

Arriaga • Benítez

Secundaria

# Matemáticas <sup>Por</sup> competencias 3

Matemáticas III  
Tercer grado  
Educación Secundaria

APRENDER, SIEMPRE

PEARSON

#### Datos de catalogación

Autores: Arriaga Robles, Alan,  
Marcos Manuel Benítez Castanedo

Matemáticas 3. Por competencias  
Tercer grado, educación secundaria  
1ª Edición

Pearson Educación, México, 2014  
ISBN: 978-607-32-2677-6  
Área: Secundaria

Formato: 20.5 x 27cm

Páginas: 272

Esta edición en español es la única autorizada.

### Matemáticas 3. Por competencias

El proyecto didáctico *Matemáticas 3. Por competencias* es una obra colectiva creada por encargo de la editorial Pearson Educación de México, por un equipo de profesionales en distintas áreas, que trabajaron siguiendo los lineamientos y estructuras establecidos por el departamento pedagógico de Pearson Educación de México.

Especialistas en Matemáticas responsables de los contenidos y su revisión técnico-pedagógica:

**Obra original:** Arriaga Robles, Alan y Marcos Manuel Benítez Castanedo

**Revisor técnico:** Jesús Manuel Hernández Soto

**Colaboración especial:** Sergio Isidoro Alpízar Jiménez y Vicente Zimbrón Jiménez

**Dirección general:** Sergio Fonseca ■ **Dirección de innovación y servicios educativos:** Alan David Palau ■ **Gerencia de contenidos:** Jorge Luis Iñiguez ■ **Especialista en contenidos de aprendizaje:** Abigail Álvarez Cuéllar ■ **Gerencia de arte y diseño:** Asbel Ramírez ■ **Coordinación de arte y diseño:** Mónica Galván

**Dirección K-12 Latinoamérica:** Eduardo Guzmán Barros

**Dirección de contenidos K-12 Latinoamérica:** Clara Andrade

**Editado por:** EDIMEND, S.A de C.V ■ **Director general:** Francisco Méndez Gutiérrez ■ **Director editorial:** Alberto García Rodríguez ■ **Gerente de contenidos:** Gabriela Ramírez Salgado ■ **Coordinación de contenidos secundaria:** Mariana Calero Sánchez ■ **Coordinación editorial:** Angélica C. Sánchez Celaya ■ **Edición:** Maricela García Núñez ■ **Diseño y formación editorial:** Mario A. Tenorio Murillo, Juliana Porras Maldonado, Susana Meléndez de la Cruz ■ **Corrección de estilo y editorial:** Daniel García Castillo, Iliana Sahagún Angulo, Agustín Cervantes Aguilar ■ **Diseño de portada:** Mónica Huitrón Vargas ■ **Ilustraciones:** Eloy Padilla Puga y Juliana Porras Maldonado ■ **Fotografías:** Beatriz Mendoza Álvarez.

ISBN: 978-607-32-2677-6

ISBN SEP: 978-607-32-2680-6

ISBN E-BOOK: 978-607-32-2678-3

ISBN E-CHAPTER: 978-607-32-2679-0

Impreso en México. *Printed in Mexico*

D. R. © 2016 por Pearson Educación de México, S. A. de C. V.

Avenida Antonio Dovalí Jaime núm. 70,

Torre B, Piso 6, Colonia Zedec, Ed. Plaza Santa Fe,

Delegación Álvaro Obregón, México, Ciudad de México, C. P. 01210.

Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana, reg. núm. 1031

PEARSON

Reservados todos los derechos. Ni la totalidad ni parte de esta publicación pueden reproducirse, registrarse o transmitirse, por un sistema de recuperación de información en ninguna forma ni por ningún medio, sea electrónico, mecánico, fotográfico, magnético o electroóptico, por fotocopia, grabación o cualquier otro, sin permiso previo por escrito del editor.

## Presentación

Hoy día, nuestras sociedades modernas se han vuelto más exigentes en todos los ámbitos educativos, sobre todo, se ha dado mayor énfasis al desarrollo de competencias, lo que determina que las habilidades que desarrollen las nuevas generaciones de estudiantes, los capacitarán para tomar decisiones más acertadas en lo que concierne a su crecimiento profesional para enfrentar los retos que significa la adquisición de nuevos conocimientos y tecnologías.

El uso adecuado de la información y el conocimiento que se transmiten a través de textos como el que tienes en tus manos, te permitirá poner en práctica nuevas estrategias que permitan la obtención de más y mejores herramientas del saber, indispensables para continuar contribuyendo en el desarrollo de nuestra sociedad y sus instituciones, así como en el crecimiento de cada individuo interesado en la superación personal mediante el aprendizaje constante.

Es por esta razón que las instituciones educativas juegan un papel importante en la formación de individuos, al imbuir en ellos la seguridad de que son capaces de interactuar en concordancia con las demandas que les plantean las sociedades modernas. Por tanto, las escuelas deben cumplir con esmero los objetivos que se plantean desde el inicio del ciclo escolar: formar alumnos que respondan, con base en sus conocimientos y habilidades, a los retos que la sociedad les plantea constantemente.

La combinación de herramientas como los libros, la escuela y la tecnología permitirá que los alumnos logren alcanzar el mejor de los éxitos en el futuro inmediato. Los libros son una herramienta que se encuentra en primer orden del conocimiento directo; las personas que tienen acceso a éstos suelen desarrollar capacidades, habilidades y actitudes valiosas, además del manejo de teorías y procedimientos.

Este libro tiene por objetivo capacitar al alumno para que proponga diferentes formas de resolver situaciones diversas, así como de justificar y validar sus resultados; pero, principalmente, de manejar de manera correcta el lenguaje matemático, el cual es universal. Bajo esta perspectiva, se espera que el trabajo por competencias, aunado al trabajo constante de los alumnos, sea un material de apoyo útil para la resolución de problemas, aprovechando los conocimientos que el alumno ha venido desarrollando a lo largo de su estancia en los centros educativos y en las situaciones que le plantea la vida cotidiana.

Apóyense en este libro y lleven a diario la práctica del diálogo, de la crítica, la reflexión, el debate, el trabajo colaborativo, la retroalimentación, del uso de las técnicas y sobre todo de las Tecnologías de la Información y la Comunicación, que es una herramienta que permitirá tener conocimientos más significativos y por tanto obtener mejores aprendizajes.

**Al estudiante**

Te damos la bienvenida al tercero y último curso de matemáticas en tu educación secundaria. Te aseguramos que desarrollarás las competencias, habilidades y actitudes que te ayudarán a cursar con éxito el siguiente nivel de tu formación académica, que es el nivel medio superior.

En este libro de *Matemáticas 3. Por competencias*, se te proponen métodos para enfrentar los retos que constantemente surgen en la vida cotidiana. En él encontrarás las herramientas que te permitirán resolverlos de manera satisfactoria.

De acuerdo con cada uno de los ejes que se encuentran en este libro se te indicarán las competencias que desarrollarás durante tu curso de tercer grado, las cuales te ayudarán no sólo en tu formación académica, sino también en tu desarrollo como un ser social propositivo en la búsqueda de soluciones.

En el planteamiento de situaciones diversas podrás identificar el núcleo del problema y resolverlo mediante diferentes procedimientos y, con argumentos que tú mismo desarrollarás, serás capaz de justificar o sustentar el procedimiento que elegiste y que te llevó al resultado esperado.

La comunicación efectiva es otro de los factores importantes que se requiere para el aprendizaje en general, no sólo de las matemáticas; por lo que la representación y la expresión oral o escrita, de manera colectiva o individual, son otras herramientas necesarias para alcanzar la resolución de un problema y poder argumentar los resultados obtenidos.

El manejo y desarrollo de las habilidades digitales de cualquier tipo de tecnología te permitirán obtener una mayor comprensión de los aprendizajes que obtendrás durante el curso. Recuerda siempre que la globalización requiere de individuos que sean capaces de participar de manera constante ante los cambios que se producen día a día.

Por último, es importante prestar atención de manera respetuosa a las propuestas de procedimientos que hagan tus compañeros de grupo para abordar una problemática mediante los procedimientos que ellos consideren adecuados.

**Al profesor**

El propósito de este libro de *Matemáticas 3. Por competencias*, es ayudarlo a transmitir a los alumnos los conocimientos propios de esta materia para que desarrollen las capacidades y las actitudes que les permitan enfrentar los problemas que aquí se plantean y resolverlos con éxito; justificar sus resultados con argumentos sólidos; dominar diferentes métodos o técnicas para la resolución de diversas situaciones y, sobre todo, comprender el lenguaje matemático, con la finalidad de poder comunicarse en este ámbito e interpretar el contexto de una situación.

En el estudio de las matemáticas es muy importante que se desarrolle el trabajo colaborativo e individual, esto permitirá una mayor retroalimentación acerca de la manera de cómo abordar y resolver una situación que se presente, no sólo en su libro, sino en su vida cotidiana. Desde esta perspectiva, el papel del docente es el de organizar y supervisar de manera ordenada el trabajo que los alumnos desarrollen, consolidando de esta forma los aprendizajes esperados.

En este libro se proponen situaciones que no son ajenas a los alumnos, pues se les presentan de manera común, mismas que deben resolver a partir de su aprendizaje. Estas propuestas tienen la finalidad de que cuando surja una situación similar en su vida cotidiana tengan las herramientas para resolverlas, comprobando y justificando siempre su proceder en la resolución.

El manejo de las tecnologías de la información y la comunicación es esencial para que el alumno pueda desarrollar estas competencias, mismas que deben ser actualizadas de manera constante. El trabajo interdisciplinario con las demás áreas de estudio del nivel de secundaria será de mucha ayuda y favorecerá el desarrollo integral en los alumnos de una manera satisfactoria, posibilitando uno de los principales propósitos de este nivel es estudio: la formación de individuos capaces de aprender de manera autónoma.

**Estructura de tu libro**

Las secciones que conforman la estructura didáctica de *Matemáticas 3. Por competencias* fueron creadas pensando en jóvenes como tú, que requieren y hacen uso de conocimientos útiles y precisos para desarrollar sus competencias al máximo. Para alcanzar estos objetivos y aprovechar en su totalidad los recursos de esta obra te explicamos a continuación cómo está organizada.

**Entrada de bloque**

La estructura del libro se compone de 5 bloques. Al principio de cada uno se presentan los aprendizajes esperados, línea de tiempo, imagen alusiva a un tema del bloque y pie de imagen.

The diagram illustrates the structure of 'Bloque 3'. At the top, it says 'Bloque 3'. Below this, there are several interconnected components:
 

- Contexto histórico:** A timeline showing historical events from 1492 (Columbus's voyage) to 1914 (the Titanic), with images of ships and maps.
- Hechos matemáticos:** A timeline of mathematical milestones from 1687 (Newton's laws) to 1927 (Einstein's relativity), with images of scientists and mathematical symbols.
- Aprendizajes esperados:** A list of learning objectives related to quadratic equations, congruence, and logarithms.
- Pie de figura:** A section for a representative image of the block's theme.
- Línea del tiempo:** A section for showing historical links between society and mathematics.

 The diagram also includes mathematical formulas like  $a+b+(b-b)=a^2+b^2$ ,  $y^2-x^2=y^2-x^2$ ,  $\log(x+y)=\log xy$ ,  $b^2-a^2=d^2-\pi$ , and  $v=\sqrt{g \cdot l \cdot (1-\cos \theta)}$ .

**Aprendizajes esperados**

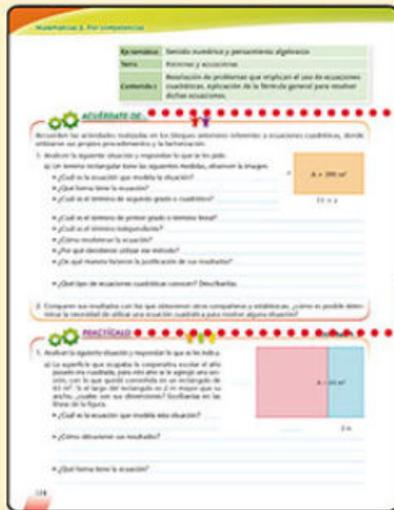
Se refiere a lo que se espera que desarrolles con el trabajo de cada secuencia didáctica.

**Pie de figura**

Relaciona la imagen de entrada con algún tema que se tratará en el bloque.

**Línea del tiempo**

El propósito de esta sección es mostrar los vínculos históricos entre el desarrollo de la sociedad y las matemáticas.



**ACUÉRDATE DE...**

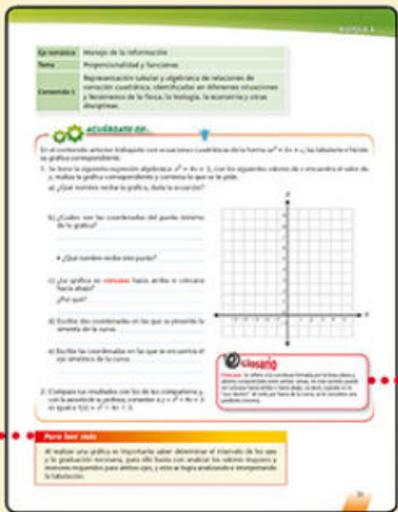
Te ayuda a reforzar lo que aprendiste en otro momento y a renovar tu experiencia. Con frecuencia se propone el trabajo en equipo para fomentar el desarrollo colaborativo y se plantean situaciones en las que desarrollarás tu capacidad para construir conocimientos.

**PRACTÍCALO**

Actividades diversas que incluyen ejercicios para que practiques, adquieras confianza, desarrolles autonomía y perfecciones tus competencias (conocimientos, habilidades y actitudes) matemáticas.

**Para leer más**

Te brinda datos que enriquecen el tema principal del apartado.



**Glosario**

Incluye la definición de aquellas palabras que pueden presentar alguna dificultad por su significado. En el texto las encontrarás destacadas en color rojo.

**Para tener en cuenta**

Esta sección está diseñada para ayudarte a consolidar los conceptos clave y facilitar la comprensión de los temas tratados. Es una herramienta para que deduzcas o inferas la solución a situaciones problemáticas que se te presentan a lo largo del libro.

**LO QUE APRENDÍ**

Su objetivo es ayudarte a identificar los aprendizajes que obtuviste durante la lección y así saber lo que aprendiste, lo que estás aprendiendo y lo que te falta por aprender; con esto identificarás logros y también retos por alcanzar para desarrollar más habilidades.

**Desarrolla tus habilidades**

Está diseñado para que, mediante una actividad lúdica, repases lo aprendido y determines tu grado de avance.

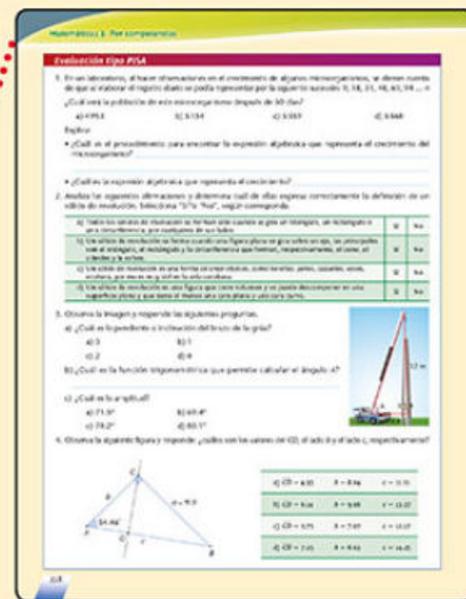


**USA LAS TIC**

Este apartado contiene recomendaciones para que consultes páginas electrónicas en las que obtendrás información de los temas desarrollados en tu libro; con las actividades sugeridas podrás reafirmar tus conocimientos.

**Evaluación tipo PISA**

Tiene el propósito de poner a prueba los conocimientos y habilidades que adquiriste a lo largo del bloque.



## Índice

Presentación .....	3
Estructura de tu libro .....	5
Dosificación de contenidos .....	11
<b>BLOQUE 1</b> .....	14
<b>Contenido 1.</b> Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas .....	16
<b>Contenido 2.</b> Construcción de figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y análisis de sus propiedades .....	24
<b>Contenido 3.</b> Explicitación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada .....	32
<b>Contenido 4.</b> Análisis de representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas) que corresponden a una misma situación. Identificación de las que corresponden a una relación de proporcionalidad .....	42
<b>Contenido 5.</b> Representación tabular y algebraica de relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas .....	51
<b>Contenido 6.</b> Conocimiento de la escala de la probabilidad. Análisis de las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes .....	57
<b>Contenido 7.</b> Diseño de una encuesta o un experimento e identificación de la población en estudio. Discusión sobre las formas de elegir el muestreo. Obtención de datos de una muestra y búsqueda de herramientas convenientes para su presentación .....	64
<b>Evaluación tipo PISA</b> .....	72
<b>BLOQUE 2</b> .....	74
<b>Contenido 1.</b> Uso de ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización .....	76
<b>Contenido 2.</b> Análisis de las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras .....	84
<b>Contenido 3.</b> Construcción de diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras .....	93

<b>Contenido 4.</b> Análisis de las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo .....	99
<b>Contenido 5.</b> Explicitación y uso del teorema de Pitágoras .....	106
<b>Contenido 6.</b> Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios (regla de la suma) .....	112
<b>Evaluación tipo PISA</b> .....	120
<b>BLOQUE 3</b> .....	122
<b>Contenido 1.</b> Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas. Aplicación de la fórmula general para resolver dichas ecuaciones .....	124
<b>Contenido 2.</b> Aplicación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas .....	130
<b>Contenido 3.</b> Resolución de problemas geométricos mediante el teorema de Tales .....	134
<b>Contenido 4.</b> Aplicación de la semejanza en la construcción de figuras homotéticas .....	141
<b>Contenido 5.</b> Lectura y construcción de gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos .....	146
<b>Contenido 6.</b> Lectura y construcción de gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera .....	151
<b>Contenido 7.</b> Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto) .....	157
<b>Evaluación tipo PISA</b> .....	162
<b>BLOQUE 4</b> .....	164
<b>Contenido 1.</b> Obtención de una expresión general cuadrática para definir el $n$ ésimo término de una sucesión .....	166
<b>Contenido 2.</b> Análisis de las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo. Construcción de desarrollos planos de conos y cilindros rectos .....	175
<b>Contenido 3.</b> Análisis de las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente .....	182

**Contenido 4.** Análisis de las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo ..... 191

**Contenido 5.** Explicitación y uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente ..... 198

**Contenido 6.** Cálculo y análisis de la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identificación de la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa ..... 204

**Contenido 7.** Medición de la dispersión de un conjunto de datos mediante el promedio de las distancias de cada dato a la media (desviación media). Análisis de las diferencias de la “desviación media” con el “rango” como medidas de la dispersión ..... 211

**Evaluación tipo PISA** ..... 218

**BLOQUE 5** ..... 220

**Contenido 1.** Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones. Formulación de problemas a partir de una ecuación dada ..... 222

**Contenido 2.** Análisis de las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto. Cálculo de las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto ..... 231

**Contenido 3.** Construcción de las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos, tomando como referencia las fórmulas de prismas y pirámides ..... 238

**Contenido 4.** Estimación y cálculo del volumen de cilindros y conos o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas ..... 247

**Contenido 5.** Análisis de situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades ..... 255

**Contenido 6.** Análisis de las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables ..... 262

**Evaluación tipo PISA** ..... 269

**Bibliografía** ..... 271

## Dosificación

### DOSIFICACIÓN DE CONTENIDOS

Para el desarrollo del programa y el logro de los aprendizajes esperados se consideran 200 días de trabajo y 40 horas por bloque. Se propone la siguiente distribución para que el profesor planifique sus tiempos:

- 10 sesiones para el diagnóstico inicial por apertura de curso.
- 2 sesiones para la aplicación y revisión de exámenes al finalizar cada bloque.
- 1 sesión en cada bloque para desarrollar la evaluación tipo PISA.
- 1 sesión en cada bloque para desarrollar la sección “Usa las TIC”.
- 10 sesiones al finalizar el curso, para repaso general y reforzamiento de aprendizajes.

Eje	Tema	Subtema	Bloques					Sesión
			B1	B2	B3	B4	B5	
Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas.	•					
		Uso de ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización.		•				
		Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas. Aplicación de la fórmula general para resolver dichas ecuaciones.				•		
		Obtención de una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión.					•	
		Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones. Formulación de problemas a partir de una ecuación dada.						•

Eje	Tema	Subtema	Bloques					Sesión
			B1	B2	B3	B4	B5	
Forma, espacio y medida	Figuras y cuerpos	Construcción de figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y análisis de sus propiedades.	•					
		Explicitación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada.	•					
		Análisis de las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras.		•				
		Construcción de diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras.		•				
		Aplicación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas.			•			
		Resolución de problemas geométricos mediante el teorema de Tales.			•			
		Aplicación de la semejanza en la construcción de figuras homotéticas.			•			
		Análisis de las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo. Construcción de desarrollos planos de conos y cilindros rectos.				•		
		Análisis de las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo.			•			
		Explicitación y uso del teorema de Pitágoras.			•			
Medida	Medida	Análisis de las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente.				•		
		Análisis de las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo.				•		
		Explicitación y uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.					•	
		Análisis de las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto.						•
		Cálculo de las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto.						
		Construcción de las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos, tomando como referencia las fórmulas de prismas y pirámides.						•
		Estimación y cálculo del volumen de cilindros y conos, o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas.						
								•

Eje	Tema	Subtema	Bloques					Sesión
			B1	B2	B3	B4	B5	
Manejo de la información	Proporcionalidad y funciones	Análisis de representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas) que corresponden a una misma situación.	•					
		Identificación de las que corresponden a una relación de proporcionalidad.						
		Representación tabular y algebraica de relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas.	•					
		Cálculo y análisis de la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal.					•	
		Identificación de la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa.						
		Lectura y construcción de gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos.				•		
		Lectura y construcción de gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera.				•		
		Análisis de situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades.						•
		Conocimiento de la escala de la probabilidad. Análisis de las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes.			•			
		Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios (regla de la suma).				•		
Nociones de probabilidad	Nociones de probabilidad	Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto).				•		
		Análisis de las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables.					•	
		Diseño de una encuesta o un experimento e identificación de la población en estudio.						
		Discusión sobre las formas de elegir el muestreo. Obtención de datos de una muestra y búsqueda de herramientas convenientes para su presentación.						•
		Medición de la dispersión de un conjunto de datos mediante el promedio de las distancias de cada dato a la media (desviación media).						
		Análisis de las diferencias de la "desviación media" con el "rango" como medidas de la dispersión.						•

# Bloque 1

## Aprendizajes esperados:

- Explica la diferencia entre eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.

El uso de ecuaciones y la función práctica de los triángulos, son dos de los temas que estudiarás en este bloque y que tendrán trascendencia más allá de tu clase de Matemáticas, ya que tienen una infinidad de aplicaciones en tu vida cotidiana.

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

1633 a.n.e. Termina en Egipto la dinastía XIV y comienza la XV.



1000 a.n.e. Inicia el esplendor del periodo Preclásico maya.



435 a.n.e. En Grecia, Fidias esculpe la estatua de Zeus Olímpico.



300 a.n.e. El rey Tolomeo I Soter, funda la biblioteca de Alejandría.



239 a.n.e. Se introduce el año bisiesto en el calendario egipcio.



## Contexto histórico

## Hechos matemáticos

2000 a.n.e. Los babilonios resuelven por primera vez una ecuación cuadrática, a pesar de que no conocían las raíces negativas o complejas.

406-315 a.n.e. Eudoxo establece una teoría de semejanza.

1000 a.n.e. Los árabes inventan el sistema decimal.

300 a.n.e. Euclides enuncia por primera vez en su Libro I, *Elementos*, la propiedad de la suma de los ángulos internos de un triángulo.

240 a.n.e. Eratóstenes, con ayuda de la trigonometría midió la circunferencia de la Tierra y la distancia al Sol, así como la inclinación del eje terrestre.

Eje temático	Sentido numérico y pensamiento algebraico
Tema	Patrones y ecuaciones
Contenido 1	Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas.

**ACUÉRDATE DE...**

1. Analicen la situación planteada y respondan las preguntas.

a) Ramiro tiene un perro como mascota, en este momento Ramiro tiene 12 años más que su perro, pero dentro de 4 años tendrá tres veces la edad que tendrá su perro. Diseñen una estrategia que les permita conocer la edad de ambos.

- ¿Qué edad tiene Ramiro? \_\_\_\_\_
- ¿Qué edad tiene su perro? \_\_\_\_\_
- ¿Cómo representaron la edad de Ramiro? \_\_\_\_\_
- ¿Cómo representaron la edad de su perro? \_\_\_\_\_
- Entonces, ¿qué expresión modela esta situación y permite darle solución? \_\_\_\_\_
- ¿De qué tipo de expresión se trata? \_\_\_\_\_
- Escriban las operaciones que llevaron a cabo. \_\_\_\_\_

• ¿Qué procedimiento siguieron para resolver la expresión que plantearon? \_\_\_\_\_

• ¿De qué manera pueden comprobar que su resultado es correcto? \_\_\_\_\_

2. Contrasten sus resultados con los que obtuvieron algunas parejas cercanas, y con la ayuda del profesor determinen y escriban en sus cuadernos las conclusiones a las que llegaron.

- a) ¿Cuál es y cómo se realiza la secuencia de operaciones para resolver una expresión de este tipo?
- b) ¿Cómo es posible comprobar que verdaderamente la expresión modela la situación planteada?

