humano y las mediciones*. Barcelona: Océano Ámbar (colección Biblioteca de Aula, serie Espejo de Urania).

### Referencias electrónicas

- En esta página encontrarás información sobre mujeres matemáticas. [ntic.educacion.es/w3/recursos/secundaria/matematicas/universo\\_matematico/9\\_u\\_m/](http://ntic.educacion.es/w3/recursos/secundaria/matematicas/universo_matematico/9_u_m/) (consulta: 27 de diciembre de 2016, 15:16 horas).
- Teorema de Tales [http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales\\_didacticos/Teorema\\_de\\_thales/Semejanzas\\_thales.htm](http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Teorema_de_thales/Semejanzas_thales.htm) (consulta: 27 de diciembre de 2016, 15:25 horas).
- En la siguiente página encontrarás distintas actividades relacionadas con temas de geometría. [ntic.educacion.es/w3/eos/MaterialesEducativos/mem2005/geometria/geoweb/indice.htm](http://ntic.educacion.es/w3/eos/MaterialesEducativos/mem2005/geometria/geoweb/indice.htm) (consulta: 27 de diciembre de 2016, 15:30 horas).
- Ingresa a la página y realiza las actividades que se proponen sobre el tema de poliedros y sólidos de revolución. [recursostic.educacion.es/multidisciplinar/itfor/web/sites/default/files/recursos/poliedrosycuerposderevolucion/html/actividad\\_1\\_poliedros\\_y\\_cuerpos\\_de\\_revolucion.html](http://recursostic.educacion.es/multidisciplinar/itfor/web/sites/default/files/recursos/poliedrosycuerposderevolucion/html/actividad_1_poliedros_y_cuerpos_de_revolucion.html) (consulta: 27 de diciembre de 2016, 15:35 horas).
- En la siguiente página: <http://innovacioneducativa.upm.es/pensamientomatematico/node/215> encontraras diferentes cuentos matemáticos que podrás leer (consulta: 27 de diciembre de 2016, 16:50 horas).
- Página de la SEP, México en la que podrás encontrar información sobre la importancia del uso responsable de la tecnología y la Internet. Comparte esta información con tus padres y profesores. [www.clickseguro.sep.gob.mx](http://www.clickseguro.sep.gob.mx) (consulta: 27 de diciembre de 2016, 15:40 horas).

## Para el maestro

### Libros

- Albarracín Lluis y María Núria Gorgorió. "Problemas de estimación de grandes cantidades: Modelización e influencia del contexto", en *Relime. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, ISSN 1665-2436, vol. 16, núm. 3, Barcelona, 2013, pp. 289-315.
- Alonso, S. "Razones, proporciones y proporcionalidad en una situación de reparto: una mirada desde la teoría antropológica de lo didáctico", en *Relime. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, ISSN 1665-2436, vol. 16, núm. 1, Barcelona, 2013, pp. 65-97.
- Batanero, C. y otros. "Conocimiento de futuros profesores sobre la idea de juego equitativo", en *Relime. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, ISSN 1665-2436, vol. 15, núm. 1, 2012, pp. 63-91.
- Batanero, C. y otros (2011). *Aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas escolares. Casos y perspectivas*. México: Secretaría de Educación Pública.
- Cobo, P. y Molina, A. "¿Pueden nuestros estudiantes construir conocimientos matemáticos?", en *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, ISSN: 1887-1984 vol. 85, Tenerife, marzo de 2014, pp. 49-73.
- Gálvez, G. y otros. "Estrategias cognitivas para el cálculo mental", en *Relime. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, ISSN 1665-2436, vol. 14, núm. 1, Barcelona, 2011, pp. 9-40.
- Prior, J. y Torregrosa G. "Razonamiento configural y procedimientos de verificación en contexto geométrico", en *Relime. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, ISSN 1665-2436, vol. 16, núm. 3, Barcelona, 2013, pp. 339-368.
- Sadovsky, Patricia (2008). *Enseñar matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos*. México: SEP/Libros del Zorzal.
- Sánchez, E. y Gil J. "Las demostraciones en la didáctica de las Matemáticas. Una experiencia con alumnos de 3º ESO", en *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, ISSN 1887-1984, vol. 86, España, 2014, pp. 79-94.
- Sessa, Carmen (2008). *Iniciación al estudio didáctico del álgebra. Orígenes y perspectivas*. México: SEP/Libros del Zorzal.

### Referencias electrónicas

- Página del Departamento de Matemática Educativa (DME) del Cinvestav, donde encontrará libros y documentos electrónicos sobre matemática educativa. [matedu.cinvestav.mx/publicaciones/librosydoc.php](http://matedu.cinvestav.mx/publicaciones/librosydoc.php) (consulta: 27 de diciembre de 2016, 15:45 horas).
- Página de la SEP, México, de donde podrá descargar actividades interactivas para la enseñanza de las matemáticas para profesores y alumnos. <http://www.telesecundaria.sep.gob.mx/> (consulta: 27 de diciembre de 2016, 17:00 horas).
- Página de la Universidad de Granada, España, de donde podrá descargar artículos especializados en matemáticas. <http://www.ugr.es/~batanero/pages/librotesis.html> (consulta: 27 de diciembre de 2016, 17:20 horas).
- Enseñanza de las matemáticas con tecnología (EMAT). <http://www.matedu.cinvestav.mx/~asacristan/emologo.htm> (consulta: 27 de diciembre de 2016, 17:35 horas).
- Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias, de donde podrá descargar artículos interesantes sobre didáctica. <http://reec.uvigo.es/> (consulta: 27 de diciembre de 2016, 15:55 horas).
- En esta dirección podrá descargar la revista de educación matemática *Epsilon*. <http://thales.cica.es/epsilon/> (consulta: 27 de diciembre de 2016, 17:05 horas).
- Página de la SEP, México en la que podrá consultar distintos recursos y orientaciones para abordar los distintos contenidos: [www.curriculobasica.sep.gob.mx/index.php/prog-secundaria](http://www.curriculobasica.sep.gob.mx/index.php/prog-secundaria) (consulta: 27 de diciembre de 2016, 16:00 horas).
- En esta página encontrará textos específicos que contribuyen a la formación docente en temas de matemáticas y de otras áreas: [www.inee.edu.mx/index.php/publicaciones-micrositio](http://www.inee.edu.mx/index.php/publicaciones-micrositio) (consulta: 27 de diciembre de 2016, 16:15 horas).

### Bibliografía consultada para la elaboración de este libro

- Álvarez, Alfonso y otros. "Actividades matemáticas: conjeturar y argumentar", en *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, ISSN 1887-1984, vol. 85, Tenerife, 2014, pp. 49-73.
- Batanero, C. y otros. "El sentido estadístico y su desarrollo", en *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, ISSN 1887-1984, vol. 83, Tenerife, 2013, pp. 7-18.
- Chevalard, Yves. (2013) *La matemáticas en la escuela. Por una revolución epistemológica didáctica*. Buenos Aires: Libros del Zorzal, (colección Formación docente. Matemática).
- Corica, A. y Marín A. "Actividad de estudio e investigación para la enseñanza de nociones de geometría", en *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, ISSN 1887-1984, vol. 85, Tenerife, 2014, pp. 91-114.
- Gálvez, G. y otros. "Estrategias cognitivas para el cálculo mental", en *Relime. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, ISSN 1665-2436, vol. 14, núm. 1, Barcelona, 2011, pp. 9-40.
- Gascón, J. "Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico el caso del álgebra elemental", en *Relime. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, ISSN 1665-2436, vol. 14, núm. 2, Barcelona, 2011, pp. 203-231.
- Llinares, S. y Fernández C. "Relaciones implicativas entre las estrategias empleadas en la resolución de situaciones lineales y no lineales", en *Relime. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, ISSN 1665-2436, vol. 15, núm. 1, Barcelona, 2012, pp. 9-33.
- Parra, Cecilia e Irma Saiz. (2012) *Enseñar aritmética a los más chicos. De la exploración al dominio*. Rosario: Homo Sapiens Ediciones.
- Polya, George (2014). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.
- Rigo-Lemini M. y otros. "Epistemic Schemes and Epistemic States. A Study of Mathematics Convincement in Elementary School Classes", en *Educational Studies in Mathematics*, Dordrecht, 2013, pp. 71-91.
- Rigo-Lemini, M. "La convicción, la comprensión y las prácticas de racionalidad en la escuela primaria. Estudio del profesor", en Berciano A., Gutiérrez G., Climent N., y Estepa A. (Eds.), 2013, *Investigación en Educación Matemática XVII*, Bilbao: SEIEM.