**PRACTICALO**

En los grados anteriores trabajaron con la resolución de situaciones en las que plantearon y resolvieron ecuaciones lineales con una y dos incógnitas.

1. Lean la siguiente situación y contesten lo que se les indica.

a) Don Matías quiere comprar un terreno cuadrangular, pero desconoce sus dimensiones.

- ¿De qué manera se puede obtener el área? \_\_\_\_\_
- Escriban la expresión algebraica que representa al área de esta figura. \_\_\_\_\_
- En la expresión algebraica  $x^2$ , ¿qué indica el número 2 en la base  $x$ ? \_\_\_\_\_
- ¿Por qué? \_\_\_\_\_
- Si don Matías sólo recuerda que el área es de  $625 \text{ m}^2$ , ¿mediante qué procedimiento puede calcular el valor de cada uno de los lados? \_\_\_\_\_
- ¿Cómo quedaría la expresión algebraica para llevar a cabo este procedimiento? \_\_\_\_\_
- Por lo tanto, cada lado mide: \_\_\_\_\_
- ¿Cómo se llama la expresión algebraica que acabas de obtener de la situación del terreno de don Matías? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es el procedimiento que utilizaron para llegar al resultado? \_\_\_\_\_



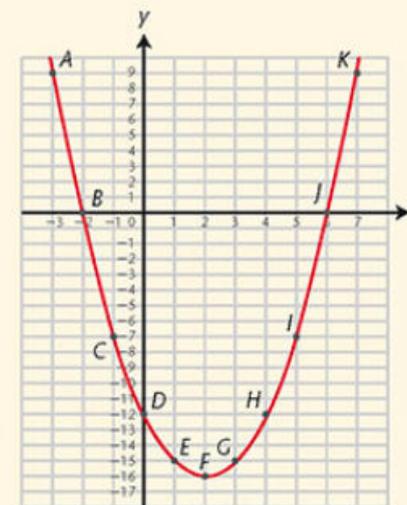
2. Compartan sus resultados y compárenlos con los de sus compañeros. Con la asesoría de su profesor realicen un repaso de cómo calcular la raíz cuadrada por el método del algoritmo. Resuelvan algunos ejercicios y problemas sencillos.

**Para tener en cuenta**

En una ecuación de segundo grado o cuadrática el exponente máximo que puede tener una incógnita es 2. Analiza la siguiente condición, esto te permitirá observar y deducir las respuestas y conclusiones necesarias.

$$y = x^2 - 4x - 12$$

	x	y		x	y
A	-3	9	G	3	-15
B	-2	0	H	4	-12
C	-1	-7	I	5	-7
D	0	-12	J	6	0
E	1	-15	K	7	9
F	2	-16			





**PRACTICALO**



**Actividad 1.2**

1. En la escuela Felipe Neri se llevó a cabo un maratón, en el que Dulce y Mario llegaron en primer lugar. Ayuden al jurado a resolver cuáles son los números de registro de los alumnos que llegaron primero, consideren que son números consecutivos, y el producto de estos dos números es igual 1050.

- a) ¿Cuál es la ecuación que utilizan para resolver esta condición?
- b) Existen dos números enteros consecutivos cuyo producto es igual al de la ecuación planteada. Completen la tabla para encontrarlos.

x	x + 1	x(x + 1)
30		
31		
32		
33		
34		
35		

- Los números cuyo producto es igual a 1050 son \_\_\_\_\_ y \_\_\_\_\_
- Si los números fueran negativos, ¿se obtendría el mismo resultado? \_\_\_\_\_
- ¿Por qué? \_\_\_\_\_
- Expliquen cómo comprobarían su resultado. \_\_\_\_\_

2. Contrasten sus resultados con los de algunos de sus compañeros y con la asesoría de su profesor concluyan, ¿cuál es la manera correcta de elaborar una expresión algebraica que refleje la situación planteada?

**Para leer más**

Las ecuaciones cuadráticas se pueden expresar como:  $x^2$ ,  $2x^2$ ,  $\frac{3}{5}x^2$ , etcétera, sin embargo existen expresiones que dan origen a una cuadrática. Por ejemplo:  $x(x + 6)$ , aplicando la propiedad distributiva, tenemos que esta expresión se convierte en:  $x^2 + 6x$ , o también si la ecuación es  $(x + 1)(x + 1) = x^2 + 2x + 1$ .

**Para tener en cuenta**

Las soluciones de una ecuación cuadrática son dos, dado que si sustituimos ambos valores (positivo y negativo) en la ecuación cuadrática el resultado será el mismo.



**PRACTICALO**



**Actividad 1.3**

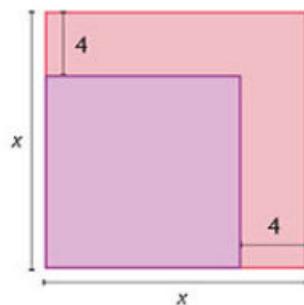
1. Lean con atención las siguientes condiciones y contesten lo que se les solicita.

a) Alejandro compró un libro de juegos y retos matemáticos; al resolver un crucigrama algebraico encontró un dato que dice: el cuadrado de tres veces un número, más 24, es igual a 240. Analicen esta condición y contesten las preguntas.

- ¿Cuál es la ecuación que representa esta condición? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es el valor del número que cumple con ésta? \_\_\_\_\_
- ¿Cuántas soluciones puede presentar dicha ecuación? \_\_\_\_\_
- ¿Por qué? \_\_\_\_\_
- ¿De qué manera harían la comprobación si es que encontraron dos posibles soluciones? \_\_\_\_\_

b) Se tiene un terreno donde se va a construir una casa de forma cuadrada, sin embargo, el dueño quiere que se coloque un jardín alrededor, como se indica en la imagen.

- ¿Cuánto mide cada lado? \_\_\_\_\_
- ¿Cómo se expresaría algebraicamente su área? \_\_\_\_\_
- Expliquen cómo la obtuvieron. \_\_\_\_\_
- ¿Qué nueva expresión se obtiene si se desarrolla? \_\_\_\_\_
- Si el terreno midiera 225 m<sup>2</sup>, ¿cuál sería el valor de x? \_\_\_\_\_
- Entonces, ¿cuántos metros cuadrados tendría la casa? \_\_\_\_\_
- ¿Y el jardín? \_\_\_\_\_
- ¿De qué manera es posible comprobar que estos resultados son correctos? \_\_\_\_\_



2. Comparen sus resultados con los del resto del grupo y con la asesoría de su profesor comenten cómo comprobarían sus resultados.



**PRACTICALO**

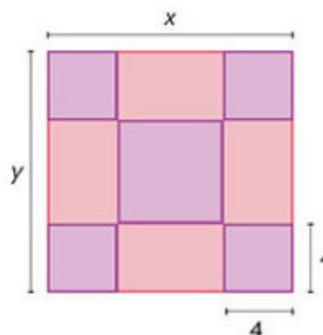


**Actividad 1.4**

En la actividad anterior obtuviste una expresión de segundo grado, ahora obtén una similar a partir del siguiente caso.

1. En una fábrica de cajas de cartón quieren fabricar una caja cuadrada a partir del siguiente trazo.

- a) Analiza, resuelve y explica lo que se te pide.
  - ¿Cuál es la expresión algebraica que representa la base del cuadrado? \_\_\_\_\_
  - Argumenta cómo la obtuviste. \_\_\_\_\_



- ¿Cuál es la expresión algebraica que representa la altura? \_\_\_\_\_
- Algebraicamente, ¿cuál es la superficie del cuadrado? \_\_\_\_\_
- Entonces, ¿cuánto mide únicamente la superficie con la que se construirá cada caja? \_\_\_\_\_
- ¿Por qué? \_\_\_\_\_

2. Haz tus comprobaciones y compara tus respuestas con las del resto de tus compañeros, y con la asesoría de tu profesor comenten si existen ecuaciones cuadráticas incompletas y por qué.



**PRACTICALO**



**Actividad 1.5**

1. Resuelvan las siguientes operaciones, determinen la ecuación cuadrática y planteen, en su cuaderno, un problema que se resuelva con dicha ecuación.

a)	$3(x - 3) - 3(x + 3) = (x + 3)(x - 3)$
b)	$x(x - 5) + 3(x + 2) = 3x$
c)	$9(x + 5) = 2x(x - 7) + 5(x + 9)$
d)	$2x(x) + 8(x + 3) = x(x + 4) + 12$
e)	$2(x + 6) + (x + 2)(x - 2) = 2x + 8$

2. Compáren la forma que tienen las ecuaciones finales obtenidas con las de la tabla siguiente y complétenla, según corresponda con la forma que finalmente quedó.

$ax^2 + bx + c = 0$	$ax^2 + bx = 0$	$ax^2 + c = 0$	$ax^2 = 0$

- ¿Por qué no todas las ecuaciones cuadráticas son de la forma  $ax^2 + bx + c = 0$ ? \_\_\_\_\_
- ¿Cómo las pueden identificar o diferenciar? \_\_\_\_\_
- ¿Qué nombre les darían? \_\_\_\_\_
- ¿Por qué? \_\_\_\_\_

- ¿Qué característica las hace ser cuadráticas? \_\_\_\_\_
3. Compáren sus respuestas y la tabla con algunos de sus compañeros, y con la asesoría de su profesor comenten cómo se puede resolver este tipo de ecuaciones.

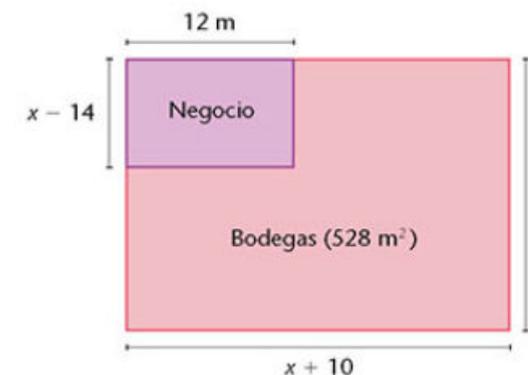


**PRACTICALO**



**Actividad 1.6**

1. Una empresa destina una parte de un terreno para su negocio y el resto como bodega. Ésta tiene una superficie de  $528 \text{ m}^2$ , sin contar el negocio, y se sabe que su largo mide 10 m más que su ancho, y que el negocio mide 12 m de largo y su ancho mide 14 metros menos que el ancho de todo el terreno.



a) Diseñen una estrategia que les permita conocer las dimensiones de la bodega y del negocio.

- ¿Qué expresión algebraica representa la superficie total del terreno, considerando únicamente sus lados? \_\_\_\_\_

- ¿De qué grado es esta expresión algebraica? \_\_\_\_\_
- ¿Qué tipo de ecuación es? \_\_\_\_\_
- ¿Con sólo estos datos es posible conocer el valor de  $x$ ? \_\_\_\_\_  
Justifiquen su respuesta. \_\_\_\_\_

- ¿Qué expresión algebraica permite obtener el área del negocio? \_\_\_\_\_
- ¿De qué grado es esta expresión? \_\_\_\_\_
- Entonces, ¿qué expresión algebraica permite obtener el área total del terreno? \_\_\_\_\_

- Al desarrollar esta expresión, podemos conocer el valor de  $x$ , que es: \_\_\_\_\_
- Simplificando esta ecuación en la forma  $x^2 + bx + c = 0$ , se tiene que: \_\_\_\_\_

2. Compáren sus respuestas con las de algunos de sus compañeros, y con la ayuda del profesor propongan diversas estrategias para encontrar la expresión algebraica y determinen, ¿cuál es la más sencilla para encontrar el valor del ancho del terreno y cómo se puede comprobar?

**Para tener en cuenta**

Las ecuaciones de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ (ecuación cuadrática completa)}$$

Tienen los tres términos: uno de segundo grado, uno de primero y un término independiente, todo igualado a cero.

En algunos casos falta el término  $bx$ , dando la forma:

$$ax^2 + c = 0 \text{ (ecuación cuadrática incompleta pura)}$$

En otros casos falta el término  $c$ , dando la forma:

$$ax^2 + bx = 0 \text{ (ecuación cuadrática incompleta mixta)}$$

Pero también pueden faltar ambos, dando la forma  $ax^2 = 0$ .

En estos casos se dice que la ecuación es incompleta. El término  $ax^2$  no puede faltar porque entonces la ecuación sería de segundo grado.



**LO QUE APRENDÍ**



1. En una comunidad se quiere construir un deportivo para la población; las autoridades donarán un terreno, el cual dividirán en dos canchas de fútbol, un área de juegos, un comedor y sanitarios, tal como se muestra en la figura.

a) ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el área de todo el terreno?

b) ¿De qué forma obtuvieron el resultado?

c) ¿Cuál sería el área para cada uno de los espacios?

Canchas de fútbol: \_\_\_\_\_ Sanitarios: \_\_\_\_\_

Comedor: \_\_\_\_\_ Área de juegos: \_\_\_\_\_

d) ¿Cómo son las áreas destinadas para el comedor y la zona de juegos?

• ¿Por qué?

e) Si sumaran todas las áreas para cada sección del deportivo, ¿sería igual o diferente al área total del terreno?

Justifiquen su respuesta.

2. Diseñen en su cuaderno un problema similar al propuesto en esta actividad e intercámbienlo con el de algún equipo cercano para que lo resuelvan; al terminar, contrasten sus diseños y las expresiones algebraicas obtenidas.

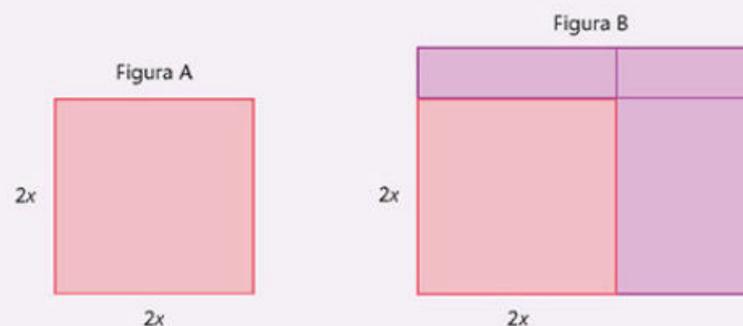
3. Comparen sus resultados con los de otros compañeros, y con la asesoría de su profesor concluyan, ¿por qué en este caso aparece únicamente el término de segundo grado y no aparecen los valores de  $bx$  y de  $c$  de la forma  $ax^2 + bx + c$ ?



**Desarrolla tus habilidades**

1. A una alberca cuadrada (Fig. A) se le aumentaron 5 metros de largo y 8 metros de ancho, con lo que se formó un rectángulo (Fig. B) cuya área es  $4x^2 + 26x + 40$ .

a) Con base en esta información, reúnete con un compañero para resolver lo que se pide.



• ¿Cuáles son las dimensiones de la alberca rectangular que se construyó?  
Base: \_\_\_\_\_

Altura: \_\_\_\_\_

• Si el área de la nueva alberca se construyó de modo similar a la de la figura B, es decir, a partir de un cuadrado de lado  $2x$  y su área, es de  $4x^2 + 14x + 12$ , ¿cuántas unidades aumentó?

Largo: \_\_\_\_\_

Ancho: \_\_\_\_\_

• Expliquen cómo encontraron ambos valores.

2. Compara tus resultados con los de tus compañeros, expresa ante el grupo la estrategia que llevaste a cabo para validar tus resultados.

3. Escribe en tu cuaderno la forma en que pondrías en práctica el uso de las ecuaciones cuadráticas para resolver problemas en tu vida cotidiana; compártelo con tus compañeros.

**USA LAS TIC**



En la siguiente página electrónica <http://www.disfrutalasmaticas.com/algebra/ecuaciones-cuadraticas-solucionador.html> (Consultada el día 2 de diciembre de 2016, a las 11:38 horas), encontrarás un solucionador de ecuaciones cuadráticas que te puede ser de utilidad para comprobar tus resultados. Después de tu visita comenta con tus compañeros y tu profesor, ¿cuál debe ser el uso más adecuado que puedes hacer de este recurso?

Eje temático	Forma, espacio y medida
Tema	Figuras y cuerpos
Contenido 2	Construcción de figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y análisis de sus propiedades.

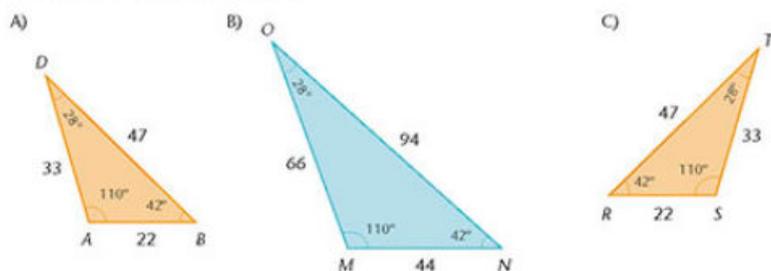


ACUÉRDATE DE...



En la vida cotidiana, es común encontrarnos con figuras que son iguales entre sí en todos sus aspectos o que son muy parecidas, por ejemplo, algunas tienen la misma forma pero distinto tamaño; con los triángulos en geometría ocurre un caso particular.

1. Analicen los siguientes triángulos y respondan lo que se les indica. Consideren que en temas anteriores ya han estudiado la construcción de triángulos con base en ciertos datos y han analizado las condiciones de posibilidad y unicidad de las construcciones.



- ¿Cuáles son las principales características que permiten asegurar que los triángulos A y C son idénticos?
- ¿Consideran que al comparar los triángulos A y C con el triángulo B tienen la misma forma? ¿Cómo se puede comprobar esto?
- ¿Qué características consideran que nos permiten asegurar que a pesar de tener tamaños distintos los triángulos A y B tienen la misma forma?

**Glosario**

**Razón.** Cociente de dos números o dos cantidades que se comparan entre sí.

- ¿Qué razón geométrica se obtiene al relacionar sus ángulos homólogos?
- Seleccionen una pareja de triángulos que tengan la misma forma, pero que sean de distinto tamaño. ¿Qué pueden decir de sus ángulos?

- ¿Qué razones se obtienen al comparar las parejas de lados correspondientes?

2. Tomen una hoja cuadrículada, tracen un triángulo a su gusto y de buen tamaño, que coincida con los vértices de la cuadrícula, tracen ahora dos triángulos que tengan la misma forma pero que sean de distinto tamaño: uno al doble de tamaño y otro a la mitad.

a) ¿Qué diferencias hay entre dos triángulos que tienen ángulos y lados iguales con los que tienen ángulos iguales y lados proporcionales.

3. Comparen sus respuestas con las que obtuvieron otros compañeros y argumenten cómo fue que respondieron la actividad; por último, concluyan mencionando cuáles condiciones deben cumplir dos triángulos de distinto tamaño para que tengan la misma forma.

Para tener en cuenta

El triángulo es un polígono que tiene algunas peculiaridades, por ejemplo, es el único polígono indeformable y es el que tiene el menor número de lados, por estas características es muy utilizado en la construcción de puentes, edificios, estructuras de soporte, etcétera, de ahí la importancia que tiene encontrar las relaciones entre los triángulos, sus ángulos y sus lados.

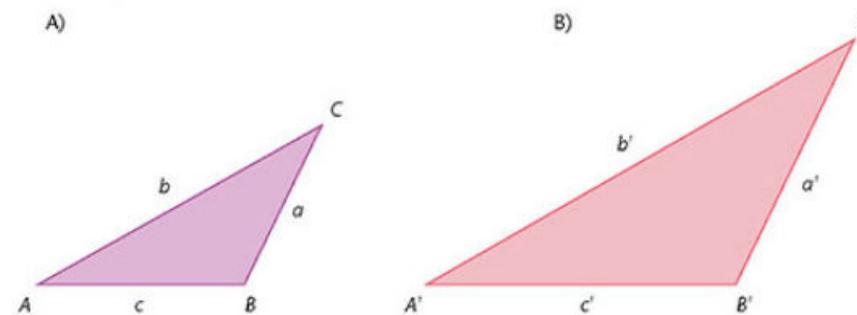


PRACTICALO



Actividad 2.1

1. Analicen los siguientes triángulos y diseñen una estrategia que les permita saber si sus lados son proporcionales y sus ángulos iguales.



- ¿De qué manera pueden saber si estos dos triángulos tienen la misma forma?
- ¿Encontraron algún tipo de correspondencia entre ambas figuras? Expliquen, ¿por qué ocurrió esto?
- ¿Cómo determinarían las medidas de los ángulos internos?
- ¿Cuáles ángulos son correspondientes entre sí? = = =
- ¿Existe alguna relación entre los lados de ambos triángulos? ¿Por qué ocurre esto?
- ¿De qué manera se puede expresar esta relación entre los lados y comprobar que es correcta?
- ¿En qué unidades consideran que es más conveniente expresar la longitud de los lados? Expliquen, ¿por qué?
- Registren la medida de cada uno de los lados en las figuras en las unidades que seleccionaron.  
 $a =$  \_\_\_\_\_  $b =$  \_\_\_\_\_  $c =$  \_\_\_\_\_  
 $a' =$  \_\_\_\_\_  $b' =$  \_\_\_\_\_  $c' =$  \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es la razón de los lados correspondientes?

2. Comparen sus respuestas con las de otros equipos, y concluyan por qué la razón entre los lados correspondientes es uno o menor de uno.

**Para leer más**

Para indicar que dos triángulos son semejantes se utiliza el símbolo  $\sim$ , por ejemplo:  $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ ; y se lee: el triángulo  $ABC$  es semejante al triángulo  $A'B'C'$ .



**PRACTICALO**

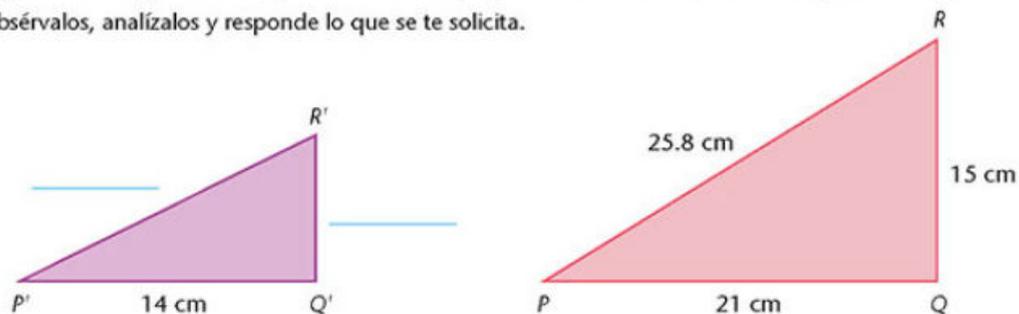


**Actividad 2.2**

Los triángulos rectángulos son muy importantes, pues el hecho de que tengan un ángulo recto los hace muy útiles en la vida cotidiana, por ejemplo, cuando se sujeta una antena con un tensor o cuando se quiere encontrar la distancia entre dos puntos perpendiculares; esto ocurre por la relación que se les puede dar con las líneas horizontales y verticales con las que convivimos a diario y que, por supuesto, son perpendiculares. Traza en tu cuaderno algunas cosas u objetos de tu vida cotidiana que se relacionen con los triángulos rectángulos, puedes iniciar con la antena, con tensores o con los soportes para un librero.

1. Los siguientes triángulos rectángulos tienen lados proporcionales. El  $\Delta P'Q'R'$  es la imagen del  $\Delta PQR$ .

a) Obsérvalos, analízalos y responde lo que se te solicita.



- ¿Cuál será el valor de las medidas de los segmentos  $\overline{P'R'}$  y  $\overline{Q'R'}$  del  $\Delta P'Q'R'$ ?
- Explica cómo los obtuviste.
- Establece las razones entre los lados homólogos de ambos triángulos en el orden  $\Delta P'Q'R'$  y  $\Delta PQR$ . Simplifícalas.
- ¿Cómo son estas razones simplificadas?  
¿Por qué?
- Si se hubieran tomado primero los elementos del  $\Delta PQR$  y en segundo lugar los del  $\Delta P'Q'R'$ , ¿cuál sería la razón resultante?

b) Con base en los ejemplos que planteaste anteriormente, en tu cuaderno reproduce dos de los triángulos previos. Elabóralos con las mismas medidas; al terminar, responde lo que se pide.

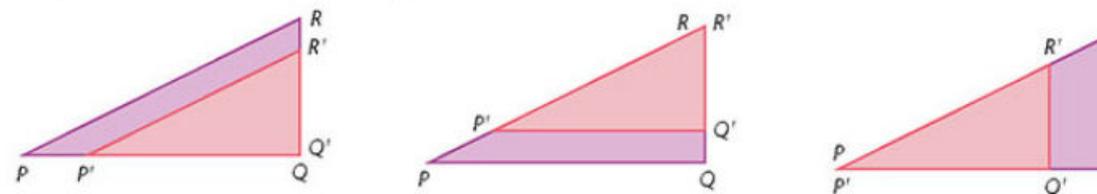
- ¿Qué medidas tomaste como base para poder reproducir los triángulos?
- ¿Consideras que puede haber otra manera de reproducirlos?

Justifica tu respuesta.

c) En tu cuaderno, traza un triángulo de un tamaño intermedio entre los dos triángulos dados.

- ¿Qué estrategia utilizaste para trazarlo?
- ¿Qué medidas utilizaste?
- ¿Cómo puedes comprobar que efectivamente sus dimensiones son proporcionales y sus ángulos iguales a los otros dos?

2. En las siguientes figuras se ha superpuesto la imagen sobre el triángulo original haciendo coincidir, en cada caso, el vértice de cada uno de los ángulos.



a) Observa y responde.

- ¿Cómo son entre sí los lados de los triángulos que se encuentran opuestos al ángulo común?
- ¿Consideras que al superponer dos triángulos que tienen la misma forma y hacer coincidir uno de sus vértices siempre quedarán sus lados paralelos?
- Explica tu respuesta.
- ¿Cómo determinarías la razón o constante de proporcionalidad?
- ¿De qué manera comprobarías que es correcta?
- ¿Cómo puedes utilizar este dato para construir un triángulo que sea diferente a los triángulos dados?
- ¿La razón o constante de proporcionalidad que se obtiene fue constante?  
¿Por qué?

3. ¿Cuáles son las condiciones necesarias para afirmar que dos triángulos de distinto tamaño tienen la misma forma?



**PRACTICALO**



**Actividad 2.3**

1. Hasta ahora se han trabajado las relaciones proporcionales entre los lados de un triángulo, analicemos ahora esta relación con base en algunos cuadriláteros, analicen la siguiente situación. En una tienda de regalos de Teotihuacan tienen fotografías de la Pirámide del Sol que están a escalas proporcionales entre sí.

a) Observen los dos ejemplos y, con los datos proporcionados, respondan lo que se pide.

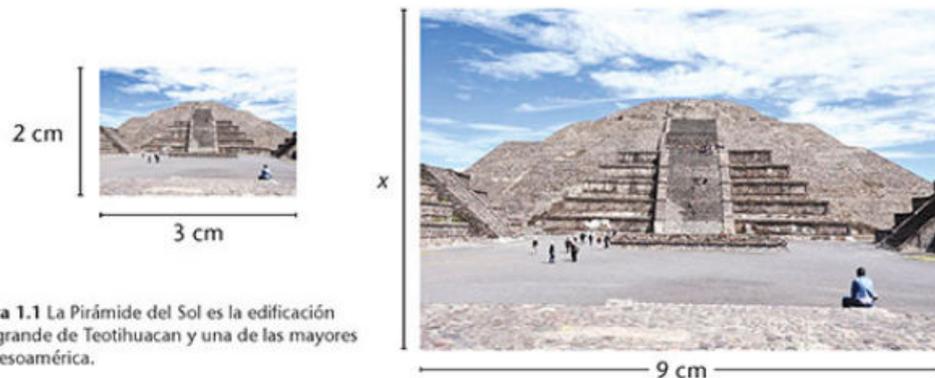


Figura 1.1 La Pirámide del Sol es la edificación más grande de Teotihuacan y una de las mayores de Mesoamérica.

- ¿Cuánto mide el lado marcado con  $x$ ? \_\_\_\_\_
  - Si la mayor fuera la original, ¿cuál es la escala? \_\_\_\_\_
  - Si la menor fuera la original, ¿cuál es la escala? \_\_\_\_\_
  - ¿Cuál sería la razón entre los lados homólogos si las dos figuras fueran iguales? \_\_\_\_\_
  - Se tiene una ampliación cuando la escala es: \_\_\_\_\_
  - Se tiene una reducción cuando la escala es: \_\_\_\_\_
  - Justifiquen su respuesta. \_\_\_\_\_
  - ¿Consideran que existe alguna otra manera de llegar al resultado? \_\_\_\_\_  
Expliquen su respuesta. \_\_\_\_\_
2. Ahora tracen en su cuaderno dos cuadrados de diferente tamaño, de manera que puedan calcular la razón de sus lados que hay entre ellos.
- ¿Qué estrategia utilizaron para encontrar las medidas adecuadas? \_\_\_\_\_
  - ¿Cómo son entre sí las razones? Exprésenlas de manera simplificada. \_\_\_\_\_
  - ¿Cómo comprobamos la proporcionalidad? \_\_\_\_\_
3. Expliquen con sus propias palabras, ¿cuál consideran que es la importancia de la proporcionalidad? y justifiquen su opinión. \_\_\_\_\_
4. ¿Cuál es la condición que se necesita para que dos rectángulos tengan la misma forma pero tamaño distinto? \_\_\_\_\_
5. Comparen y confronten sus respuestas y con la ayuda del profesor determinen si hay alguna diferencia en la forma de obtener la razón entre sus lados y la aplicación de la proporción en cuadriláteros, en comparación con los triángulos usados en las actividades anteriores.



PRACTICALO



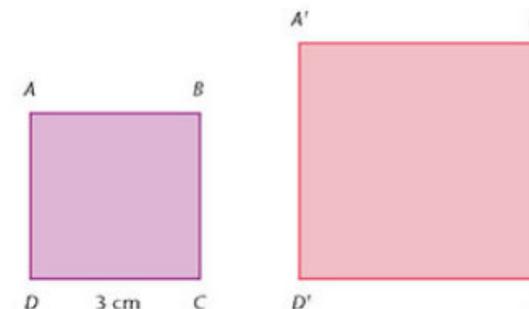
Actividad 2.4

1. En una imprenta están elaborando tarjetas rectangulares y cuadradas de varios tamaños, pero desean que tengan una relación proporcional, analicen estas situaciones y respondan las preguntas.

a) Los lados correspondientes de dos rectángulos están en razón de un medio. Si los lados del rectángulo original miden 7 cm de largo y 5 cm de ancho, tracen en su cuaderno la figura correspondiente y respondan, ¿cuáles son las dimensiones de su imagen?

- Expliquen cómo obtuvieron el valor de cada lado del segundo rectángulo. \_\_\_\_\_
- Analicen cómo son entre sí los ángulos correspondientes. \_\_\_\_\_
- En relación con los ángulos, ¿sucede lo mismo con todos los rectángulos? \_\_\_\_\_
- ¿Cómo pueden determinar si los dos rectángulos efectivamente tienen la misma forma? \_\_\_\_\_

b) Si se toman dos de las tarjetas que tienen forma cuadrada y se sabe que están a razón de  $\frac{3}{2}$ , y uno de los lados del cuadrado original mide 3 cm, ¿cuánto miden los lados de la otra tarjeta?



- ¿Qué estrategia utilizaron para resolver esta situación? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es la relación de los lados y los ángulos entre ambos cuadrados? \_\_\_\_\_
- ¿Si un cuadrado distinto se relaciona con cualquiera de los cuadrados dados sus lados, ¿serán correspondientes sus lados? \_\_\_\_\_
- ¿Por qué? \_\_\_\_\_
- Si se agregan otros dos cuadrados de distintos tamaños y de entre todos se toman dos de manera aleatoria, ¿es posible asegurar que sus lados tienen la misma razón? \_\_\_\_\_ ¿Por qué? \_\_\_\_\_

2. Comparen sus respuestas y construcciones con las de algunos de sus compañeros, y con la ayuda del profesor indiquen cuál es la relación entre los lados y la razón de cada uno.



PRACTICALO



Actividad 2.5

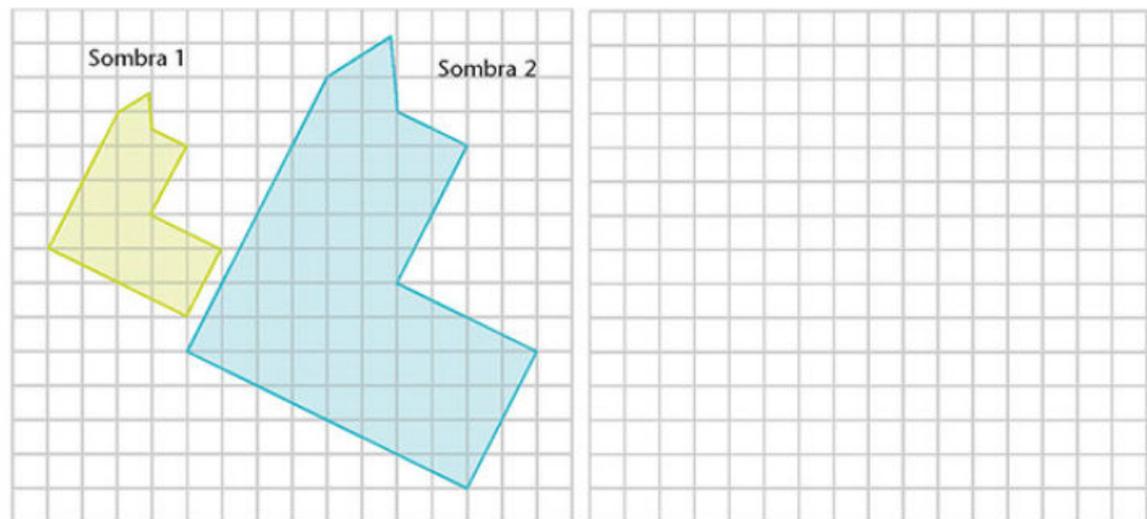
1. Durante una clase de dibujo técnico, el profesor de Ana utilizó una figura que fue proyectada sobre una superficie cuadriculada a dos distancias distintas formando las siguientes sombras.

- a) Observen las figuras y contesten las preguntas.
- ¿De cuántos polígonos consideran que está compuesta la figura? \_\_\_\_\_
  - ¿De qué polígonos se trata? \_\_\_\_\_

- ¿De qué manera se relacionan entre sí estas sombras?
- ¿Qué estrategia utilizaron para llegar a esta conclusión?
- ¿Cómo es posible comprobar si la medida de sus ángulos entre ambas sombras son correspondientes?
- ¿Cuántas veces es mayor la sombra 2 en comparación con la 1? ¿Cómo determinaron esta relación?

b) En la cuadrícula, tracen una figura que represente el triple de la sombra 1.

- ¿Qué estrategia utilizaron para trazar la figura?
- ¿Cómo determinaron la ubicación del punto de inicio?
- ¿De qué manera es posible comprobar que las tres sombras tienen la misma forma?



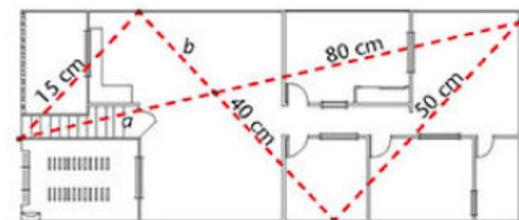
- Lleven a cabo una actividad similar a ésta en su cuaderno, recorten alguna imagen de revista, fotografía o periódico y después de proyectar una sombra, tracen una que sea la mitad de su tamaño y otra que sea el doble. Si no cuentan con los medios para proyectarla, pueden simplemente marcar el contorno con un lápiz directamente sobre el papel.
- Comparen sus resultados y con la ayuda del profesor determinen cuál es la importancia que tiene el análisis y la deducción para resolver situaciones como ésta.



LO QUE APRENDÍ



1. El señor Juan quiere colocar cámaras de seguridad en su departamento. El plano que diseñó muestra la ubicación con las medidas reales del plano. Encuentra las medidas de los lados  $a$  y  $b$ , y demuestra cuál es la relación que hay entre los dos triángulos, considera que los segmentos correspondientes entre ambos triángulos son paralelos.



- Explica cómo encontraste el valor de estos segmentos.
- Escribe el planteamiento que se debe realizar para poder calcular los valores de  $a$  y  $b$ .
- ¿La posición de los triángulos permite determinar si tienen la misma forma? ¿Por qué?
- ¿Cuál es la razón entre sus lados correspondientes?
- ¿Se presentan ángulos correspondientes? ¿Por qué?
- Si ahora utilizas alguno de los valores encontrados,  $a$  o  $b$ , ¿cómo harías el planteamiento para comprobar que el lado indicado con el número 15, en efecto, corresponde proporcionalmente al de la incógnita?

2. Compara y confronta tus respuestas con las de otros compañeros, y con la asesoría de su profesor establezcan, en grupo, la diferencia entre congruencia y semejanza.

Desarrolla tus habilidades

- Para elaborar calendarios de exhibición y calendarios de mesa con base triangular se presentaron dos propuestas, la condición es que todos tengan la misma forma. Para investigar cuál de ellas es la adecuada reúnanse en parejas, resuelvan estas dos propuestas y elaboren una conclusión.
  - La longitud de los lados de un triángulo son 125 cm y 130 cm y el ángulo comprendido entre ellos es de  $45^\circ$ . Otro triángulo tiene lados de 26 cm y 25 cm y el ángulo entre ellos es de  $45^\circ$ .
  - Un triángulo tiene un lado de longitud 10 cm y 25 cm, y el ángulo comprendido entre ellos es de  $94^\circ$ . Otro triángulo tiene lados de 110 cm y 275 cm y el ángulo comprendido entre ellos es de  $86^\circ$ .
    - ¿En cuál de los dos problemas anteriores es posible construir los triángulos con lados proporcionales?
    - Expliquen su respuesta.
    - ¿Cuál de las dos propuestas es la que se utilizará para elaborar los calendarios?
- ¿Cuál es la utilidad de poder determinar la relación proporcional entre dos figuras?

USALAS TIC



En la siguiente página encontrarás un programa interactivo que te permitirá practicar los criterios de semejanza y comprobar los ejercicios que hagas. Contrasta lo que aprendas en esa página con lo que aprendiste en este contenido y comparte esta experiencia con tus compañeros de grupo. Con ayuda de tu profesor elabora un comentario que explique cuál fue la utilidad de visitar esta página.  
<http://www.tec-digital.itcr.ac.cr/revistamatematica/GeometriaInteractiva/III Ciclo/Nivel IX/Concepto de Semejanza/Semejanza de Triangulos.htm#> (Consultada el día 2 de diciembre de 2016, a las 11:53 horas).

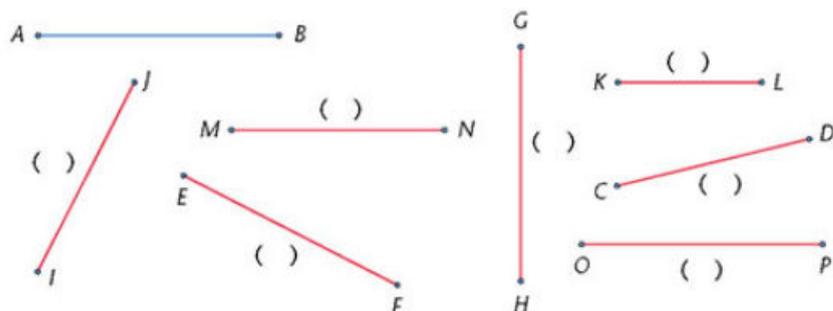
Eje temático	Forma, espacio y medida
Tema	Figuras y cuerpos
Contenido 3	Explicitación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada.



ACUÉRDATE DE...



1. Observen el siguiente conjunto de segmentos, éstos representan la medida de distintas agujas de canavá producidas en una fábrica; se requiere encontrar aquellos que sean idénticos al  $\overline{AB}$ , encuentren cuántos segmentos son congruentes al  $\overline{AB}$  y colóquenles una marca en el paréntesis correspondiente.



- ¿Qué segmentos son congruentes con  $\overline{AB}$ ?
- Describan de qué manera lo determinaron.
- Nombren qué instrumentos del juego de geometría utilizaron para determinarlo.  
¿Por qué?
- ¿Existe alguna otra manera de determinar la igualdad entre los segmentos?
- Expliquen su respuesta.

2. Contrasten sus respuestas con las de otros compañeros de grupo y comparen la estrategia que siguieron para encontrar esta congruencia. Con ayuda del profesor examinen cada una y determinen la que consideren más adecuada.



PRACTÍCALO

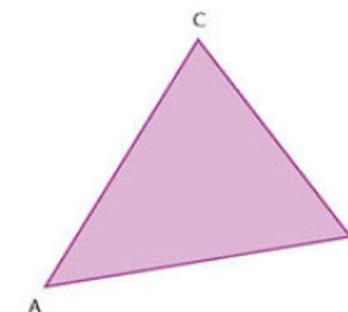


Actividad 3.1

En grados anteriores aprendieron a utilizar el juego de geometría para reproducir figuras geométricas sencillas, como los polígonos. Los datos para reproducir una figura pueden ser de distintos tipos, el más sencillo es reproducir una figura idéntica a otra dada.

1. Reproduzcan en su cuaderno el siguiente triángulo. Asegúrense de que la figura sea la misma y de que las medidas coincidan totalmente. Encuentren una forma de comprobar que dichos triángulos son congruentes.

- Expliquen cuál es la estrategia que utilizaron para construir el triángulo.
- ¿Qué instrumentos de su juego de geometría utilizaron?
- Si trazan una línea horizontal que pase por los vértices del triángulo original, ¿coincide con los vértices del triángulo que trazaron?
  - ¿Por qué ocurrió esto?
- ¿Consideran que hay alguna otra forma de reproducir esta figura?
  - Expliquen su respuesta.



2. Comparen su triángulo congruente con el de los otros compañeros, y con la ayuda del profesor analicen las estrategias que utilizaron y determinen, ¿cuál es la que consideran más adecuada?

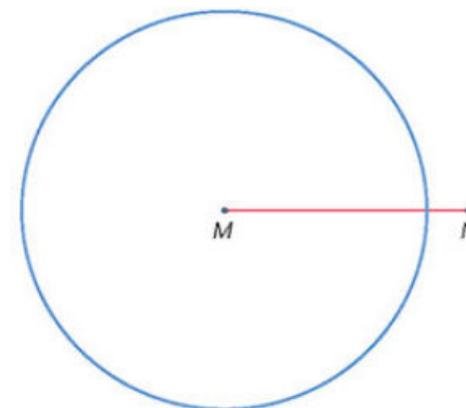


PRACTÍCALO



Actividad 3.2

- En la siguiente figura, el segmento  $\overline{MN}$  mide 6 cm y el radio de la circunferencia, con centro en  $M$ , mide 4 cm.
  - Elijan tres puntos de la circunferencia que no sean **colineales** con los puntos  $M$  y  $N$  (que pertenezcan a la misma recta), y denótenlos como  $P_1$ ,  $P_2$  y  $P_3$ , respectivamente.



**Glosario**

**Colineal.** Se refiere a dos o más puntos que se encuentran sobre una misma línea.

- Tracen el triángulo  $\Delta MNP_1$ , ¿cuánto miden los lados diferentes a  $\overline{MN}$ ?  
 $\overline{NP}_1 =$  \_\_\_\_\_  $\overline{MP}_1 =$  \_\_\_\_\_
- Tracen el triángulo  $\Delta MNP_2$ , ¿cuánto miden los lados diferentes a  $\overline{MN}$ ?  
 $\overline{NP}_2 =$  \_\_\_\_\_  $\overline{MP}_2 =$  \_\_\_\_\_
- Tracen el triángulo  $\Delta MNP_3$ , ¿cuánto miden los lados diferentes a  $\overline{MN}$ ?  
 $\overline{NP}_3 =$  \_\_\_\_\_  $\overline{MP}_3 =$  \_\_\_\_\_
- ¿Los triángulos que trazaron, son iguales o distintos? \_\_\_\_\_ ¿Por qué?

- ¿Qué condición se tendría que cumplir para que al menos dos triángulos tuvieran la misma forma? \_\_\_\_\_
- ¿Sería posible que los tres triángulos tuvieran la misma forma? Justifiquen su respuesta. \_\_\_\_\_
- ¿En qué influye que los tres puntos se deban colocar sobre la circunferencia para que los tres triángulos fueran iguales, aunque estén en distinta posición? \_\_\_\_\_

2. Comparen sus triángulos con los de otros equipos y con la asesoría de su profesor expliquen si se pueden colocar más de dos puntos en la circunferencia para encontrar triángulos que sean congruentes entre sí.



**PRACTICALO**



**Actividad 3.3**

1. En la actividad anterior analizaron triángulos con algunos lados comunes, ahora observen el triángulo  $\triangle XYZ$  y el  $\triangle OPQ$ , analícenlos y con base en las conclusiones de la actividad anterior contesten lo que se les indica.

- ¿Cuál es la relación entre los segmentos que forman los lados de ambos triángulos? \_\_\_\_\_
- ¿Es posible determinar algún tipo de correspondencia entre ellos? \_\_\_\_\_ Expliquen por qué. \_\_\_\_\_

• Entonces, ¿existe alguna relación de congruencia o semejanza entre ellos? Justifiquen su respuesta.

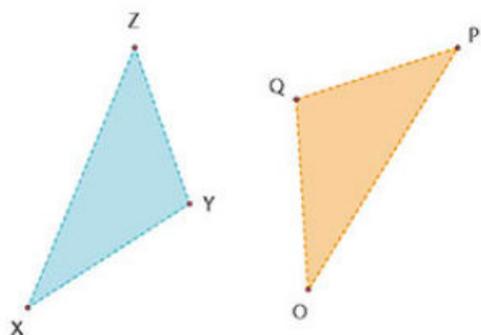
• ¿Qué características presentan los ángulos internos al contrastar ambos triángulos?

• ¿De qué manera se puede establecer una definición formal para explicar la relación entre los ángulos internos de los dos triángulos?

• ¿Qué procedimiento utilizaron para establecer la relación entre los lados?

• ¿Qué estrategia utilizaron para determinar la relación entre los ángulos internos?

• ¿A qué conclusión pueden llegar después de contrastar y analizar ambas figuras?



2. Comparen sus respuestas con las de otros compañeros, y con la asesoría de su profesor determinen las condiciones de congruencia entre dos triángulos y expliquen de forma breve, ¿cuál es la estrategia que consideran más adecuada para demostrar que efectivamente son congruentes entre sí?

**Para tener en cuenta**

En la actividad anterior trabajaste con el criterio de congruencia de triángulos LLL. Para denotar que dos triángulos son congruentes se utiliza el símbolo  $\cong$ , por lo que  $\triangle ABC \cong \triangle OPQ$ , se lee, "el triángulo ABC es congruente con el triángulo OPQ".

Si dos triángulos poseen dos lados correspondientes iguales y el ángulo entre ellos es igual al ángulo entre los correspondientes, entonces se dice que son congruentes. Éste es el segundo criterio para la congruencia de triángulos y se denota como LAL (Lado-Ángulo-Lado).

Cuando dos triángulos poseen dos ángulos correspondientes iguales y el lado común a dichos ángulos mide lo mismo que ambos triángulos, entonces se dice que éstos son congruentes. Éste es el tercer criterio para la congruencia de triángulos y se denota por ALA (Ángulo-Lado-Ángulo).



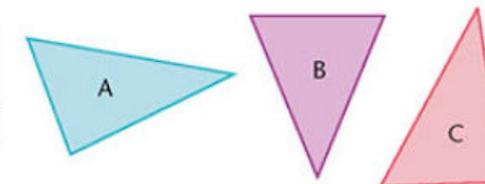
**PRACTICALO**



**Actividad 3.4**

1. Lean y analicen la siguiente situación. Contesten lo que se les pide.

a) Para hacer los banderines de una escuela se requiere que los triángulos tengan la misma forma y el mismo tamaño. De los siguientes triángulos dos de ellos tienen un lado de 5 cm y otro de 3 cm, ambos tienen a su vez un ángulo de  $60^\circ$  comprendido entre estos dos lados.



- ¿Cuál de los triángulos anteriores son congruentes entre sí?
- Expliquen la estrategia de cómo lo determinaron.

• ¿Los triángulos A y C son congruentes? \_\_\_\_\_ ¿Por qué? \_\_\_\_\_

• ¿Y los triángulos B y C?

• ¿Cuáles son los triángulos que se deben seleccionar para hacer los banderines?

b) Arturo y Luis quieren hacer propuestas distintas; a partir de los datos que se proporcionan, construyan los triángulos en su cuaderno y compárenlos con los de los demás equipos.

Arturo: lados: 4 cm y 3 cm, ángulo entre lados:  $90^\circ$

Luis: 2 lados de 6 cm cada uno, ángulo entre lados:  $45^\circ$

- ¿Qué instrumentos de su juego de geometría utilizaron?
- Comparen sus triángulos con otros equipos, ¿son o no congruentes?
- Si rotaran cada figura  $45^\circ$ , ¿se mantiene la congruencia de ambos triángulos? \_\_\_\_\_ ¿Por qué?

2. Comparen sus respuestas y construcciones con otros equipos. Con la asesoría de su profesor comenten por qué si dos triángulos tienen lados cuyas medidas son iguales que el ángulo comprendido entre ellos, necesariamente son congruentes.



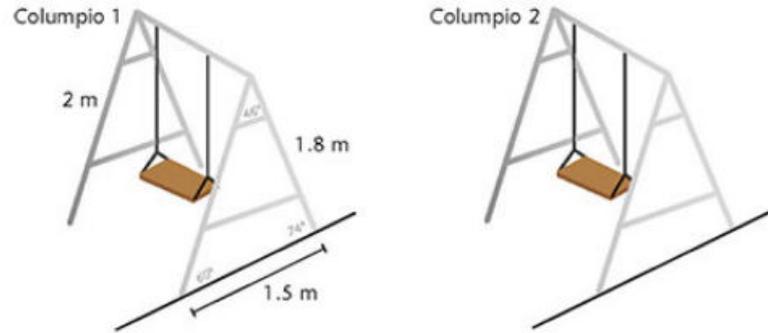
**PRACTICALO**



**Actividad 3.5**

1. Lean con atención la siguiente condición, realicen y contesten lo que se les indica.

a) En un parque se quiere poner otro columpio al lado del que ya está. Para que se vea bien y sea seguro, se necesita que sea igual al anterior, observen la imagen y contesten las preguntas.