### Referencias electrónicas

- Página del Ministerio de Educación, España. En esta página podrá encontrar recursos y actividades referentes a temas de educación matemática. [http://recursostic.educacion.es/multidisciplinar/wikididactica/index.php/Categor%C3%ADas\\_de\\_Matemáticas\\_en\\_la\\_ESO](http://recursostic.educacion.es/multidisciplinar/wikididactica/index.php/Categor%C3%ADas_de_Matemáticas_en_la_ESO) (consulta: 27 de diciembre de 2016, 16:08 horas).
- En esta página se encuentra una colección de revistas especializadas de la comunidad internacional de Educación y Aprendizaje. <http://sobrelaeducacion.com/revistas/coleccion/revista-internacional-de-aprendizaje-en-ciencia-matematicas-y-tecnologia/> (consulta: 27 de diciembre de 2016, 17:22 horas).
- Página que describe el desarrollo del pensamiento aleatorio, inclusive cuenta con recursos interactivos y actividades para el aula. [marcojrivera.webs.com/31pensamientoaleatorio.htm](http://marcojrivera.webs.com/31pensamientoaleatorio.htm) (consulta: 27 de diciembre de 2016, 16:19 horas).
- En esta dirección electrónica podrás descargar artículos sobre investigación en matemáticas educativas. <http://luisradford.ca/publications/> (consulta: 27 de diciembre de 2016, 17:32 horas).
- Esta página es una publicación de *Números*, revista de didáctica de las matemáticas que incluye trabajos de interés para profesores. <http://www.sinewton.org/numeros/> (consulta: 27 de diciembre de 2016, 17:40 horas).
- En el sitio se encuentra albergada la revista para la enseñanza y el aprendizaje *Suma*. <http://revistasuma.es> (consulta: 27 de diciembre de 2016, 17:52 horas).
- En esta dirección se encuentran todos los libros de texto gratuito de secundaria. <http://www.gob.mx/conaliteg> (consulta: 27 de diciembre de 2016, 18:00 horas).
- Para profundizar en temas de geometría puede visitar la siguiente página: [www.matedu.cinvestav.mx/~maestriaedu/asig4.htm](http://www.matedu.cinvestav.mx/~maestriaedu/asig4.htm) (consulta: 27 de diciembre de 2016, 16:30 horas).

**Matemáticas 3** es un libro diseñado con la intención de que los alumnos de tercer grado de secundaria construyan el saber matemático que les permitirá enfrentar los retos que impone la sociedad de hoy.

En esta propuesta, los estudiantes tendrán la oportunidad de discutir sus ideas, argumentar sus puntos de vista de acuerdo con las reglas del debate matemático, exponer sus procedimientos, redactar sus conclusiones y, además de consolidar sus saberes conceptuales, desarrollar las competencias matemáticas necesarias en el México actual.

Es también un texto que va a la vanguardia educativa; por ello incluye actividades vinculadas con el uso de la tecnología, que ayudarán a los jóvenes a desarrollar sus habilidades digitales al tiempo que comprenden la cultura digital y se reconocen como parte de ella.

DISTRIBUCIÓN GRATUITA  
PROHIBIDA SU VENTA



[www.enuevomexico.com.mx](http://www.enuevomexico.com.mx)



ISBN 978-607-712-144-2

9 786077 121442