- Para elaborar el nuevo columpio, ¿cuáles de las 6 medidas indicadas son más útiles y permiten construir otro igual? \_\_\_\_\_
- ¿Cuáles son los datos que tomaron? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es la cantidad mínima de datos necesarios para poder realizar esta construcción? \_\_\_\_\_

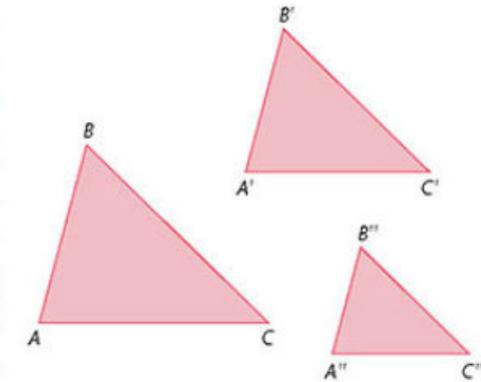
b) Apliquen la estrategia que utilizaron y ahora construyan un triángulo de manera que dos de sus ángulos sean de  $40^\circ$  y  $15^\circ$ , respectivamente, y que el segmento de la base del triángulo tenga una medida de 6 cm.

- ¿Cuánto miden los otros dos lados? \_\_\_\_\_ ¿Cuánto debe medir el tercer ángulo? \_\_\_\_\_  
¿Por qué? \_\_\_\_\_

2. Así como en las bases de un columpio, en la vida cotidiana hay muchas cosas que utilizan triángulos. Ahora estudiaremos algunos de manera específica. En una hoja de papel diseñen y corten tres triángulos de diferente tamaño, pero con la misma forma. Realicen la actividad y luego utilicen sus propios triángulos para validar sus conclusiones. En cada uno de los triángulos de la página siguiente, anoten las medidas correspondientes de los ángulos internos y de sus lados.

- Expliquen de qué manera se puede establecer la relación entre las medidas de los ángulos internos de los tres triángulos. \_\_\_\_\_

- ¿Qué estrategia utilizaron? \_\_\_\_\_
- ¿De qué manera es posible comprobar esta relación? \_\_\_\_\_
- ¿Entonces se puede decir que los tres triángulos son congruentes entre sí? \_\_\_\_\_  
¿Por qué? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es la estrategia que se puede usar para determinar si dos triángulos son congruentes, si sólo se tiene como dato un lado y los ángulos comprendidos en sus extremos? \_\_\_\_\_



3. A partir de los datos que se dan en cada inciso, construyan los triángulos y compárenlos con los que construyeron otros compañeros cercanos.

a) Lado  $\overline{AB} = 5$  cm

Ángulos adyacentes a  $\overline{AB}$ :  $60^\circ$  y  $45^\circ$

b) Lado  $\overline{MN} = 7$  cm

Ángulos adyacentes a  $\overline{MN}$ :  $45^\circ$  y  $45^\circ$

- ¿Cuál es la longitud de los lados del triángulo a? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es la amplitud de su tercer ángulo? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es la longitud de los lados del triángulo b? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es la amplitud de su tercer ángulo? \_\_\_\_\_
- ¿En qué son congruentes ambos triángulos? \_\_\_\_\_
- ¿Será posible identificar si un triángulo es congruente, conociendo únicamente los ángulos internos de ambos? \_\_\_\_\_ ¿Por qué ocurre esto? \_\_\_\_\_
- Si se tiene un lado y dos ángulos de un triángulo, pero uno de los ángulos no es adyacente a alguno de los extremos del lado conocido, ¿es posible identificar otro triángulo que sea congruente? Expliquen su respuesta. \_\_\_\_\_

4. Comparen sus respuestas y sus triángulos con otros compañeros; con la asesoría de su profesor, comenten por qué si dos triángulos tienen dos ángulos correspondientes iguales, no se puede garantizar que sean congruentes.



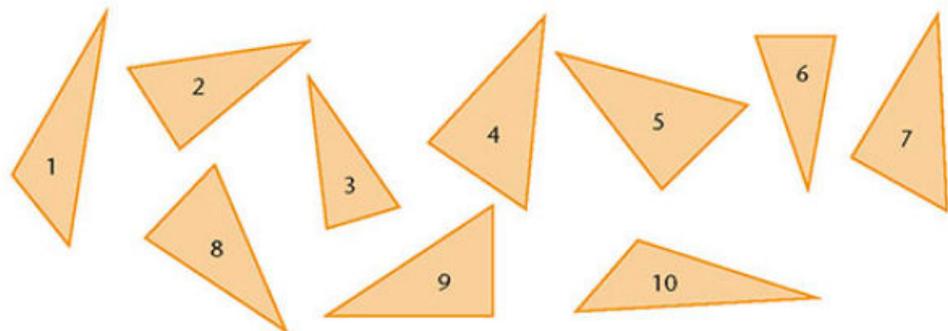
**PRACTICALO**



**Actividad 3.6**

1. Durante una práctica en la clase de matemáticas, Alicia se enfrentó a un reto que planteó el profesor, donde debía mostrar su capacidad de análisis y deducción para identificar figuras. Ayuden a Alicia con su problema, para ello, analicen los siguientes triángulos.

a) Hay 5 parejas de triángulos congruentes entre ellos, determinen cuáles son. Apoyéense en todo lo que han aprendido hasta ahora y, de ser necesario, utilicen su juego de geometría para medir los lados y los ángulos.



• Registren en la siguiente tabla los triángulos que son congruentes.

Pareja 1	Pareja 2	Pareja 3	Pareja 4	Pareja 5

- ¿Qué estrategia utilizaron para encontrar las parejas? \_\_\_\_\_
- De los criterios de congruencia y semejanza, ¿cuáles les resultaron más útiles? \_\_\_\_\_
- ¿Encontraron triángulos que fueran semejantes? \_\_\_\_\_ ¿Por qué ocurrió esto? \_\_\_\_\_

2. Compartan sus resultados con algunos de sus compañeros y, con la ayuda del profesor, argumenten si existen diferentes procedimientos para utilizar el juego de geometría y los criterios de congruencia y semejanza al comparar dos triángulos.

**Para tener en cuenta**

**Semejanza de triángulos**

- Dos triángulos son semejantes si tienen un ángulo igual y los lados que lo forman son proporcionales.
- Si un segmento de recta une dos lados de un triángulo y es paralelo al tercer lado, los triángulos que se forman son semejantes.
- Criterio 1: dos polígonos son semejantes si tienen sus ángulos correspondientes iguales.
- Criterio 2: dos polígonos son semejantes si tienen sus lados correspondientes proporcionales.



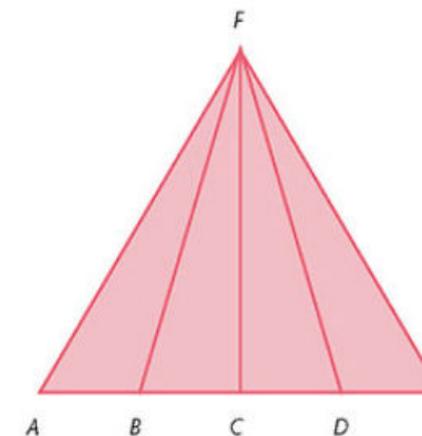
**PRACTICALO**



**Actividad 3.7**

1. Durante la olimpiada de matemáticas de una primaria presentaron una figura compuesta por varios triángulos y pidieron a algunos de los alumnos que dijeran cuántos triángulos se pueden formar, cuáles son congruentes y cuáles semejantes. Para determinarlo, observen la figura mostrada y contesten las preguntas.

- a) ¿Cuántos triángulos en total se forman en esta figura? \_\_\_\_\_
- ¿Cuántos triángulos hay que sean congruentes entre sí? \_\_\_\_\_  
Regístenlos. \_\_\_\_\_
  - ¿Es posible encontrar triángulos que sean semejantes? Justifiquen su respuesta. \_\_\_\_\_
  - ¿Es posible formar triángulos congruentes o semejantes combinando más de un triángulo a la vez? \_\_\_\_\_  
Justifiquen su respuesta. \_\_\_\_\_



- Entonces, ¿cuántos triángulos con diferentes dimensiones se pueden obtener? \_\_\_\_\_
- b) Analicemos ahora algunos de manera específica.
- ¿Con qué triángulo es congruente el  $\Delta AFB$ ? \_\_\_\_\_
  - ¿Con qué triángulo es congruente el  $\Delta BFC$ ? \_\_\_\_\_
  - Continuando con este esquema, ¿cuántas parejas más de triángulos congruentes pueden encontrar? \_\_\_\_\_
  - Fue necesario utilizar el juego de geometría para resolver esta actividad? \_\_\_\_\_  
¿Por qué ocurrió esto? \_\_\_\_\_
  - ¿Qué criterio o criterios fueron los que utilizaron para determinar la congruencia de los triángulos? \_\_\_\_\_
  - ¿Qué datos les fueron más útiles: las medidas de los lados o las medidas de los ángulos? \_\_\_\_\_  
Justifiquen su respuesta. \_\_\_\_\_

2. Comparen sus resultados con los de otro equipo, y con la ayuda del profesor comenten qué características deben considerarse para que puedan aplicar los criterios de congruencia de triángulos en una figura compuesta.

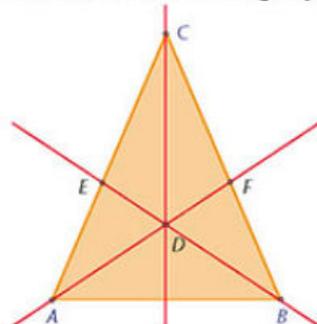


**LO QUE APRENDÍ**



1. Se construyó un triángulo isósceles, y cada uno de sus ángulos se dividió a la mitad. Analiza la imagen y responde lo que se te indica.

- ¿Cuántos triángulos individuales se formaron? \_\_\_\_\_
- ¿Cómo son esos triángulos entre sí? \_\_\_\_\_  
¿Por qué? \_\_\_\_\_



- ¿Cuántos triángulos son congruentes? \_\_\_\_\_
- ¿Qué es lo que ocasiona la formación de estos triángulos congruentes? \_\_\_\_\_
- En el punto D se unen 6 ángulos en el mismo vértice, ¿qué relación puedes encontrar entre ellos y los triángulos a los que pertenecen? \_\_\_\_\_
- Considerando como base un lado y los dos ángulos de sus extremos para cualquier triángulo, ¿qué segmento consideras que tienen en común? \_\_\_\_\_ Justifica tu respuesta \_\_\_\_\_

2. Analiza cada figura y los triángulos de color que se forman, y explica si estos triángulos son congruentes entre sí.

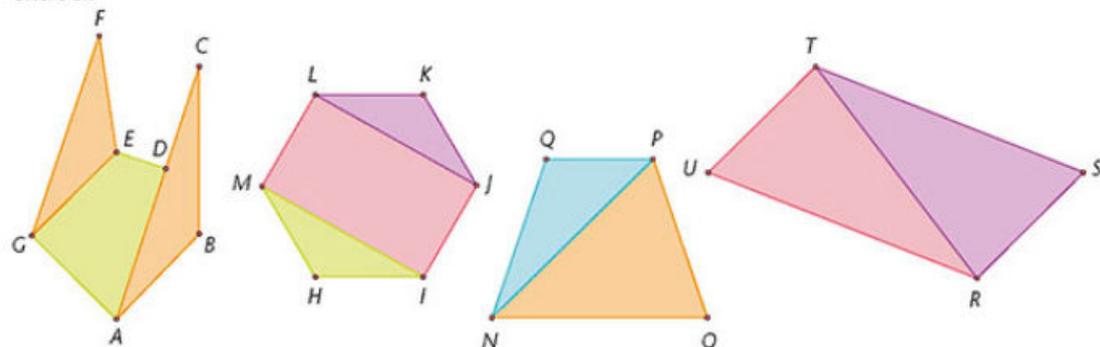


Figura 1

Figura 2

Figura 3

Figura 4

a) ¿En qué figuras los triángulos formados cumplen con el criterio de congruencia de triángulos LLL?

- Indica cuáles son los triángulos. \_\_\_\_\_

b) ¿En cuáles figuras los triángulos formados no cumplen con el criterio de congruencia de triángulos LLL?

- Indica cuáles son los triángulos. \_\_\_\_\_

3. Compara tus respuestas con las de tus compañeros, y con la asesoría de su profesor elaboren una explicación que indique por qué es posible considerar al criterio LLL como cierto para todos los triángulos congruentes.

**Desarrolla tus habilidades**

1. Las actividades manuales matemáticas siempre ayudan a mejorar la motricidad fina, toma una hoja en blanco y con ella, construye un triángulo cuya amplitud de sus ángulos internos sea  $60^\circ$  y divide a la mitad sus tres ángulos internos.

a) Con base en tu análisis, contesta y demuestra lo que se te indica.

- ¿Cómo son los triángulos que se forman? \_\_\_\_\_
- ¿Por qué ocurrió esto? \_\_\_\_\_
- ¿Se cumplen todos los criterios de congruencia? \_\_\_\_\_
- ¿Cómo lo determinaste? \_\_\_\_\_
- Justifica tu respuesta. \_\_\_\_\_
- ¿Sí se trazaran las bisectrices de un triángulo escaleno se obtendrían triángulos congruentes? ¿Por qué? \_\_\_\_\_

2. Ahora construye un cuadrado y un rectángulo de un tamaño que consideres conveniente, y traza una de sus diagonales en cada uno, responde:

- ¿Los triángulos internos que se forman en cada figura son semejantes o congruentes? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es el criterio con que puedes demostrarlo? \_\_\_\_\_
- ¿Ocurrirá esto mismo para cualquier cuadrilátero, como un trapecio o trapecoide? ¿Por qué ocurre esto? \_\_\_\_\_
- ¿Consideras que es posible determinar la congruencia de los triángulos internos de cualquier polígono regular? \_\_\_\_\_

3. Compara tus respuestas y construcciones con los de otros compañeros y, con la asesoría de del profesor, comenten si se podrían obtener triángulos congruentes al trazar las bisectrices de polígonos regulares.

**USALAS TIC**



Para que conozcas más acerca de los criterios de congruencia de triángulos visita la siguiente página: [http://tutomatematicas.com/GEO/Triangulos\\_semejantes.html](http://tutomatematicas.com/GEO/Triangulos_semejantes.html) (Consultada el día 3 de diciembre de 2016, a las 9:48 horas); aquí podrás hacer más ejercicios que te permitirán enriquecer tus conocimientos y contrastarlos con lo que ya sabes. Después de visitarla, comenta la experiencia en clase y, con la ayuda del profesor, determina: ¿cómo puedes aplicar en tu vida cotidiana lo que aprendiste?

Eje temático	Manejo de la información
Tema	Proporcionalidad y funciones
Contenido 4	Análisis de representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas) que corresponden a una misma situación. Identificación de las que corresponden a una relación de proporcionalidad.

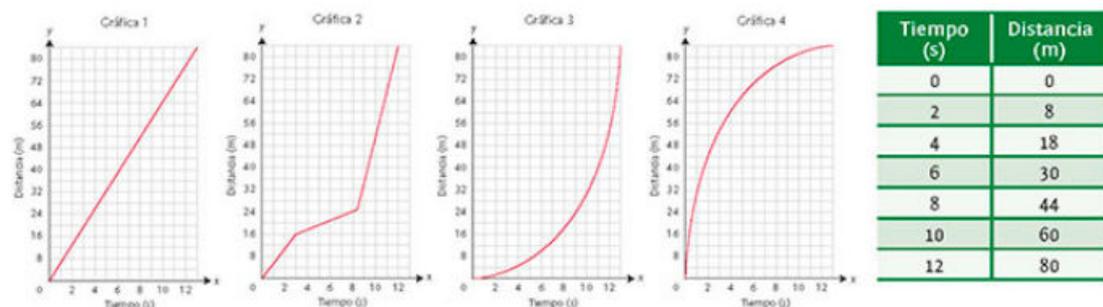


ACUÉRDATE DE...



En la clase de Ciencias del ciclo anterior revisaron el tema del movimiento y llevaron a cabo cálculos de velocidad. Lean con atención la siguiente situación, observen la tabla y las gráficas y contesten lo que se les pide.

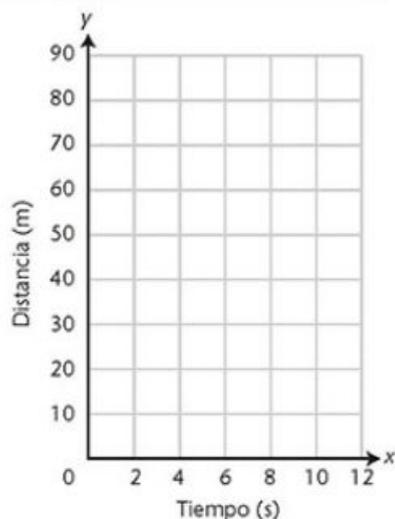
1. Luis está en tercero de secundaria, su maestro de Educación Física llevó al grupo al patio para que corran 100 m planos. Aprovechando la actividad, los alumnos decidieron graficar la distancia que recorre Luis en 2, 4, 6, 8, 10 y 12 segundos. Se obtuvieron los siguientes datos.



a) ¿Cuál de las gráficas representa tiempo-distancia, según los valores de la tabla?  
¿Por qué?

b) En el plano de la derecha, encuentren los puntos de acuerdo con la tabla de tiempo y distancia. Únanlos y compárenlos con su respuesta anterior.

- ¿Con cuál gráfica tiene similitud?
- ¿Los puntos de la gráfica son proporcionales?  
¿Por qué?
- ¿Qué distancia, aproximadamente, recorrió Luis en 5 segundos?
- ¿Qué tiempo transcurrió cuando había recorrido 45 m?
- Expliquen cómo encontraron estos valores, si no aparecen en la tabla de datos.



2. Comparen sus respuestas con las de otros compañeros y discutan por qué se comportó la gráfica de datos de esta forma, si éstos representan datos lineales y determinen qué factores provocaron este resultado.

Para tener en cuenta

La gráfica referente al recorrido de Luis es una parábola, pero sólo corresponden los valores de la derecha, ya que se midió la distancia recorrida en un tiempo dado.

Cabe señalar que cuando la gráfica es una parábola, la relación que existe es cuadrática.

Esto es, que se puede presentar una relación como  $y = 2x^2 + 3x - 4$ ,  $y = 2x^2 + 3x$ ,  $y = 2x^2 - 4$ ,  $y = 2x^2$ , etcétera, donde aparece  $x$  elevada al cuadrado, además de otros términos de grado uno y de grado cero.



PRACTICALO



Actividad 4.1

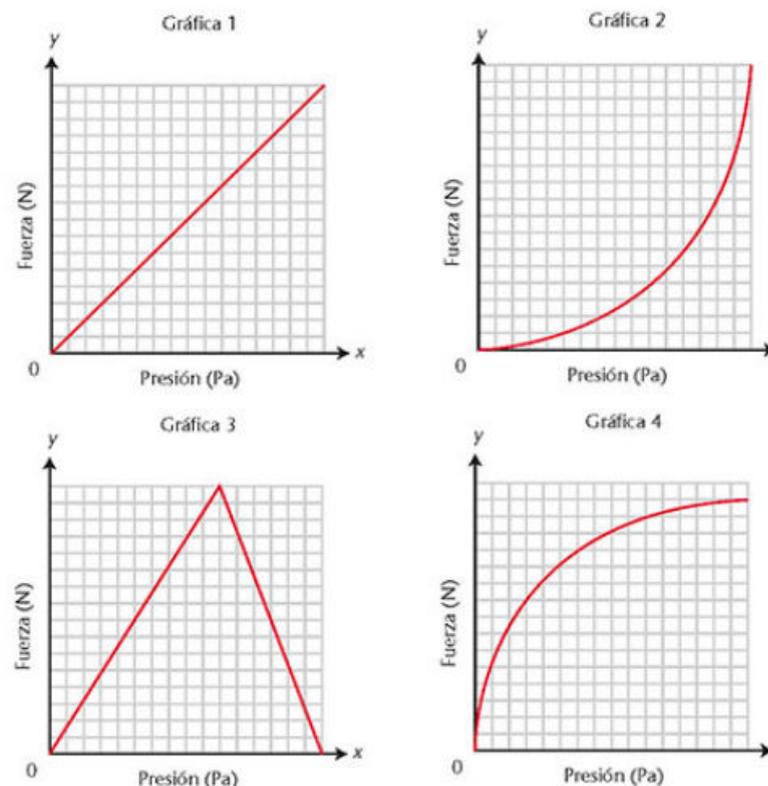
En la clase de Ciencias 2, revisaron el tema de presión, la cual se define como la fuerza que se ejerce en una unidad de área. Y está dada por la expresión  $P = \frac{F}{A}$ , donde  $F$  es la fuerza en newtons. Y  $A$  es el área cuya unidad de medida es el metro cuadrado ( $m^2$ ), por lo que la unidad de presión es el pascal (Pa). Recordando dicha fórmula, analicen y resuelvan el siguiente caso.

1. Carmen hizo un experimento en el que somete a diferentes presiones una tabla de madera de  $100 \text{ cm}^2$ : 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40 pascales.

a) ¿Cuál de las siguientes gráficas representa la fuerza que ejerció Carmen para obtener la presión hacia la tabla de madera?

**Glosario**  

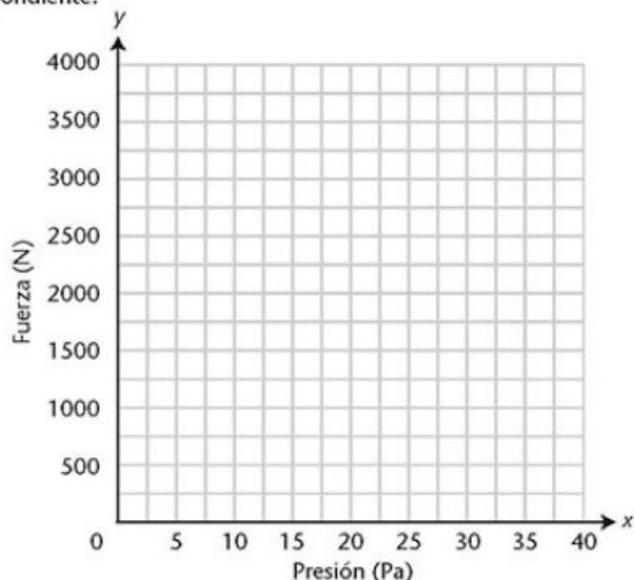
**Newton.** Es la fuerza que se aplica durante un segundo a una masa de un kilogramo para que ésta incremente su velocidad en un metro sobre segundo.



- ¿Qué tuvieron que hacer para encontrar la gráfica que corresponde a esta situación?
- Escriban la expresión algebraica que utilizó Carmen para encontrar la fuerza.
- ¿La gráfica que eligieron es proporcional? ¿Por qué?

b) Carmen quiere saber la fuerza que corresponde a la presión para cada uno de los valores de la tabla, complétala y construye la gráfica correspondiente.

Presión (Pa)	Fuerza (N)
0	
5	
10	
15	
20	
25	
30	
35	
40	



- ¿La gráfica que en un principio eligieron es igual o diferente? ¿Por qué?
- ¿Qué diferencia presenta esta gráfica con la que obtuvieron en la actividad de la sección anterior?
- ¿Qué presión experimenta la tabla de madera si se ejerce una fuerza de 1250 newtons (N)?
- ¿Qué fuerza se requirió para que la tabla de madera experimentará una presión de 27.5 Pa?
- Explica cómo obtuvieron estos dos últimos resultados.

2. Comparen sus respuestas y la gráfica obtenida con las de otros equipos, con la asesoría de su profesor repasen cuál es la expresión algebraica con la que se obtiene una gráfica de este tipo.



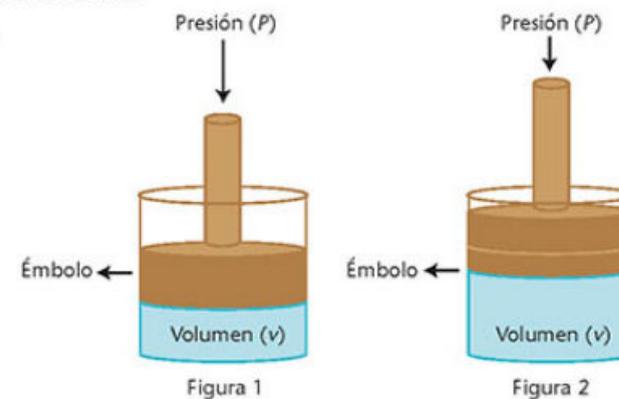
PRACTICALO



Actividad 4.2

En tu clase de Ciencias 2, también revisaste las leyes de los gases, entre las cuales está la ley de Boyle, que nos dice que la presión de un gas en un sistema cerrado es inversamente proporcional al volumen del recipiente, si y sólo si la temperatura es constante.

1. Observa las figuras.



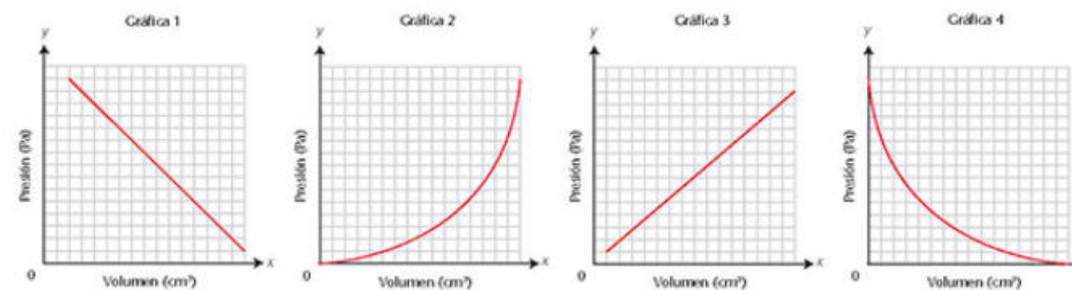
a) ¿Cómo es el volumen en ambos sistemas cerrados? ¿Y la presión?

2. Se ejerce una presión de 50 Pa sobre un volumen de 100 cm<sup>3</sup> de gas que se encuentra en un sistema cerrado, si el volumen aumenta a 125 cm<sup>3</sup>.

a) ¿Cuál será la presión sobre del gas? Explica cómo encontraste el resultado.

b) Si en el mismo sistema la presión disminuyera hasta 25 Pa, ¿cuál sería el volumen del gas? ¿Por qué?

c) ¿Cuál de las siguientes gráficas representa esta situación?



3. Completa la siguiente tabla y realiza la gráfica correspondiente a volumen-presión.

Volumen (cm <sup>3</sup> )	25	50	75	100	125	150
Presión (Pa)					40	
Volumen × Presión (m <sup>3</sup> × Pa)					5000	

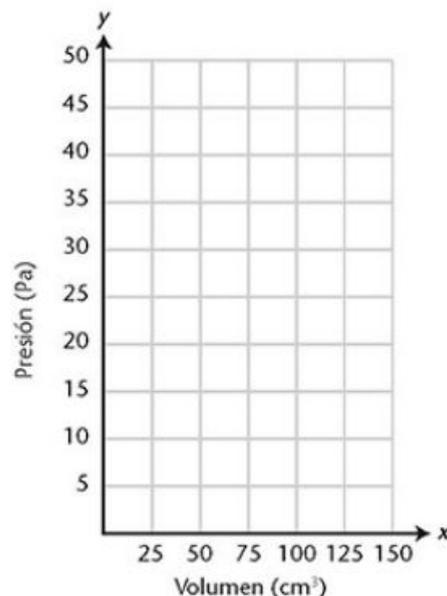
a) ¿Coincidió esta gráfica con la que elegiste anteriormente?

¿Por qué?

b) ¿Qué volumen aproximado hay en el sistema cerrado cuando la presión es de 110 Pa?

c) ¿Qué presión aproximada hay sobre el gas que se encuentra en el sistema cuando el volumen es de 130 m<sup>3</sup>?

d) Explica cómo encontraste estos dos últimos resultados.



4. Compara tus resultados y la gráfica con los de otros compañeros, con la asesoría de su profesor comenten si todas las proporciones inversas se comportan igual al graficarse.

**Para leer más**

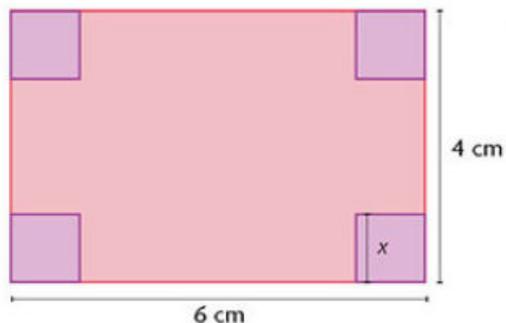
La gráfica asociada a una proporcionalidad inversa es una recta con pendiente negativa y a diferencia de la proporcionalidad directa representa que cuando un valor disminuye el otro aumenta y viceversa.

**PRACTICALO**

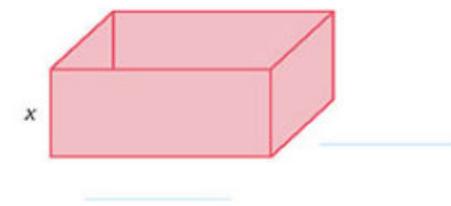
**Actividad 4.3**

1. En una fábrica de juguetes requieren una caja para un juego de mesa, para ello deben conocer el volumen máximo de la caja.

La figura 1 representa el trazo de la caja y la figura 2 es la caja armada. Obsérvenla, analícenla y respondan lo que se les indica.



a) Escriban sobre la línea de la siguiente figura la expresión matemática del largo y ancho de la caja de cartón.



• Expliquen cómo encontraron el largo y el ancho.

• ¿Cuál es la expresión matemática que representa el volumen de la caja?

• En la expresión que obtuvieron, si  $x = 0$ , ¿cuál sería el valor de  $y$ ?

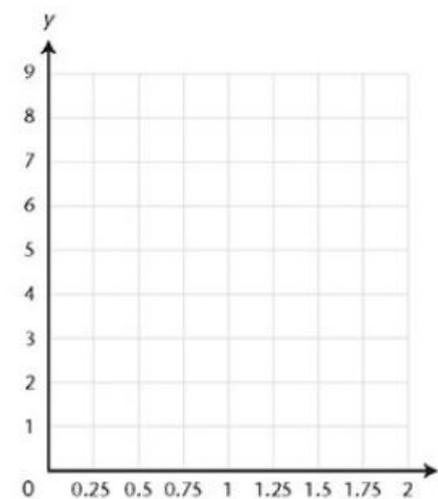
• Y si  $x = 2$ , ¿cuál es el valor de  $y$ ?

• ¿Qué significa esto en la situación?

• De acuerdo con la expresión algebraica que obtuvieron, encuentren el valor de  $y$  en la siguiente tabla.

x	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5	1.75
y							

b) Con los valores obtenidos, elaboren, en el siguiente plano, la gráfica correspondiente a esta situación.



Incluyan los valores cuando  $x = 0$  y  $x = 1$ .

• De acuerdo con la gráfica, ¿cuál es valor máximo de  $y$ ?

• Con este valor, ¿cuál es el volumen de la caja?

2. Comparen sus resultados y la construcción de su gráfica con los de otros equipos, comenten si se podría graficar una expresión cuyo exponente de  $x$  sea cuatro ( $x^4$ ).



**PRACTICALO**



**Actividad 4.4**

1. En la gráfica mostrada se observa el consumo de combustible de tres vehículos en relación con la distancia recorrida en kilómetros.

a) Analicen la gráfica y con base en los datos mostrados contesten las preguntas.

• ¿Cuál de los tres vehículos tiene un mejor rendimiento de combustible? Justifiquen su respuesta.

• ¿Cuál de los vehículos consume más gasolina por kilómetro recorrido?

• ¿Qué expresión algebraica corresponde a la recta del vehículo 1?

• ¿Cómo determinaron esta expresión?

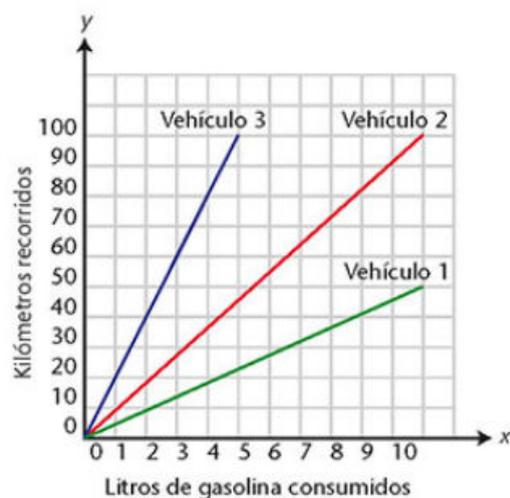
• ¿Cuál es la expresión algebraica correspondiente a la recta del vehículo 2?

• La expresión algebraica para el vehículo 3 es

• ¿Qué dato es el que cambia en estas tres rectas?

• ¿Cuál es la relación que tienen estas expresiones algebraicas con los datos de los ejes del plano cartesiano?

• ¿Hay posibilidades de que al resolver un ejercicio como éste, al momento de determinar la expresión algebraica que corresponde a alguna de las rectas, el máximo exponente sea 2? Justifiquen su respuesta.



b) Con los datos de la imagen gráfica completen las tablas.

Vehículo 1	
Litros	Kilómetros
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

Vehículo 2	
Litros	Kilómetros
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

Vehículo 3	
Litros	Kilómetros
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

• Al analizar las tablas anteriores, ¿es posible decir que existe una relación de proporcionalidad entre estas cantidades?

Justifiquen su respuesta.

2. Realicen una actividad igual a ésta, pero investiguen el consumo real de combustible de dos vehículos, por lo menos, compara tus tablas y gráficas con algunos de tus compañeros.

3. Comparen sus respuestas con las de algún equipo cercano y, con la ayuda del profesor, expliquen cuál es la relación que hay entre una expresión algebraica, la tabla que la representa y la gráfica resultante.

**Para leer más**

La expresión  $y = x(3 - 2x)(4 - 2x)$  es conocida como *cúbica*, porque al desarrollarla el resultado es  $4x^3 - 14x^2 + 12x$ , la cual presenta un término al cubo, en este caso:  $x^3$  (se lee "equis al cubo"), por lo que la gráfica asociada a esta expresión se conoce como gráfica cúbica.



**LO QUE APRENDÍ**



1. Un recipiente de  $4 \text{ m}^3$  contiene gas helio a una presión de 200 kPa (kilopascal, es decir, que es igual a 1000 Pa por unidad), si se desea guardar la misma cantidad de este gas en otros 5 recipientes de diferente volumen, ¿cuál será la presión en cada uno de ellos?

a) Completa la tabla.

Volumen del tanque ( $\text{m}^3$ )	2	4	6	8	10
Presión ejercida por el helio (kPa)					

• Escribe la expresión que relacione el volumen,  $y$ , del recipiente ( $\text{m}^3$ ) con la presión,  $x$ , en la que se encuentra contenido el helio (kPa).

b) Con los datos obtenidos realiza la gráfica correspondiente a esta situación.

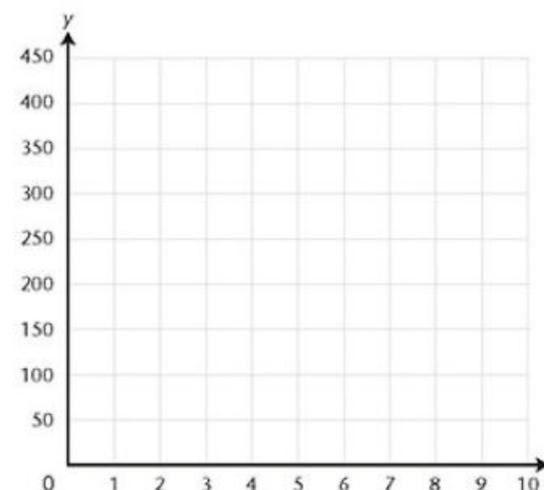
• Si se desea guardar  $280 \text{ m}^3$  de helio, ¿cuál debe ser la capacidad del recipiente?

• Si se tuviera un recipiente de  $7 \text{ m}^3$ , ¿qué presión ejercería el helio?

• Explica la manera en que encontraste estos dos resultados.

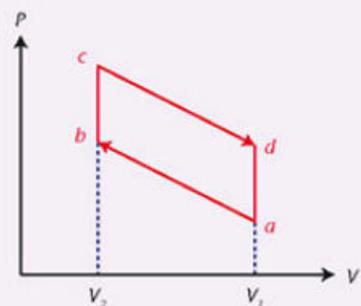
• ¿Qué tipo de gráfica se obtuvo?  
¿Por qué?

2. Compara tus respuestas y la gráfica con las de tus compañeros. Comenten en grupo los tipos de gráficas que obtuvieron en este contenido, y con la ayuda del profesor determinen cuáles son las características principales que caracterizan a este tipo de gráficas.



**Desarrolla tus habilidades**

En tus clases de Ciencias 2 revisaste las máquinas térmicas, entre ellas están los motores de cuatro tiempos: admisión, compresión, explosión y expulsión. En 1891, el ingeniero alemán Nikolaus August Otto, perfeccionó el motor de gasolina de cuatro tiempos en un sistema muy sencillo, el cual se representa en la siguiente gráfica.



a = Admisión    b = Compresión  
c = Explosión    d = Expulsión

- Analízala con detenimiento y contesta lo que se te pide.
  - ¿Qué tipo de gráfica corresponde cuando se pasa de la admisión a la compresión?
    - ¿Qué ocurre con la presión en el sistema?
    - ¿Qué ocurre con el volumen?
    - ¿Por qué?
  - ¿Qué tipo de gráfica corresponde cuando se pasa de la explosión a la expulsión?
    - En este caso, ¿qué ocurre con la presión en el sistema?
    - ¿Qué ocurre con el volumen?
  - ¿Cuál es la expresión algebraica que representa a los puntos a-b y c-d?
- Compara tus respuestas con las de otros compañeros e investiga la gráfica correspondiente al sistema diésel para un motor de cuatro tiempos y compárenla con el ciclo de Otto.

**USALAS TIC**

Para que continúes aprendiendo más acerca del análisis de gráficas, visita las siguientes páginas <http://www.educaplus.org/game/transformaciones-termodinamicas> y <http://www.educaplus.org/games/browse?order=publish-date-newest&search=Alcance+y+altura+m%C3%A1xima> (Consultadas el día 5 de diciembre de 2016, a las 14:51 horas), ahí encontraras programas interactivos, analízalos y con la asesoría de tu profesor exponlos ante el grupo.

Eje temático	Manejo de la información
Tema	Proporcionalidad y funciones
Contenido 5	Representación tabular y algebraica de relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas.



**ACUÉRDATE DE...**



En el contenido anterior trabajaste con ecuaciones cuadráticas de la forma  $ax^2 + bx + c$ , las tabulaste e hiciste su gráfica correspondiente.

1. Se tiene la siguiente expresión algebraica:  $x^2 + 4x + 3$ , con los siguientes valores de  $x$  encuentra el valor de  $y$ , realiza la gráfica correspondiente y contesta lo que se te pide.

a) ¿Qué nombre recibe la gráfica, dada la ecuación?

b) ¿Cuáles son las coordenadas del punto mínimo de la gráfica?

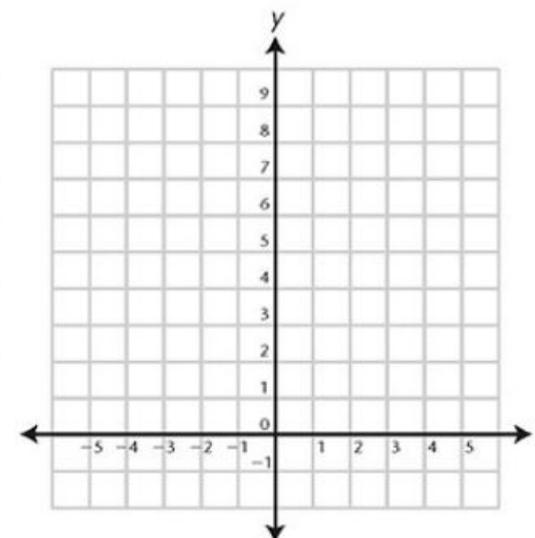
• ¿Qué nombre recibe este punto?

c) ¿La gráfica es **cóncava** hacia arriba o cóncava hacia abajo?  
¿Por qué?

d) Escribe dos coordenadas en las que se presente la simetría de la curva.

e) Escribe las coordenadas en las que se encuentra el eje simétrico de la curva.

2. Compara tus resultados con los de tus compañeros y, con la asesoría de su profesor, comenten si  $y = x^2 + 4x + 3$  es igual a  $f(x) = x^2 + 4x + 3$ .



**Glosario**

**Cóncava.** Se refiere a la curvatura formada por la línea plana y abierta comprendida entre ambas ramas, en este sentido puede ser cóncava hacia arriba o hacia abajo, es decir, cuando se ve "por dentro". Al verla por fuera de la curva, se le considera una parábola convexa.

**Para leer más**

Al realizar una gráfica es importante saber determinar el intervalo de los ejes y la graduación necesaria, para ello basta con analizar los valores mayores y menores requeridos para ambos ejes, y esto se logra analizando e interpretando la tabulación.



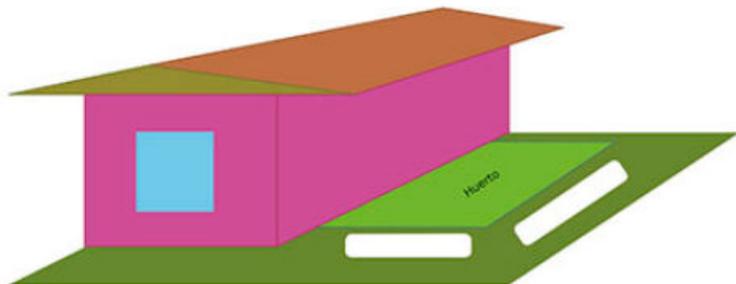
**PRACTICALO**



**Actividad 5.1**

1. Las ecuaciones cuadráticas tienen diferentes aplicaciones, por ejemplo, don Javier tiene 40 m de tela de alambre que quiere ocupar para construir en la parte trasera de su casa, pegado a la pared, un huerto de forma rectangular, como se muestra en el esquema.

a) ¿Cuáles serían las dimensiones del huerto si desea tener un área máxima?



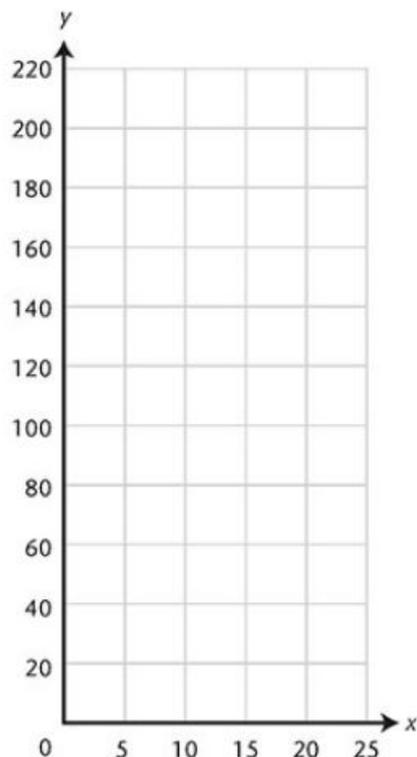
• Si  $x$  representa un lado del huerto, ¿cuál es la expresión algebraica que representa el largo del huerto?

• ¿Qué expresión algebraica representa el área del huerto?

• ¿Qué estrategia emplearían para encontrar el valor de la literal?

a) Tabulen para encontrar los valores de la literal y grafiquen los puntos.

$x$	$y =$ _____	$y$
0		
5		
10		
15		
20		



• ¿Cómo es la parábola, cóncava hacia arriba o hacia abajo?

¿Por qué?

• ¿Cuál es el punto máximo de la parábola?

• ¿En qué punto de  $x$ , pasa el eje simétrico?

• ¿Qué significa esto?

• ¿Cuánto mide el ancho del huerto?

• Anótalo en el esquema.

• ¿Y el largo?

• Anótalo en el esquema.

• ¿Cuál es el área máxima del gallinero?

• Si don Javier quisiera un área de  $300 \text{ m}^2$ , ¿lo podría construir con esta cantidad de tela de alambre?

¿Por qué?

• Y si quisiera que el huerto tuviera un área de  $150 \text{ m}^2$ , ¿lo podría construir?

¿Por qué?

2. Comparen sus respuestas con las de sus compañeros y comenten si la ecuación cuadrática corresponde a la forma  $ax^2 + bx + c$ , en caso contrario, ¿qué tipo de ecuación es?

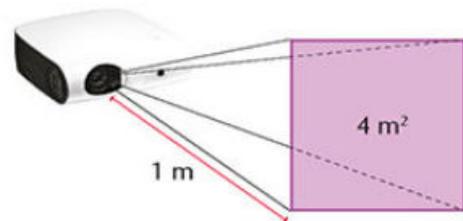


**PRACTICALO**



**Actividad 5.2**

1. Diego y sus compañeros de equipo quieren proyectar en el auditorio de su comunidad un documental que realizaron sobre la Revolución Mexicana. El área de la imagen depende de la distancia entre el proyector y la pantalla, como se ilustra a continuación. Cuando el proyector se encuentra a un metro de distancia de la pantalla, se proyecta una imagen de  $4 \text{ m}^2$ . Con estos datos contesten las preguntas y completen la tabla.



a) ¿Cuál será el área de la imagen cuando el proyector se retira a 1.5, 2, y 2.5 m? Completen la tabla y contesten lo que se les indica.

Distancia entre el proyector y la pantalla (m)	1	1.5	2	2.5
Área de la imagen proyectada ( $\text{m}^2$ )	4			

• Escriban una expresión algebraica que representa el incremento de la imagen proyectada.

• Justifiquen su respuesta.

• ¿A qué distancia debe estar el proyector si el equipo de Diego quiere que el documental que se proyecta tenga un área de  $64 \text{ m}^2$ ?

• Expliquen cómo obtuvieron su resultado.

2. Comparen sus respuestas con las de sus compañeros y comenten si la ecuación que obtuvieron es completa.



**PRACTICALO**



**Actividad 5.3**

1. Un helicóptero arroja suministros, desde una altura de 176.85 m, a unos investigadores que se encuentran trabajando en cuevas ubicadas en el interior de un cañón. Uno de los investigadores determinó que tardaron 6 segundos en caer los suministros. ¿Qué distancia habrán recorrido los suministros en 1, 2, 3, 4 y 5 segundos?

a) Completen la tabla.

Tiempo (s)	1	2	3	4	5	6
Distancia recorrida (m)						176.85

b) De las siguientes expresiones, ¿cuál de ellas corresponde a esta situación?

- A.  $d = 0.5 gt$       B.  $d = 0.5 gt^2$       C.  $d = 0.5 g + t^2$       D.  $d = 0.5 g - t^2$

• Justifiquen su respuesta.

• Elaboren en una hoja de papel milimétrico una gráfica con los datos que obtuvieron, péguenla en su cuaderno.

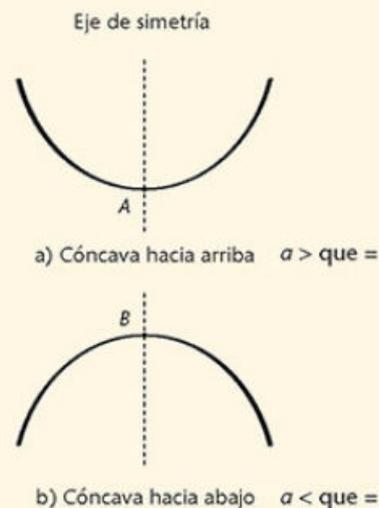
• ¿La parábola fue cóncava hacia arriba o hacia abajo?

¿Por qué?

2. Comparen sus respuestas con las de los otros equipos y, con la asesoría de su profesor, expongan ante el grupo la gráfica que obtuvieron.

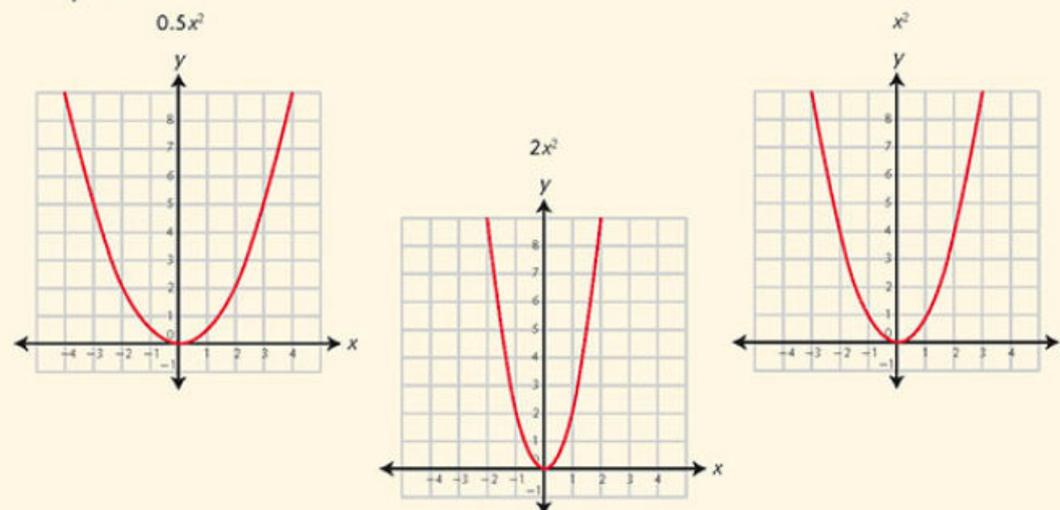
**Para tener en cuenta**

Al graficar una expresión cuadrática, se pueden obtener dos tipos de parábola una cóncava hacia arriba, ésta se presenta si y sólo si  $a > 0$ , la cual también recibe el nombre de concavidad positiva; en caso contrario, es cóncava hacia abajo cuando  $a < 0$ , también llamada concavidad negativa.



**Para leer más**

El coeficiente que acompaña al término de segundo grado determina qué tan abierta o cerrada es una parábola, entre más grande sea el número más cerrada es la curva, entre menor sea es más abierta. Por ejemplo, al graficar  $0.5x^2$ ,  $x^2$  y  $2x^2$  se puede observar claramente cómo influye este número en la amplitud de cada parábola



**LO QUE APRENDÍ**



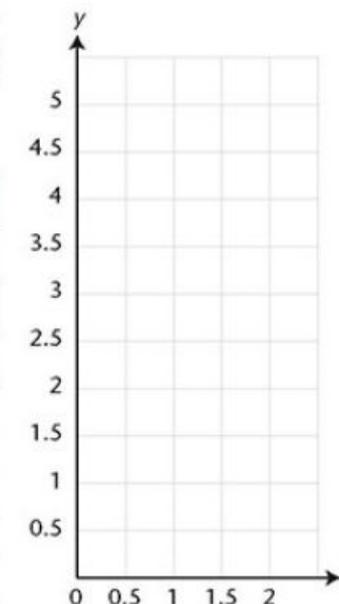
1. En la clase de Ciencias 2, el equipo de Marina llevó a cabo un experimento de lanzamiento de proyectiles, en el patio de la escuela; en el desarrollo del lanzamiento la altura (metros) alcanzada la denotaron con  $y$ ; mientras que la distancia que recorrió, como  $x$ ; ambos están relacionados por la ecuación  $y = -2x^2 + 4x$ .

a) Haz la tabulación correspondiente y graficala en el plano.

x	y = _____	y
1		
2		
3		

• ¿Cuál será la altura máxima que alcanzó su proyectil?

• Explica qué punto de la parábola te indicó la altura máxima.



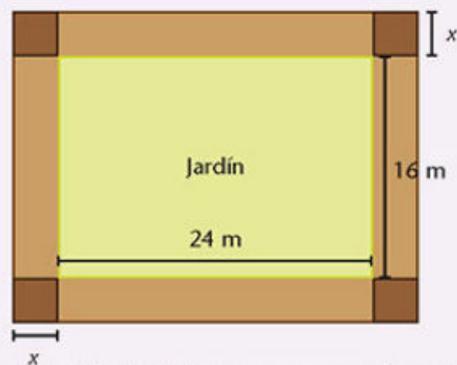
- ¿Qué nombre recibe este punto? \_\_\_\_\_
- ¿Cómo fue la concavidad de la parábola? \_\_\_\_\_  
¿Por qué? \_\_\_\_\_

2. Compara tus resultados con los de tus compañeros y discutan cuáles serían los valores que determinan la amplitud entre la separación de la línea que forman la curva de una parábola.

**Desarrolla tus habilidades**

1. Trabaja con un compañero para que lean y analicen la siguiente situación; luego contesten lo que se les pide.

a) Un jardín rectangular de 24 m de largo por 16 m de ancho está rodeado por un camino de arena uniforme. Hallen la anchura de dicho camino, si se sabe que su área es de  $176 \text{ m}^2$ . Analicen la imagen.



- ¿Cuál es la expresión algebraica que corresponde a esta situación? \_\_\_\_\_
- Expliquen cómo encontraron el resultado. \_\_\_\_\_
- ¿De qué forma demostrarían que su resultado es correcto? \_\_\_\_\_

2. Comparen sus respuestas con las de los demás compañeros del grupo y de ser necesario, planteen otras situaciones.

**USA LAS TIC**

En la siguiente página encontrarás un programa interactivo que te permitirá fortalecer lo aprendido, realiza las diferentes actividades y coméntalas con el profesor y con tu grupo. <http://portalacademico.cch.unam.mx/alumno/aprende/matematicas2/funcionessegundogrado> (Consultada el día 3 de diciembre de 2016, a las 10:04 horas)

Eje temático	Manejo de la información
Tema	Nociones de probabilidad
Contenido 6	Conocimiento de la escala de la probabilidad. Análisis de las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes.



**ACUÉRDATE DE...**



1. En el ciclo anterior calculaste la probabilidad de que ocurra un evento, por ejemplo: si se lanza un dado y una moneda al mismo tiempo, ¿de cuántas formas se puede presentar el resultado?

a) Regístralas en la siguiente tabla.

Dado \ Moneda	1	2	3	4	5	6
S						
A						

b) Al lanzar al mismo tiempo el dado y la moneda, tres eventos que se podrían presentar serían:

- A. La moneda cae Sol      B. En el dado cae 3      C. La moneda cae Sol y en el dado cae 3

c) Si al hacer el experimento una sola vez en la moneda cae Sol y en el dado cae 4, ¿a cuál de los tres eventos es favorable? \_\_\_\_\_

- ¿Por qué? \_\_\_\_\_
- Menciona un resultado que sea favorable al evento B. \_\_\_\_\_
  - ¿Cuántos resultados son favorables al evento C? \_\_\_\_\_
  - Explica cómo obtuviste los resultados de los eventos. \_\_\_\_\_

d) ¿Cuál es el espacio muestral de este experimento? \_\_\_\_\_

2. Comparen sus resultados con los de algunos compañeros y, con la asesoría de su profesor, comenten si el resultado del dado se ve afectado cuando se lanza la moneda y cae águila.



**PRACTICALO**



**Actividad 6.1**

1. Óscar y Adriana están jugando a "La oca" con un par de dados. Si se lanzan dos dados al mismo tiempo, ¿cuáles son los posibles resultados que pueden obtener en el juego, al sumar los puntos de los dados?

a) Completen la tabla.

A \ B	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						

A \ B	1	2	3	4	5	6
4						
5						
6						

- ¿Cuántas permutaciones posibles presentan?
- ¿Cuál es la probabilidad de que caiga 2? ¿Por qué?
- ¿Cuál es la probabilidad de que caiga 7? ¿Por qué?
- ¿Cuál es la probabilidad de que caiga 10? ¿Por qué?
- De los tres eventos anteriores, ¿cuál tiene mayor probabilidad? Justifiquen su respuesta.

b) Anoten en la tabla la probabilidad de cada uno de los eventos, en fracción, decimal y porcentaje.

Evento	Probabilidad en:		
	Fracción	Decimal	Porcentaje
Caiga 2			
Caiga 3			
Caiga 4			
Caiga 5			
Caiga 6			
Caiga 7			
Caiga 8			
Caiga 9			
Caiga 10			
Caiga 11			
Caiga 12			
<b>TOTAL</b>			

- ¿Qué se observa en el total de las probabilidades?
- ¿Qué significa esto?
- ¿Cuál sería la probabilidad de obtener en el lanzamiento de los dos dados 4 y 1? Justifiquen su respuesta.

c) De los resultados anteriores, seleccionen uno de ellos y representenlo sobre la recta numérica que le corresponda.



- ¿Cuál evento seleccionaron?
- Analizando las tres escalas, ¿cuál de las tres escalas de medición, fraccionaria, decimal o porcentaje es la que se puede considerar más adecuada?
- Entonces, ¿cuál es la probabilidad de que caiga 5? y ¿cuál es la probabilidad de que caiga 1?

2. Comparen sus resultados con los de algunos compañeros y, con la asesoría del profesor, comenten cuál de las escalas consideran más adecuada para representar que una probabilidad tenga mayor éxito y cuál es la utilidad de que se pueda representar de esta manera?

**Para leer más**

En un experimento aleatorio se obtiene un resultado del cual no se tiene control y éste prácticamente depende del azar.

El evento que ocurre en un experimento aleatorio recibe el nombre de *espacio evento*, y al conjunto de resultados del experimento se le llama *espacio muestra*.

**Para tener en cuenta**

Cuando se determina la probabilidad de un evento, se compara el total de posibilidades con las condiciones favorables, por ejemplo, al tirar un dado la condición favorable puede ser que caiga un número menor que 5, es decir que conste de los números 1, 2, 3 y 4, y como el lanzamiento tiene en total 6 posibilidades, la probabilidad de ocurrencia del evento es  $\frac{4}{6}$ , esta expresión se puede reducir a  $\frac{2}{3}$  y al realizar la división se obtiene 0.6 periódico, es por ello que siempre la probabilidad en decimal se expresa entre los números 0 y 1, donde 0 equivale a una probabilidad nula y 1 a un evento seguro.



**PRACTICALO**



**Actividad 6.2**

1. Analicen y discutan la siguiente situación.

En el salón de Matemáticas de Israel, el profesor pidió a los equipos con los que estaba trabajando que con dos cajas de cartón y una hoja de cartulina de 28 cm por 22 cm llevaran a cabo la siguiente instrucción:

Corten la hoja en 16 partes iguales para obtener 16 tarjetas, numérenlas del 1 al 8, de tal manera que haya dos tarjetas con el mismo número. Coloquen en cada caja 8 tarjetas. Marquen una de las cajas con la letra A y la otra con la letra B.

Una vez hecho lo anterior, el profesor les pidió que en cada caja realizaran una extracción con reemplazo, es decir, que extraigan la tarjeta y la regresen a la caja correspondiente.

a) Hagan el mismo experimento del equipo de Israel, y completen la tabla.

Número de extracción	Caja 1	Caja 2	Número de extracción	Caja 1	Caja 2
1			7		
2			8		
3			9		
4			10		
5			11		
6			12		

- ¿Cuál es el espacio muestral de este experimento?
- Expliquen cómo encontraron el resultado.

b) Consideren los siguientes eventos que se pueden presentar durante un experimento. Andrea, Juan y Valeria decidieron jugar con el experimento de la clase de Israel.

- Andrea gana si la suma de las dos tarjetas es 14.
- Juan gana si dos tarjetas muestran diferentes números.
- Valeria gana si dos tarjetas muestran números iguales.
- En la primera extracción, salió 6 y 8, ¿quién de los tres gana con este resultado?
- En la segunda extracción se obtuvo 7 y 7, ¿quién de los tres gana con este resultado?
- En la tercera extracción se obtienen 7 y 5, ¿quién de los tres gana con este resultado?
- De los tres eventos mostrados, ¿alguno afecta a los otros dos?  
¿Por qué ocurre esto?
- Al analizar cada uno de los eventos, consideras que los casos que lo hacen favorable se pueden presentar en alguno de los otros dos?  
Justifica tu respuesta.
- ¿Es posible que dos eventos en lugar de afectarse, se complementen?  
¿Por qué ocurre esto?

c) Diseñen una estrategia que les permita hacer 64 extracciones de tarjetas de las cajas al azar, completen la tabla y contesten lo que se les indica.

Evento		
A. La suma de las dos tarjetas es 14.	B. Dos tarjetas muestran diferentes números.	C. Dos tarjetas muestran números iguales.

- Escriban tres resultados que sean favorables al evento A. \_\_\_\_\_
- ¿Cuáles son los resultados que favorecen al evento B? \_\_\_\_\_
- Escriban tres resultados que sean favorables al evento C. \_\_\_\_\_

2. Comparen sus resultados con el resto de sus compañeros. Y entre todos comenten si la suma de las probabilidades de cada resultado de este experimento es igual a 1.

**Para tener en cuenta**

Para que dos eventos sean independientes el uno del otro es necesario que ninguno de ellos altere la probabilidad de ocurrencia del otro. Esto quiere decir que cada uno puede ocurrir de forma independiente y al mismo tiempo.

Cuando se analiza la probabilidad de ocurrencia de un evento es común que ésta se mida entre los números 0 y 1, donde cero indica la imposibilidad de que ocurra y el 1 representa un evento seguro.

Cuando dos eventos se excluyen uno al otro (mutuamente excluyentes) es porque la ocurrencia de uno depende de la ocurrencia del otro, es decir que al ocurrir el evento, imposibilita totalmente que el otro ocurra.



**PRACTICALO**



**Actividad 6.3**

1. Analicen y discutan los experimentos que se les indican e identifiquen las características de cada uno.

- a) Lanzar dos monedas al mismo tiempo.  
Primer evento: caen las dos monedas por su anverso.  
Segundo evento: cae una cara por su anverso y la otra por el reverso.
- b) Lanzar un dado.  
Primer evento: Cae un número menor que 3.  
Segundo evento: Cae un número mayor que 3.
- c) Lanzar una moneda y un dado.  
Primer evento: cae la cara por su anverso y el dado en un número par.  
Segundo evento: cae la cara por su reverso y el dado cae en un número mayor que 4.
- d) Lanzar dos dados.  
Primer evento: los dos números de las caras que quedan hacia arriba son pares.  
Segundo evento: los números obtenidos en sus caras superiores al sumarse dan un número mayor que 7.

De estos eventos:

- ¿Cuáles son totalmente independientes de los otros? \_\_\_\_\_
- ¿Existirá alguna condición que impida que si se lleva a cabo un evento, otro sea imposible realizarlo? \_\_\_\_\_
- Explica tu respuesta. \_\_\_\_\_
- ¿Qué características debe tener un evento para que no dependa de otro? \_\_\_\_\_

- Para alguno de los experimentos, ¿será posible que dos eventos ocurran de manera simultánea? Justifiquen su respuesta.

- ¿En alguno de los eventos dados, ¿es posible que se complementen entre sí, es decir, que al sumar sus probabilidades se obtenga el 100%? Expliquen su respuesta.

2. Contrasten sus resultados con los de sus compañeros y con la ayuda del profesor determinen, ¿cómo se puede saber cuando dos eventos no pueden ocurrir simultáneamente y en qué casos se complementan uno al otro?

### Glosario

**Escala.** Es el conjunto de valores que puede tomar una determinada medida.

### Para leer más

La probabilidad de un evento se encuentra en la **escala** de 0 a 1, ésta se puede representar de diferentes maneras: como fracción, por ejemplo  $P(A) = \frac{1}{3}$ ; en forma de decimal,  $P(A) = 0.333$ ; o en su caso en porcentaje, por ejemplo:  $P(A) = 33.3\%$ .



### PRACTICALO

### Actividad 6.4

Analiza los dos experimentos planteados y contesta las preguntas.

1. En una bolsa de plástico opaca están 4 pañuelos de diferentes colores: azul, verde, blanco y negro, suponiendo que se harán varias extracciones de pañuelos, éstos se devolverán a la bolsa.

- a) ¿Cuál sería la probabilidad de que en la cuarta extracción se obtenga el pañuelo blanco, si en las tres anteriores salieron el azul, el verde y el negro? Explica tu respuesta.

- b) Si se repiten las extracciones con las mismas condiciones, la probabilidad de obtener el pañuelo blanco en la próxima extracción cambió? Explica tu respuesta.

2. Lanzar un dado cinco veces de manera consecutiva.

- a) Tres de esos resultados fueron números pares y dos de ellos impares, ¿cuál será la probabilidad de que en el sexto tiro caiga otro número impar?

- b) ¿Cuál será la probabilidad de que en el sexto tiro salga un número 4 o mayor?  
¿Cómo determinaste este resultado?

3. ¿Es posible que estos eventos ocurran simultáneamente o son independientes entre sí?  
¿Por qué ocurre esto?

4. Contrasta tus respuestas con las de tus compañeros y, con la asesoría de su profesor, determina de qué manera influye el número de veces que se repite un experimento y las condiciones en que se realiza al momento de calcular la probabilidad.



### LO QUE APRENDÍ



1. En la siguiente tabla se muestran los talleres que eligieron los alumnos de tres grupos de primer grado de una escuela secundaria técnica al iniciar el ciclo escolar.

Taller	Construcción	Electricidad	Industria del vestido	Artes plásticas	Informática
Alumnos	20	25	18	30	28

a) Determina las siguientes probabilidades.

- Alumnos de construcción o informática.
- Alumnos que no estén en electricidad.
- Alumnos de artes plásticas o industria del vestido.
- Alumnos que no estén en informática.
- Explica cómo encontraste las probabilidades.

b) En términos de porcentaje, ¿cómo quedarían representados?

- ¿Estos eventos son independientes entre sí o hay algunos que se complementen?

Explica tu respuesta.

- Si ocurre alguno de los eventos, ¿este hecho hace que se altere la probabilidad de ocurrencia de los otros? Explica tu respuesta.

- ¿Si quitamos dos de los talleres, esto modifica que los eventos sean independientes o complementarios entre sí? Explica tu respuesta.

Taller	Fracción	Decimal	Porcentaje
Construcción			
Electricidad			
Ind. del vestido			
Artes plásticas			
Informática			
TOTAL			

2. Compara tus resultados con los de algunos compañeros y, con la asesoría del profesor, comenten cómo es un evento independiente y elaboren una conclusión.

### Desarrolla tus habilidades

1. Juan realizó tres volados de cuatro de manera consecutiva y en todos ellos ha caído sol, ¿cuál es la probabilidad de que en un cuarto volado también caiga sol?

- a) ¿Influye de alguna manera el antecedente de los 3 volados lanzados anteriormente? Explica tu respuesta.

- b) Si en el cuarto volado se lanzan dos monedas, ¿cuál sería la probabilidad de que caigan dos águilas y dos soles?

- c) ¿Cuál es la probabilidad de que al realizar nuevamente 4 lanzamientos con una sola moneda se obtengan primero 3 caras iguales y una distinta?

2. Compara tus respuestas con las de tus compañeros y, con la asesoría del profesor, concluyan por qué es importante que en una probabilidad la escala esté dada entre 0 y 1.

### USAS LAS TIC



Para que ejercites más acerca del uso de la escala de la probabilidad en un evento visita la siguiente página electrónica <http://eduteka.icesi.edu.co/Mi/master/interactiva/activities/Prob/index.html> (Consultada el día 22 de enero de 2017, a las 16:30 horas), ahí encontrarás un interactivo en el que podrás calcular la probabilidad con una ruleta y jugar haciendo cambios; experimenta con esta ruleta de colores, comenta tu visita con algunos de tus compañeros y, con la ayuda de su profesor, determina ¿cuál es la ventaja de haber utilizado este recurso interactivo para tu comprensión de este tema?

Eje temático	Manejo de la información
Tema	Análisis y representación de datos
Contenido 7	Diseño de una encuesta o un experimento e identificación de la población en estudio. Discusión sobre las formas de elegir el muestreo. Obtención de datos de una muestra y búsqueda de herramientas convenientes para su presentación.

**ACUÉRDATE DE...**

En estudios estadísticos anteriores ya has realizado **encuestas** y analizado e interpretado los resultados obtenidos, éstos permiten conocer información acerca del comportamiento sobre diversas situaciones o fenómenos de cualquier índole (social, natural, etcétera) para poder tomar decisiones con base en los resultados.

**Glosario**

**Encuesta.** Es una técnica de investigación que puede ser de forma verbal (por medio de la entrevista) o escrita (mediante la aplicación de un cuestionario previamente diseñado).

Para recordar dichos estudios realiza la siguiente actividad y considera que el propósito es obtener un resultado adecuado, es decir, de utilidad, y tiene el propósito de mejorar alguna situación, por ejemplo, el cambio climático en el transcurso del tiempo, el incremento de los precios de la canasta básica, entre otros, con el fin de obtener un beneficio para una población.

La fase inicial es de gran importancia, porque es donde se necesita seleccionar la pregunta o preguntas pertinentes para llevar a cabo el estudio, así como la manera en cómo se van a adquirir los datos.

1. Lee con atención las siguientes preguntas que se utilizan comúnmente para la elaboración de una encuesta en la escuela. Contéstalas en tu cuaderno.

**ENCUESTA A**

- ¿Qué te gusta más de la escuela? ¿Por qué?
- ¿Qué es lo que no te gusta de la escuela? ¿Por qué?

**ENCUESTA B**

- ¿Cuál es tu materia favorita? ¿Por qué?
- ¿Cuál es la materia o asignatura que se te hace más difícil? ¿Por qué?

a) De acuerdo con las preguntas de las encuestas A y B, ¿consideras que con esto sería suficiente para conocer las inquietudes de los alumnos? ¿Por qué?

b) ¿Qué tipo de respuestas esperarías obtener en las dos encuestas?

c) Si eligieras cualquiera de las dos encuestas, ¿qué otras preguntas podrías anexar?

d) Una vez que has aplicado la encuesta, ¿de qué modo podrías conocer de mejor manera las inquietudes de los estudiantes?

Compara tus respuestas con las de tus compañeros y comenten por qué es necesario representar los resultados de una encuesta por medio de una gráfica.

**PRACTICALO**

**Actividad 7.1**

La alimentación en los jóvenes es de suma importancia debido a la cantidad de actividades que desarrollan durante el día, sobre todo si están estudiando.

1. Junto con un compañero, analiza la información que se obtuvo mediante la aplicación de una entrevista. Asimismo analicen las gráficas correspondientes y contesten lo que se les indica.

¿Desayunas todos los días?					
Sí		No		A veces	
Conteo	Frecuencia	Conteo	Frecuencia	Conteo	Frecuencia
             	28	             	25	                         	39

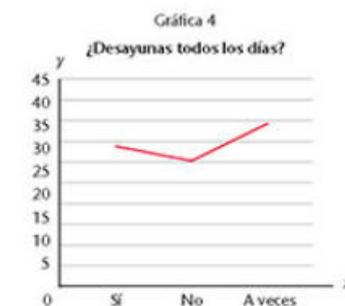
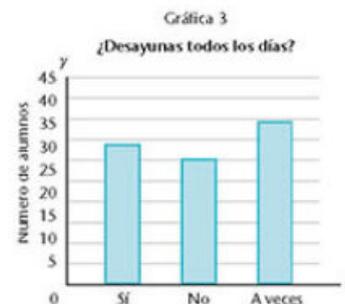
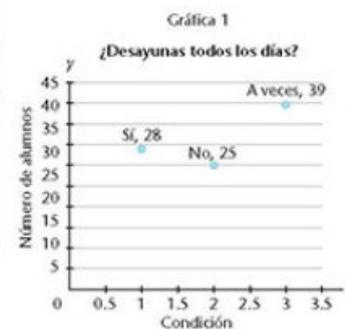
a) ¿Qué gráfica te permite comprender mejor el comportamiento de esta encuesta?  
¿Por qué?

b) ¿Qué gráfica piensas que es más difícil de comprender?  
¿Por qué?

2. De las encuestas que se propusieron en la sección "Acuérdate de...", elijan una de las dos y, con la supervisión de su profesor, aplíquenla en su escuela, procuren tomar un tamaño de muestra fácil de manejar. Determina el número más conveniente de alumnos que se van a entrevistar.

a) Registren sus resultados en una tabla, deben acordar cuáles y cuántas columnas y renglones, de la misma manera para los encabezados y títulos adecuados. Elaboren la tabla de datos en su cuaderno.

- Examinen los datos que se obtuvieron y, de acuerdo a las diferentes gráficas que conocen, determinen, ¿cuál de ellas nos permite comunicar de manera fácil la información obtenida?
- Elaboren en su cuaderno la gráfica que seleccionaron.
- Redacten una justificación que explique por qué seleccionaron esa gráfica.



3. Escriban una conclusión acerca de los resultados que obtuvieron al aplicar la encuesta.

4. Comparen sus respuestas con las de los otros equipos y bajo la supervisión de su profesor hagan una presentación ante el grupo.

**Para tener en cuenta**

- La realización de un estudio debe considerar diferentes etapas, por ejemplo:
1. Definición del experimento o estudio sobre lo que se quiere investigar y lo que se pretende obtener.
  2. La obtención de datos. Definir a quién se aplicará el estudio, cómo van a obtener los datos, cómo elegir el tipo de pregunta que se hará.
  3. Organización y análisis de datos. Ordenar y clasificar los datos que se van a obtener; elegir la gráfica o tabla en la que se analizarán los datos.
  4. Conclusión y reporte del estudio. Permite comprobar si obtuvieron las respuestas que pensaron obtener antes del estudio o contradice lo que se esperaba.

**Para leer más**

Un estudio siempre se hace tomando una pequeña porción de la población; si ésta es muy grande, a esto se le llama *muestra*. Ésta debe conservar las mismas características de la población que se desea estudiar, es decir, debe ser representativa y los elementos que la componen se deben determinar de manera aleatoria, o sea, sin ninguna preferencia sobre algún otro elemento de la población.



**PRACTICALO**



**Actividad 7.2**

1. Al realizar un estudio de cualquier índole, siempre se espera encontrar una o varias posibles respuestas.
  - a) A continuación se muestran dos textos, uno en español y otro en mixteco que servirán para hacer un ejercicio en el cual, como en la actividad anterior, se pueden aplicar técnicas de conteo; lean con atención, completen la tabla y respondan las preguntas.

**Fuga de cerebros /I**

La creación del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt), en 1971, supuso un punto de inflexión para el establecimiento de políticas de promoción de los posgrados, y de acuerdo con la doctora Rosaura Ruiz Gutiérrez, ex presidenta del Consejo Mexicano de Estudios de Posgrado (Comepo), si bien entre 1970 y 1980 aumentó la oferta de posgrados, estos programas no cumplían con los requisitos de calidad y pertinencia, y provocaron heterogeneidad, dispersión y diversificación de dichos estudios, ya que éstos fueron creados sin planeación de largo alcance y “orientados a satisfacer demandas particulares, presiones coyunturales o a iniciativas de las administraciones en turno”.

FUENTE: Vargas A., S. (4 de mayo de 2013). Fuga de cerebros /I. La Jornada. Recuperado de <http://www.jornada.unam.mx/2013/05/04/politica/016a1pol> Consultada el 22 de enero de 2017, a las 16:38 horas.

**Yito Nuchi Kaa**

Yitunuhcikaataayitokui, muchikaa Se´echikano, se´ekivikivi in kati. Nuchikaakivikundavinuuviko, yitoxeinuchikanxeitakivi, ye´elo´o, Xeikuisse´eye´etaanuchikanaxikinxi, ñandii, muchikaayitose´etayi Kuiasitonimani.

Nuchikanse´exiakuaayivi, chikanuakuchataatchi, se´ekundayiko Yoa´oa, se itase´ekanakuiyaasaxinaayivi. Sakuase´exanxina, Se´e, kundavikudiiñakoyoa´oa, se itase´ekanakuiyaasaxinaayavi. Sakuase´exanxina, se´eyitose´exiakua, xitoseita se taayitotaku, ita se kui, xita -aalo´ose´etachi.

FUENTE: Dirección General de Educación Indígena. (2010) *Leamos en lengua mixteca*, México: SEP, pág 15, recuperado de <https://issuu.com/search?q=dgei+libros+mixtecos> Consultada el 3 de diciembre de 2016, a las 10:20 horas.

b) Después de haber leído los dos textos, ¿qué letra es la más utilizada en cada una de estas dos lenguas?

c) Elijan cualquiera de los dos textos y hagan el conteo de las letras que se les indican en la siguiente tabla.

A-a	B-b	C-c	Ch-ch	D-d	E-e	F-f	G-g	H-h	I-i
J-j	K-k	L-l	LI-lI	M-m	N-n	Ñ-ñ	O-o	P-p	Q-q
R-r	Rr-rr	S-s	T-t	U-u	V-v	W-w	X-x	Y-y	Z-z

- Del texto que eligieron, ¿qué letra es la que más se repite?
- La letra que se repite, ¿es vocal o consonante?
- ¿Cuáles son las letras que más aparece en el texto?
- Si tuvieran que sacar un porcentaje, ¿cuál le corresponde a cada una de las 10 letras que más se repiten?
- ¿Cuál es la gráfica más apropiada para representar estos datos? ¿Por qué?
- En su cuaderno, representen gráficamente las diez letras que más se presentaron en el texto.
- De los dos textos, ¿en cuál se presentan las consonantes con mayor frecuencia?
- ¿Cuál es la vocal que más se utiliza?

- Una vez que realizaron la actividad, ¿se confirmó lo que esperaban en cuanto a las letras que más se utilizan en ambos textos? \_\_\_\_\_
- Si se tomara otro texto de cualquier otra lengua, ¿se obtendría la misma frecuencia de letras que en estos dos textos? \_\_\_\_\_ Justifiquen su respuesta.
- Si tuvieran que diseñar un estudio similar para otra lengua, ¿cómo lo plantearían? \_\_\_\_\_
- ¿De qué manera obtendrían los datos? \_\_\_\_\_
- ¿Por qué consideran que este método es el más adecuado? \_\_\_\_\_
- ¿Cómo presentarían los resultados de su estudio? \_\_\_\_\_
- ¿Por qué consideran que es la mejor forma de presentar los resultados? \_\_\_\_\_

2. Comparen sus resultados con otros compañeros y comenten si la frecuencia de una muestra varía entre mayor sea el tamaño de la muestra.



**PRACTICALO**



**Actividad 7.3**

1. Lean con detenimiento el siguiente caso, analicen, argumenten y respondan.  
Es común que la gente vaya al cine a ver una película que sea de su agrado, y para escoger existen muchos y muy distintos tipos de películas: acción, ciencia ficción, comedia, suspenso, terror, drama, etcétera.  
Se piensa que a las personas que les gustan las películas de terror son personas muy valientes.
  - a) ¿A qué tipo de personas se debe tomar como muestra de este estudio? \_\_\_\_\_
  - b) Estadísticamente se tiene registrado que hay 20 000 personas a las que les gustan las películas de terror, para realizar nuestro estudio, y que sea confiable, ¿a cuántas personas piensas que deben encuestarse? \_\_\_\_\_
  - c) ¿Cuáles serían las preguntas que se deben plantear para saber si todas las personas a las que les gustan las películas de terror son valientes? \_\_\_\_\_
  - d) ¿De qué forma pueden diseñar el estudio? \_\_\_\_\_
  - e) ¿Qué tipo de película consideran que es de la preferencia de sus compañeros de la escuela? \_\_\_\_\_
  - f) En su cuaderno elaboren una tabla de datos en la que representen el género de la película y la frecuencia que obtuvieron para cada una. Recuerden las recomendaciones de la actividad 7.2.

- Con los datos que acabas de recabar, construye en tu cuaderno la gráfica que sea más representativa al estudio que realizaron, recuerda las recomendaciones de la actividad 7.2. Justifiquen por qué eligieron la gráfica.
- ¿Cuál fue el tipo de película que más les gusta a los encuestados? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es el tipo de película de menos agrado entre los encuestados? \_\_\_\_\_
- ¿Es la respuesta que esperaban desde el inicio del estudio? \_\_\_\_\_  
¿Por qué? \_\_\_\_\_
- ¿Qué ocurriría con las preferencias si la muestra fuera mayor a la que tomaron para realizar el estudio? \_\_\_\_\_
- ¿Y si fuera menor? \_\_\_\_\_
- g) ¿A qué conclusión llegaron? \_\_\_\_\_

2. Comparen sus respuestas con las de los otros equipos, y analicen: ¿si el muestreo se realizara con personas adultas, obtendrían algún resultado semejante al que obtuvieron en la escuela? Justifiquen sus respuestas.



**PRACTICALO**



**Actividad 7.4**

Se quiere determinar si los estudiantes de la escuela se alimentan en forma adecuada, es decir, si consumen balanceadamente los cuatro grupos de alimentos.

1. Discutan las siguientes preguntas y respondan.
  - a) ¿Qué preguntas podrían componer la encuesta para realizar el estudio? \_\_\_\_\_
  - b) Si la población escolar es de 300 alumnos, Andrés dice que sólo se entrevisten a 30 alumnos de un grupo de tercero, ¿consideran que la muestra que quiere tomar Andrés es confiable para nuestro estudio? \_\_\_\_\_  
Justifiquen su respuesta. \_\_\_\_\_
  - c) ¿De qué manera podrían averiguar la cantidad de calorías que consumen sus compañeros de la escuela?
    - ¿Será suficiente con preguntar qué alimentos consumen? \_\_\_\_\_  
¿Por qué? \_\_\_\_\_
  - d) Si alguien de sus compañeros consume alimentos chatarra, ¿estará consumiendo las calorías que su cuerpo necesita? \_\_\_\_\_

- e) En los alimentos que consume a diario, ¿están presentes los cuatro grupos principales? \_\_\_\_\_
- f) ¿De qué manera se puede medir la cantidad de calorías que debe consumir? \_\_\_\_\_
2. Una vez que decidieron la forma en la que van a recopilar los datos, será conveniente ordenarlos y clasificarlos.
- a) ¿Qué tipo de gráfica es la más adecuada para este estudio? \_\_\_\_\_
3. Entreguen a su profesor el estudio que realizaron, incluyendo las preguntas, la tabla, la gráfica y la conclusión sobre los resultados.
4. Comparen sus resultados y gráficas con los de otros equipos, bajo la supervisión del profesor expónganlos ante el resto del grupo y obtengan una conclusión general.



**LO QUE APRENDÍ**



1. Seleccionen una de las siguientes preguntas para investigar, o realicen otro estudio que les llame la atención:

¿Cuál es el peso de los estudiantes de su escuela?  
 ¿Qué programa de televisión es el favorito de los estudiantes?  
 ¿Qué tipo de música es del agrado de los estudiantes?

- a) Anoten algún otro tema de estudio que se podría realizar. \_\_\_\_\_
- b) ¿Qué grupo o población utilizaron? Expliquen por qué. \_\_\_\_\_
- c) ¿De qué manera diseñaron la encuesta que aplicaron? \_\_\_\_\_
- d) ¿Qué estrategia utilizaron para clasificar las respuestas obtenidas? \_\_\_\_\_
- e) ¿Cuál fue el criterio que tomaron para seleccionar la representación gráfica más adecuada? Expliquen por qué \_\_\_\_\_
- f) ¿Cuáles son los beneficios que se pueden obtener del estudio que realizaron? \_\_\_\_\_
- g) ¿Existe alguna otra estrategia que les permita encontrar mejores resultados? Justifiquen su respuesta. \_\_\_\_\_
- h) ¿Cuál de las situaciones propuestas consideran que tiene mayor relevancia para una población? Expliquen por qué \_\_\_\_\_

2. Escriban sus conclusiones y entreguen el reporte a su profesor.

**Desarrolla tus habilidades**

Como sabes, el tipo de gráfica que se utiliza para representar un estudio depende de cómo se organicen los datos en una tabla.

1. Analiza las siguientes tablas, cada una muestra un tipo de estudio diferente. Contesta lo que se te indica.

Tabla 1	
Aciertos	Frecuencia
0 - 6	4
7 - 15	19
14 - 20	7

Tabla 2	
Aciertos	Medida del sector
0 - 6	48°
7 - 15	228°
14 - 20	84°
Total	360°

Tabla 3	
Mes	Precio del huevo (\$)
Enero	24.5
Febrero	30
Marzo	43
Abril	31.5
Mayo	37.5

Tabla 4	
Película	Conteo
Suspense	45
Acción	33
Terror	66
Comedia	18
Ciencia ficción	54
Total	216

- ¿Qué tipo de gráfica consideras que es adecuada para presentar los datos de la tabla 1? \_\_\_\_\_ ¿Por qué? \_\_\_\_\_
  - ¿Qué tipo de gráfica consideras que es adecuada para presentar los datos de la tabla 2? \_\_\_\_\_ ¿Por qué? \_\_\_\_\_
  - ¿Qué tipo de gráfica consideras que es adecuada para presentar los datos de la tabla 3? \_\_\_\_\_ ¿Por qué? \_\_\_\_\_
  - ¿Y para los datos de la tabla 4? \_\_\_\_\_ ¿Por qué? \_\_\_\_\_
  - ¿Por qué es conveniente utilizar distintos tipos de representación gráfica y no sólo una para todo tipo de datos? \_\_\_\_\_
  - ¿En qué consiste determinar cuál representación gráfica es más conveniente, según los datos que representa? \_\_\_\_\_
  - ¿Cuál es la ventaja de presentar los datos en una gráfica acorde a cada problema? \_\_\_\_\_
2. Compara tus respuestas con las de otros compañeros. Comenten si se puede representar con la misma gráfica datos de las tablas que se mostraron de ejemplo.

**USALAS TIC**



En la siguiente página electrónica [https://broker.bankinter.com/www2/broker/es/analisis/herramientas/grafico\\_interactivo](https://broker.bankinter.com/www2/broker/es/analisis/herramientas/grafico_interactivo) (Consultada el día 6 de diciembre de 2016, a las 11:29 horas), encontrarás un programa interactivo que te permitirá representar datos en una gráfica.

Evaluación tipo PISA

Lee y analiza detenidamente cada situación y responde según lo que se indique.

1. Arturo compró un terreno con la intención de tener su negocio de imprenta y su casa juntos, ahora está iniciando y su terreno es mediano, mide 720 m<sup>2</sup>.

Observa el esquema y responde: ¿cuál es la expresión algebraica en su forma más simple que permite conocer las dimensiones del terreno?

a)	$2x^2 + 6x - 360 = 0$
b)	$4x^2 + 12x - 720 = 0$
c)	$x^2 + 3x - 180 = 0$
d)	$2x(2x + 6) = 720$



- ¿Cuál es el valor de  $x$ ?
- ¿Cuál es la relación entre el área de estacionamiento y al área de las secciones cuadradas?

2. Arturo se compró un rompecabezas cuando visitó la feria del libro, en él hay piezas que tienen la misma forma, aunque pueden ser de distintos tamaños. Observa las piezas mostradas a continuación:

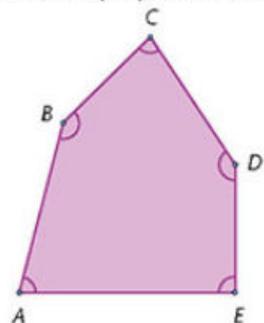


Figura 1

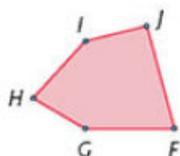


Figura 2

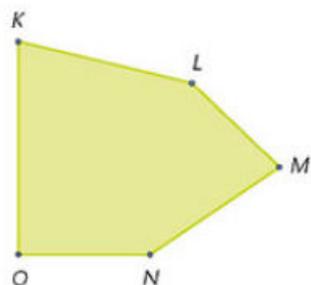


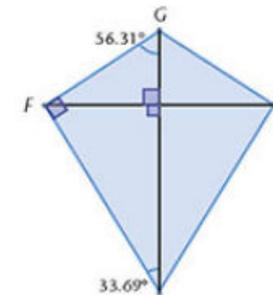
Figura 3

Si se sabe que las figuras mostradas tienen la misma forma, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es la correcta? Encierra "sí" o "no", dependiendo de cada enunciado.

a) La figura 2 es semejante a la figura 1 y congruente a la figura 3 porque todas tienen la misma forma.	Sí	No
b) El ángulo C tiene la misma amplitud que el ángulo H y el ángulo M. Los segmentos BC, CH y LM son correspondientes.	Sí	No
c) El segmento AB tiene la misma longitud que el segmento KL y que el segmento CF y los ángulos que se encuentran en los extremos de cada segmento también son iguales.	Sí	No
d) La figura 2 es semejante a la figura 1, pero sus ángulos son más pequeños.	Sí	No

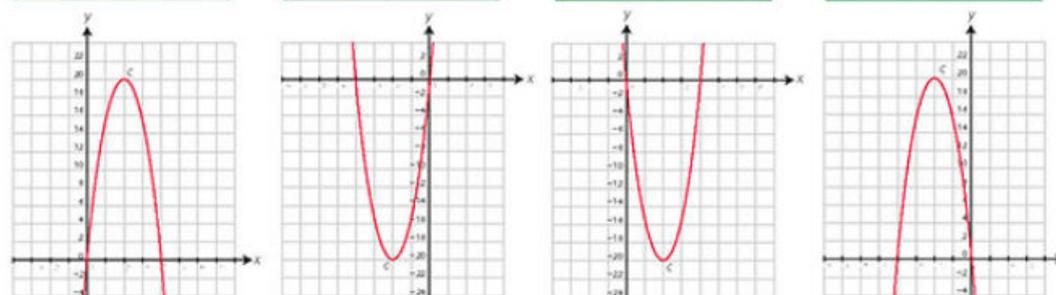
Evaluación tipo PISA

3. Marco acaba de comprar un papalote, le llamó la atención su forma geométrica y piensa que está hecho a base de triángulos que son semejantes. Analiza la figura y responde, de qué manera es posible demostrar que los triángulos GEF, HEF y GHF son semejantes.



4. ¿Cuál opción contiene la tabla y la gráfica que corresponde a la ecuación  $y = -5x^2 + 20x$ ? Considera a  $x$  como el tiempo, y a  $y$  como la altura.

x	y	x	y	x	y	x	y
-1.	-25.	-1.	25.	-5.	25.	-5.	-25.
0.	0.	0.	0.	-4.	0.	-4.	0.
1.	15.	1.	-15.	-3.	-15.	-3.	15.
2.	20.	2.	-20.	-2.	-20.	-2.	20.
3.	15.	3.	-15.	-1.	-15.	-1.	15.
4.	0.	4.	0.	0.	0.	0.	0.
5.	-25.	5.	25.	1.	25.	1.	-25.



5. Considera el experimento de lanzar una vez un dado, y con esta base escribe sobre la línea si los eventos dados son complementarios, mutuamente excluyentes o independientes.

- Que salga un número par o un número impar
- Que salga un número mayor que 3 o un múltiplo de 2
- Que salga un 4 o un número primo

6. Se quiere conocer si los estudiantes de los grupos de tercero de una secundaria tienen buenos hábitos de sueño, ¿cuál de los incisos muestra la manera en la que se debe realizar este estudio?

a) Establecer una pregunta, elegir al azar una cantidad de alumnos para realizar una encuesta, contabilizar los datos y presentarlos en una tabla	Sí	No
b) Seleccionar la muestra de una población, elaborar un cuestionario y luego obtener los datos realizando entrevistas.	Sí	No
c) Elaborar una encuesta, determinar la población, seleccionar la muestra, obtener los datos y presentarlos de manera gráfica.	Sí	No
d) Elaborar una encuesta, entrevistar a todos los elementos de la población, y presentar los resultados de manera gráfica.	Sí	No

# Bloque 2



## Aprendizajes esperados:

- Explica el tipo de transformación (reflexión, rotación o traslación) que se aplica a una figura para obtener la figura transformada. Identifica las propiedades que se conservan.
- Resuelve problemas que implican el uso del teorema de Pitágoras.

Pitágoras utilizó su teorema para resolver muchos problemas de la vida cotidiana, por ejemplo, para conocer la altura de una construcción basándose en su sombra.

## Contexto histórico

**706 a.n.e.**  
Abd al-Rahman I inicia la construcción de la Gran Mezquita de Córdoba, en España.

**585 a.n.e.**  
Tales de Mileto predice un eclipse solar en Asia menor.

**332 a.n.e.**  
Alejandro Magno ocupa Egipto.

**753**  
Carlomagno se coronó emperador del Santo Imperio Romano.

**605 a.n.e.**  
En India, por primera vez se acepta el uso de la notación decimal.

**410 a.n.e.**  
Hypatia de Alejandria es la primera mujer mencionada en la historia de las matemáticas.

**150 a.n.e.**  
Ptolomeo hace aportaciones al estudio de la trigonometría.

**1525**  
El matemático alemán Christoff Rudolff utiliza por primera vez el símbolo actual de la raíz cuadrada.

## Hechos matemáticos

Eje temático	Sentido numérico y pensamiento algebraico
Tema	Patrones y ecuaciones
Contenido 1	Uso de ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización.



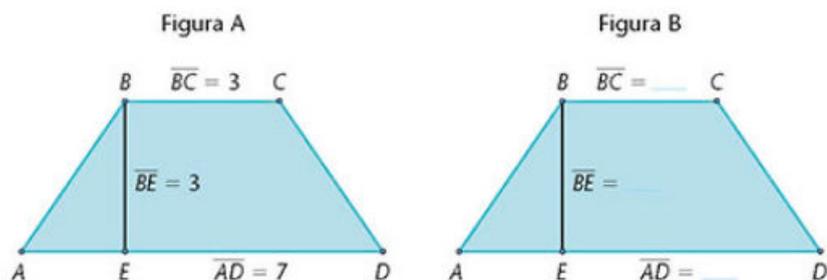
**ACUÉRDATE DE...**



Las figuras geométricas tienen aplicaciones en casi todas las formas que percibimos.

1. ¿Recuerdan la fórmula para calcular el área de un trapecio?, ¿cómo se pueden representar sus datos por medio de expresiones algebraicas?

a) Analicen los siguientes trapecios.



• ¿Cuál es el área de la figura A? \_\_\_\_\_

• ¿De qué manera encontraron esta medida? \_\_\_\_\_

b) En la figura B representen sobre las líneas el valor de cada segmento, ahora en términos de  $x$ .

• Definan qué expresión le corresponde a la altura y cuál a la base menor. \_\_\_\_\_

• Siguiendo la fórmula del área del trapecio, diseñen una expresión algebraica que represente el área total de la figura B, e igualen esta expresión con el área que obtuvieron de la figura A. \_\_\_\_\_

• ¿Cuál es el máximo exponente de esta expresión? \_\_\_\_\_ Esto, ¿qué representa gráficamente? \_\_\_\_\_

• Escriban de forma ordenada las operaciones que hicieron para obtener la expresión algebraica. \_\_\_\_\_

• ¿De qué manera pueden comprobar que su expresión es correcta? \_\_\_\_\_

2. Contrasten sus respuestas con las de dos o tres parejas cercanas y, con la ayuda de su profesor, analicen si la expresión algebraica está bien planteada.



**PRACTICALO**



**Actividad 1.1**

1. En segundo grado trabajaron con bloques que representan expresiones algebraicas, utilicen ahora esa experiencia y tomando como base las conclusiones de la actividad inicial, resuelvan lo que se pide.

a) Analicen la siguiente figura y escriban, con las superficies indicadas, la expresión algebraica que representa su área total.

• ¿Cuál es la expresión algebraica correspondiente a la base del rectángulo?

• ¿Qué expresión algebraica representa la altura del rectángulo?

b) Si el rectángulo, en total, contiene 48 unidades cuadradas como las indicadas con color azul, ¿cuántas  $u^2$  tiene cada rectángulo de color verde?

• ¿Cuántas  $u^2$  tiene el cuadrado naranja?

• ¿Qué estrategia utilizaron para calcular las medidas de cada figura?

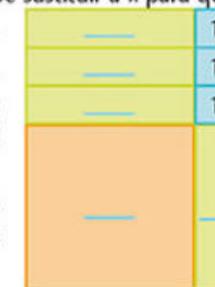


c) Con base en las medidas que determinaron, anoten dentro de la siguiente figura las unidades cuadradas correspondientes a cada sección del rectángulo.

d) Escriban la expresión algebraica que en esta ocasión iguala a cero, ¿qué valor debe sustituir a  $x$  para que la igualdad se cumpla? \_\_\_\_\_

• Comenten con sus compañeros si existe un valor único que cumpla la condición anterior, de no ser así, analicen la pertinencia de otro valor como solución al problema.

2. Comparen sus resultados y, con la ayuda del profesor, comenten cómo se puede conocer el valor de los lados de un rectángulo de cuya superficie sólo se conoce la expresión algebraica que representa su área.



**PRACTICALO**



**Actividad 1.2**

1. Para trabajar con expresiones algebraicas como las usadas en la actividad anterior es necesario saber hacer las operaciones necesarias de manera ordenada y concreta, donde la medida de los lados es resultado de factorizar el trinomio que representa el área del rectángulo.

a) Lleven a cabo este proceso para los siguientes trinomios de la forma  $x^2 + bx + c$  y encuentren los binomios que dieron origen a estos productos.

Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$	Binomios con término común
$x^2 + 7x + 12$	( ) ( )
$x^2 + 5x - 24$	( ) ( )
$x^2 - 8x - 15$	( ) ( )

- Describan, de forma breve, cuál es el procedimiento para factorizar este tipo de trinomios.
- Expliquen de qué manera se puede comprobar que la factorización se hizo correctamente.
- ¿Consideran que es posible encontrar otra manera de realizar la factorización? Justifiquen su respuesta y coméntenla con algunos de sus compañeros.

b) Si de la tabla anterior relacionan la expresión  $x^2 + 7x + 12$  con la superficie de un rectángulo con un valor de  $72u^2$  entonces:

- ¿Cómo queda expresada la ecuación cuadrática?
- Escriban la ecuación igualando su segundo miembro a cero.
- Si aplican el proceso de la factorización, ¿cuáles son los binomios que se obtienen?
- Entonces, ¿qué valores se pueden sustituir en la ecuación original para que al realizar las operaciones indicadas el resultado sea cero?
- ¿Cómo es posible determinar estos valores a partir de la factorización?

2. Encuentren los valores que hacen verdaderas las siguientes ecuaciones cuadráticas completas de la forma  $x^2 + bx + c$ .

a)	$x^2 + 8x + 15 = 63$	$x_1 =$	$x_2 =$
b)	$x^2 + 5x - 24 = 42$	$x_1 =$	$x_2 =$
c)	$x^2 - 6x - 27 = -11$	$x_1 =$	$x_2 =$

- Expliquen, ¿por qué en estas ecuaciones son dos los valores que las hacen verdaderas?
- Si se considera que la ecuación representa una igualdad con la medida de una superficie y al resolverla se obtienen dos raíces o soluciones, ¿ambos valores resuelven correctamente la ecuación? Expliquen su respuesta.
- Al seleccionar solamente un valor para  $x$ , ¿cómo se determina cuál de los dos es el adecuado?
- Analicen y escriban en su cuaderno, ¿en qué hechos de la vida cotidiana se utilizan este tipo de ecuaciones o procedimientos?

3. Comparen sus resultados con los de algunas parejas cercanas y elaboren una descripción formal que explique cuál es el proceso para resolver una ecuación cuadrática de la forma  $x^2 + bx + c = 0$ .



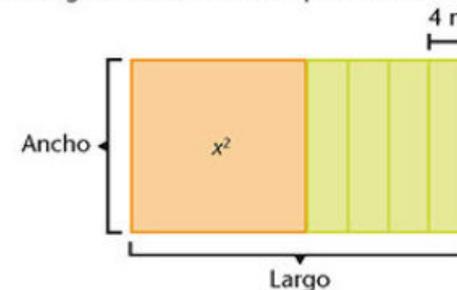
**PRACTICALO**



**Actividad 1.3**

1. Los bloques algebraicos se utilizan de formas distintas para representar varias operaciones, una de ellas está presente en la figura mostrada; para deducirla analiza el siguiente modelo geométrico y responde las preguntas.

a) El tío de Rubén tiene una bodega con estacionamiento para 4 camiones de carga, como lo muestra la imagen.



- ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el total del área, incluyendo los estacionamientos?
- ¿Cuál es la expresión algebraica que corresponde a la medida del frente de la bodega, es decir, el largo?
- ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el ancho de la bodega?
- ¿Qué factor tienen en común el ancho y el largo de la bodega?
- Para formar una ecuación cuadrática es necesario igualar la expresión algebraica del área a cero, ¿cómo queda la ecuación?

• ¿Qué valores puede tomar  $x$  para que la igualdad sea verdadera?

b) Usemos las medidas de la base y la altura para hacer la factorización del área, pero ¿de qué manera se pueden determinar los dos números que hacen verdadera la ecuación?

2. Encuentra los dos valores que hacen verdaderas las siguientes ecuaciones.

a)	$x^2 - 5x = 0$	$x_1 =$	$x_2 =$
b)	$x^2 + 2x = 0$	$x_1 =$	$x_2 =$

- ¿Qué características comunes puedes deducir en los resultados que obtuviste?
- ¿Consideras que siempre ocurrirá lo mismo en todas las ecuaciones de este tipo? Explica porqué.
- Es necesario saber determinar cuál de los dos posibles resultados es el más pertinente en la solución a un problema. Comenta con tus compañeros algunos ejemplos en los que una raíz negativa podría ser la solución a un problema.

3. Compara tus resultados con los de algunos de tus compañeros y con la ayuda de tu profesor explica cuáles son las características principales de las raíces o soluciones de una ecuación cuadrática incompleta mixta.

**Para tener en cuenta**

Este tipo de ecuaciones cuadráticas  $x^2 + bx = 0$  carecen de término independiente, sólo contienen al término de segundo grado y al de primer grado, por ello reciben el nombre de ecuaciones cuadráticas incompletas mixtas.

Para resolver una ecuación cuadrática completa de la forma  $x^2 + bx + c = 0$  donde el coeficiente del término de segundo grado es 1, por el método de factorización, se puede optar por el siguiente procedimiento:

1. Se abren dos paréntesis para colocar los binomios conjugados.
2. Se obtiene la raíz del término de segundo grado y se coloca como factor común en ambos binomios.
3. Se deben buscar dos números que multiplicados den el valor de  $c$ , y sumados den el valor de  $b$ .
4. Se colocan los signos que hacen verdaderas las dos condiciones anteriores.
5. Cada uno de los binomios se iguala a cero y se despeja el valor de  $x$  para obtener las dos raíces o soluciones a la ecuación.

A continuación, se ejemplifica cada uno de los puntos anteriores:

1.  $x^2 - 5x - 36 = ( \quad ) ( \quad )$
2.  $x^2 - 5x - 36 = (x \quad ) (x \quad )$
3.  $( \quad ) ( \quad ) = c$                        $(4) (-9) = -36$   
 $( \quad ) + ( \quad ) = b$                        $(4) + (-9) = -5$
4.  $x^2 - 5x - 36 = (x - 9)(x + 4)$
5.  $(x - 9) = 0$                        $(x + 4) = 0$   
 $x = 9$                                        $x = -4$



**PRACTICALO**

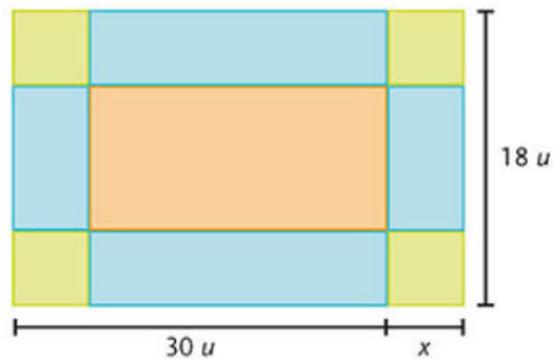


**Actividad 1.4**

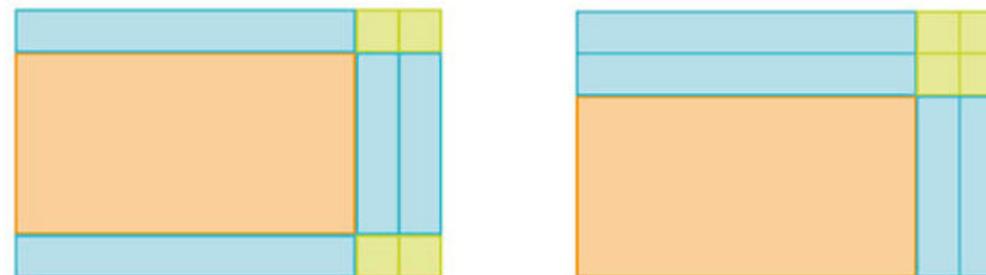
En las secciones anteriores trabajaron con ecuaciones de segundo grado representándolas en esquemas y resolviendo algoritmos algebraicos. Veamos ahora un problema en donde se aplican las ecuaciones cuadráticas.

1. En una fábrica de productos de cartón están elaborando tapas para cajas con las medidas mostradas en la figura.

a) En el siguiente modelo se encuentran representadas las secciones con las que es posible hacer la tapa de una caja de cartón utilizando un pliego de  $936 \text{ cm}^2$  de área. Analicen el esquema anterior y compárenlo con la imagen de la caja ya formada.



b) Los cuadrados de color verde se van a cortar para poder formar la tapa; ahora, si cada superficie se reacomoda es posible formar un modelo que permita analizar más fácilmente sus dimensiones.



- ¿Cuáles son las medidas del largo y del ancho del rectángulo naranja? \_\_\_\_\_
- ¿Cuáles son las dimensiones de los rectángulos azules? \_\_\_\_\_
- Considerando la figura en su totalidad, ¿cuáles son las medidas del largo y ancho? \_\_\_\_\_
- ¿En cuál de los tres modelos consideran que es más fácil encontrar las dimensiones de cada sección? Expliquen su respuesta. \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el área total? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es el valor de  $x$ ? \_\_\_\_\_

2. Comparen sus resultados con los de un equipo cercano y con la ayuda del profesor describan qué elementos deben considerarse para modelar un problema mediante una ecuación cuadrática.



**PRACTICALO**



**Actividad 1.5**

Muchas superficies distintas pueden estar relacionadas con expresiones algebraicas de segundo grado. Para ello las ecuaciones cuadráticas de la forma  $x^2 + bx + c = 0$ , así como su respectiva factorización en forma de binomios con término común de la forma  $(x + a)(x + b) = 0$ , están igualadas a cero.

1. Lean las preguntas y reflexionen antes de responder:
  - a) ¿Qué condición se debe cumplir para que el producto de una multiplicación sea cero? \_\_\_\_\_  
Expliquen su respuesta. \_\_\_\_\_
  - b) ¿Será posible encontrar dos números distintos de cero que al multiplicarse den cero? \_\_\_\_\_  
Justifiquen su respuesta. \_\_\_\_\_
  - c) ¿Cuál es la factorización del trinomio  $x^2 - 9x + 18 = 0$ ? \_\_\_\_\_
  - d) ¿Qué valor de  $x$  permite que el primer factor sea igual a cero? \_\_\_\_\_
  - e) ¿Qué valor de  $x$  permite que el segundo factor sea igual a cero? \_\_\_\_\_
2. Contrasten sus resultados y en forma grupal elaboren una definición formal para saber, cuál es la condición necesaria para que al multiplicar dos términos el producto sea igual a cero. Analicen su definición y concluyan por qué consideran que es la más adecuada.



**PRACTICALO**



**Actividad 1.6**

1. Retomen las respuestas anteriores y completen la tabla, luego analicen sus resultados para construir modelos con bloques algebraicos, encuentren los dos valores de  $x$  para cada ecuación de la forma  $x^2 + bx + c = 0$  de la forma que permitan obtener cero al multiplicar los binomios que se obtienen al factorizar. Suponiendo que cada una de estas expresiones representa una superficie de manera similar a la tapa de cartón de las actividades anteriores.

Ecuación	Factorización	Raíces de $x$
$x^2 + 3x - 4 = 0$	$( \quad ) ( \quad ) = 0$	$x_1 = \underline{\hspace{2cm}}$ $x_2 = \underline{\hspace{2cm}}$
$x^2 - 35x + 150 = 0$	$( \quad ) ( \quad ) = 0$	$x_1 = \underline{\hspace{2cm}}$ $x_2 = \underline{\hspace{2cm}}$
$x^2 - x - 6 = 0$	$( \quad ) ( \quad ) = 0$	$x_1 = \underline{\hspace{2cm}}$ $x_2 = \underline{\hspace{2cm}}$
$x^2 + 4x + 3 = 0$	$( \quad ) ( \quad ) = 0$	$x_1 = \underline{\hspace{2cm}}$ $x_2 = \underline{\hspace{2cm}}$

- En su cuaderno, construyan un modelo geométrico que represente cada una de las ecuaciones dadas en el cuadro anterior.
- Contrasten sus resultados con los de sus compañeros y, con la ayuda de su profesor, establezcan formalmente cuál es el proceso para resolver una ecuación cuadrática por factorización.

**Para leer más**

Una ecuación de segundo grado o cuadrática donde el coeficiente del término de segundo grado es 1, se resuelve obteniendo los factores que forman los binomios con término común, y encontrando los valores que vuelven cero a cada uno de estos factores.



**LO QUE APRENDÍ**



1. El Señor Medina quiere comprar un terreno, le ofrecen tres diferentes opciones de compra, cada una está dada por las siguientes expresiones algebraicas. Resuelvan las ecuaciones en su cuaderno y contesta las preguntas:

- a)  $x^2 - 14x + 48 = 0$                       b)  $x^2 - 10x + 16 = 0$                       c)  $x^2 - 8x + 15 = 0$

- Suponiendo que el valor que el Sr. Medina propuso equivale a que  $x$  tenga un valor de 20 unidades lineales, ¿cuál de las tres opciones representa un terreno más grande?   
Argumenten su respuesta. \_\_\_\_\_
- ¿Qué estrategia utilizaron para determinar la mejor opción? \_\_\_\_\_
- ¿Consideran que existe algún otro método para resolver este problema?   
Justifiquen su respuesta. \_\_\_\_\_

d) Después de valorar la distribución de las áreas, el Sr. Medina se decidió por un terreno de forma compuesta. Analiza la figura, su área es igual a  $78 u^2$ . Con base en las medidas indicadas, responde las preguntas.



- ¿Cuál es la ecuación que representa el área total, igualando a 78? \_\_\_\_\_
- ¿Es posible simplificar esta ecuación? Expliquen su respuesta. \_\_\_\_\_
- Escriban la factorización. \_\_\_\_\_
- ¿Cuáles son los valores de  $x$  que hacen verdadera esta ecuación? \_\_\_\_\_

2. Comparen sus resultados y, con la ayuda del profesor, elaboren un ejercicio similar en su cuaderno y, con algunos de sus compañeros, analicen los planteamientos, métodos de solución, así como las diferencias y similitudes que observaron.

**Desarrolla tus habilidades**

A partir de las raíces o soluciones de una ecuación de segundo grado es posible reconstruir una expresión cuadrática. Recuerda que las raíces provienen de obtener dos binomios y éstos a su vez provienen de la factorización de una ecuación cuadrática.

- Encuentra la factorización (binomios con término común) y posteriormente la ecuación de segundo grado original en su forma general, es decir,  $ax^2 + bx + c = 0$  para las siguientes raíces o soluciones.
  - a)  $x_1 = 5, x_2 = 7$                       b)  $x_1 = 3, x_2 = 1$                       c)  $x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = -3$
- Explica el procedimiento que llevaste a cabo y comprueba tus resultados. Con la ayuda del profesor determina cuál es la utilidad de saber reconstruir una ecuación de segundo grado a partir de sus soluciones y en qué te puede servir esto en la vida cotidiana.

**USALAS TIC**



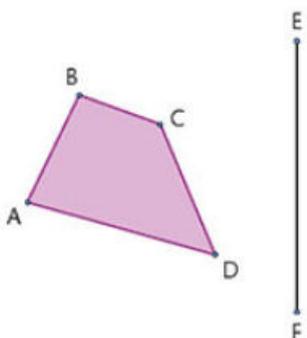
En la página <http://www3.gobiernodecanarias.org/medusa/ecoescuela/recursosdigitales/?s=ecuaciones+cuadradas> (Consultada el día 3 de diciembre de 2016, a las 10:37 horas), encontrarás explicaciones, ejemplos y ejercicios relacionados con este tema, lo que te permitirá comprender mejor de qué manera se utilizan este tipo de ecuaciones en tu vida cotidiana. Compara tus procedimientos con los que ahí proponen, elabora un comentario y compártelo con tu profesor, quien podrá hacerte alguna sugerencia para que aproveches más este recurso tecnológico.

Eje temático	Forma, espacio y medida
Tema	Figuras y cuerpos
Contenido 2	Análisis de las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras.

**ACUÉRDATE DE...**

1. Dos niños se encontraban jugando a los espejos uno frente a otro. El juego consistía en que uno de ellos repitiera todo lo que el otro hacía como si fuera su reflejo, uno de ellos levantó su mano izquierda y el otro niño al mismo tiempo levantó la mano derecha, ¿por qué pasa esto?

Tú aprendiste a trazar figuras simétricas con respecto a un eje de simetría, que es como un espejo para las figuras. Para recordarlo, traza la figura simétrica con respecto al eje EF del siguiente cuadrilátero, utiliza tu juego de geometría.



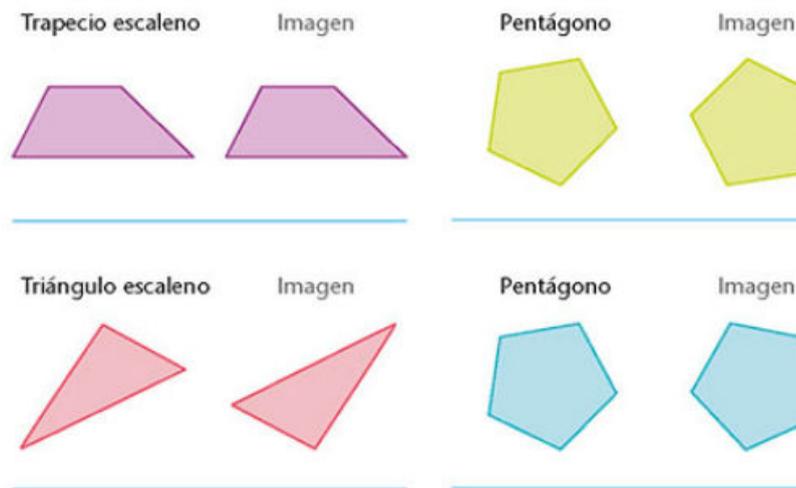
- ¿Qué características debe tener una figura para que sea simétrica a otra? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es la forma en que deben realizarse los trazos necesarios para encontrar los puntos simétricos de una figura con respecto a un eje? \_\_\_\_\_

2. Compara la figura que obtuviste con la de algunos de tus compañeros y comenten, en grupo, cuál es la manera más adecuada de resolver esta actividad y cuál la de utilizar el juego de geometría.

**PRACTÍCALO**

**Actividad 2.1**

1. Durante la sesión de matemáticas, el profesor de María Camila organizó cuatro equipos de trabajo, algunos de ellos tenían que mover una figura en un plano y otros tenían que girarla; en la siguiente imagen se muestran las parejas de figuras de cada equipo. Escriban en la línea inferior si se trata de una rotación, de una traslación o de una figura simétrica de la figura original.



a) Con base en sus conocimientos, respondan:

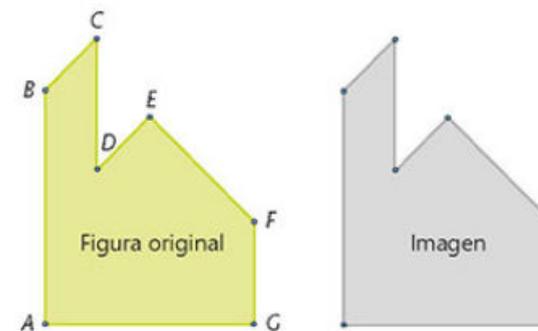
- ¿Qué es la traslación de una figura? \_\_\_\_\_
- ¿Con respecto a qué factor puede ser rotada una figura? \_\_\_\_\_
- ¿Qué diferencia hay entre los dos movimientos anteriores con respecto a la simetría de una figura? \_\_\_\_\_

2. Contrasten sus respuestas y, con la ayuda del profesor, elaboren una explicación breve que destaque cuáles son las principales características que consideran que tiene una figura simétrica. Elaboren una hipótesis sobre cómo se realizan geoméricamente los movimientos de traslación y rotación.

**PRACTÍCALO**

**Actividad 2.2**

1. Tomen como base la figura original, coloquen los vértices correspondientes y tracen líneas rectas que unan ambas figuras.



a) Contesten las preguntas.

- ¿De qué manera identificaron los vértices de la imagen? \_\_\_\_\_
  - ¿Qué relación tienen las líneas que trazaron entre ambas figuras? \_\_\_\_\_
- Argumenten su respuesta. \_\_\_\_\_

- Si miden la distancia entre cada vértice de la figura original con el que le corresponde en la imagen obtenida, ¿qué relación hay entre la distancia de cada pareja de puntos?  
Expliquen por qué ocurre esto.
- ¿De qué manera es posible demostrar que la imagen es igual, en todas sus características, a la figura original?

2. Comparen sus respuestas con las de otros equipos y, con el apoyo de su profesor, elaboren una explicación breve que indique las condiciones que se deben cumplir para poder trasladar una figura por métodos geométricos.

**Para leer más**

Cuando se realiza la traslación de una figura en cualquier sentido, se forman líneas paralelas entre los vértices que son correspondientes y siempre son de la misma longitud.

En una traslación no cambia la posición de la figura, es decir, sólo se cambia de lugar, no se rota ni se obtiene una figura simétrica.



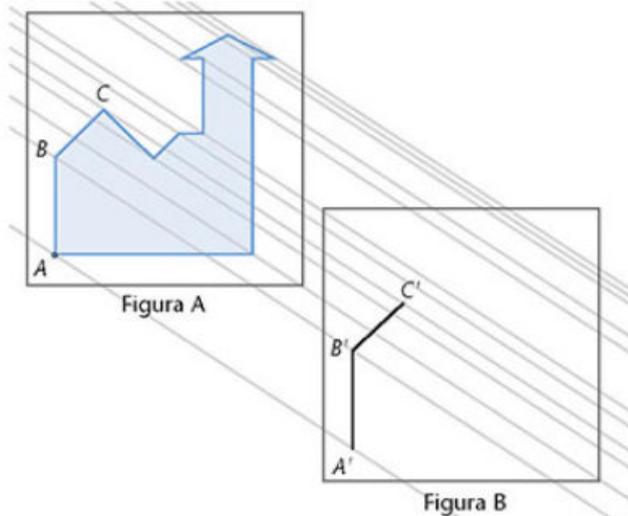
**PRACTICALO**



**Actividad 2.3**

Una vez identificado el concepto de traslación, el profesor de matemáticas de María Camila organizó en parejas al grupo y formuló las siguientes preguntas diciendo: "No quiero que las respondan ahora, quiero que reflexionen sobre ellas y escriban en su cuaderno la respuesta que consideren más adecuada".

1. Cuando una figura está compuesta por otras figuras y ésta se traslada de lugar, algunos de sus lados o vértices pueden quedar dentro de la figura compuesta, entonces, ¿es necesario trasladar todos sus lados?
  - a) Trasladen la figura A al recuadro de la figura B, utilizando su juego de geometría y tomando como base el punto A'.



- Describan el procedimiento que emplearon, indiquen cómo encontraron los vértices, así como los segmentos correspondientes a cada lado de la figura.

- ¿Qué relación observan en cuanto a los ángulos internos al comparar ambas figuras?

¿Por qué ocurre esto?

- ¿Ocurre una relación similar en cuanto a los lados de la figura?

¿Por qué?

- ¿Al comparar dos de los lados homólogos de ambas figuras, éstos forman entre sí líneas perpendiculares, paralelas u oblicuas?

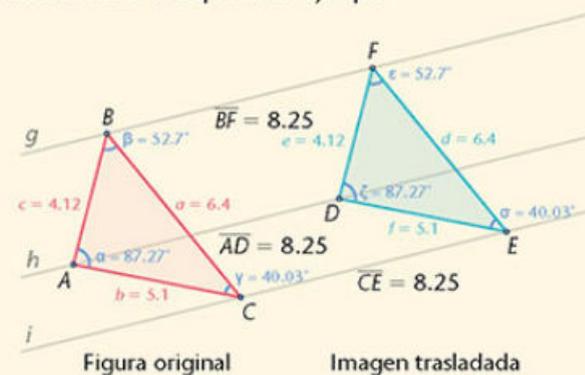
- ¿Esto es igual para cualquier otra figura que se traslade?

¿Por qué ocurre esto?

2. Comenten grupalmente si es posible identificar con claridad las características que se conservan respecto a la figura original.

**Para tener en cuenta**

Cuando una figura se traslada, se puede observar que las medidas de sus ángulos internos y externos se conservan, así como la medida y posición de todos sus lados. Analiza el esquema de ejemplo.



Observa que los vértices se indican con letras mayúsculas; los segmentos que forman los lados, con letras minúsculas; y los ángulos, con letras griegas, aunque estos últimos también se pueden representar haciendo referencia a sus vértices, por ejemplo, el ángulo que se encuentra en el vértice A se puede denotar como  $\angle A$  (con base en el vértice), o bien, como  $\angle CAB$  (con base en los segmentos que lo forman, poniendo en medio la letra A, que es el extremo común de ambos segmentos y, anotando éstos en el sentido de las manecillas del reloj, por este motivo no se denota como  $\angle BAC$ ).



**PRACTICALO**



**Actividad 2.4**

1. El papá de Diana trabaja en una editorial, actualmente está haciendo una enciclopedia temática. En la sección de retos matemáticos, uno de ellos trata sobre la rotación de figuras.

a) Analicen el siguiente esquema, y contesten las preguntas para ello utilicen el transportador.

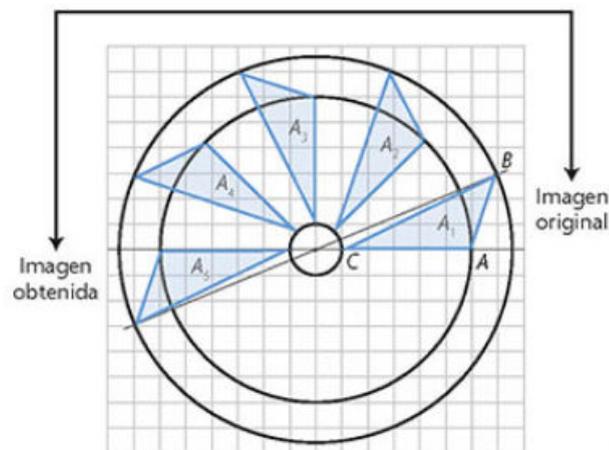
Tomando como base los vértices indicados con la letra A, ¿cuál es la amplitud del ángulo  $A_1 A_2$ ?

Ahora, al comparar la figura  $A_1$  con  $A_3$  ¿cuántos grados requirió esta rotación?

• ¿Cuál es el ángulo de rotación con el que se giró la imagen original para llegar a la figura final obtenida?

• ¿Cuántos grados se debe girar la figura original para que quede nuevamente en su posición de inicio?

2. Comparen sus respuestas con las de otros equipos y, con la ayuda del profesor, realicen este ejercicio para algunos otros ángulos. Comprueben si la diferencia entre ellos es la misma que entre los vértices dados y analicen sus resultados.



**PRACTICALO**

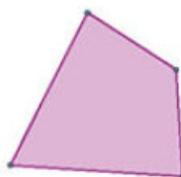


**Actividad 2.5**

1. En la sección anterior, analizaron la rotación de una figura a  $180^\circ$ , pasando por algunas de sus posiciones intermedias; pero para el papá de Diana el reto más grande es rotar una figura en un ángulo distinto al de una semicircunferencia.

a) El siguiente trapecoide simétrico de la figura original mostrado en la siguiente figura, se giró en tres posiciones con ángulos iguales entre cada figura, tracen la figura correspondiente a la segunda rotación y contesten las preguntas. Tengan presente el sentido del giro indicado en el **centro de rotación**.

Primera rotación



Segunda rotación



Sentido del giro

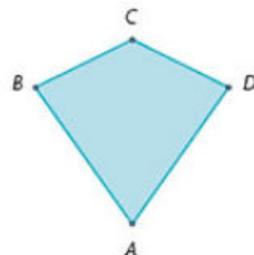


Figura original

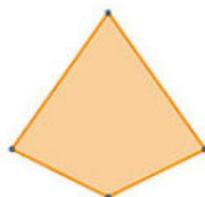


Figura final

**Glosario**

**Centro de rotación.** Es el punto medio de un trazo, que une un punto con otro simétrico.

- ¿De qué manera determinaron el ángulo de rotación para poder trazar la segunda figura? \_\_\_\_\_
- ¿Cuántos grados tiene la primera rotación? \_\_\_\_\_
- ¿Cuántos grados giró la imagen final con respecto a la original? \_\_\_\_\_
- Al analizar los lados y los ángulos de la figura original, ¿qué relación tienen con los lados y los ángulos de la figura final? \_\_\_\_\_  
¿Por qué ocurre esto? \_\_\_\_\_
- ¿Consideran que ocurrirá lo mismo con cualquier otra figura que sufra una rotación? \_\_\_\_\_  
Expliquen su respuesta. \_\_\_\_\_
- ¿Ocurre lo mismo en la primera y segunda rotación? \_\_\_\_\_ Entonces, ¿qué conclusión pueden obtener al respecto? \_\_\_\_\_

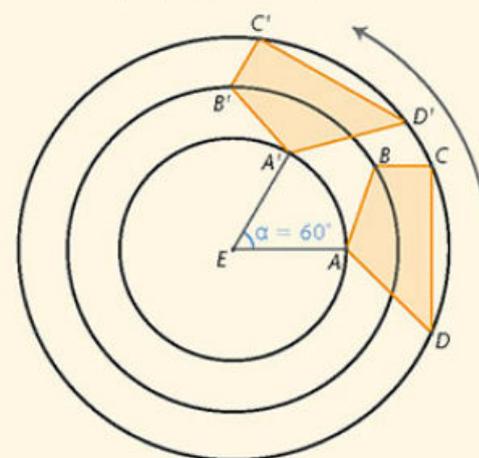
2. Contrasten sus resultados con los de algún equipo cercano y, con la ayuda del profesor, describan cuál es la mejor estrategia para llevar a cabo esta actividad.

**Para tener en cuenta**

Una rotación se puede hacer en dos sentidos:

1. Negativa, en el sentido en que avanzan las manecillas del reloj.
2. Positiva, en sentido contrario al avance de las manecillas del reloj.

Ejemplo de rotación positiva



**Para leer más**

Una figura, al rotarse, conserva vértices y lados correspondientes a la figura original y cada uno de ellos **equidista** del centro de rotación.

**Glosario**

**Equidistar.** Significa que dos o más puntos u objetos están a la misma distancia de uno o varios objetos que se toman como referencia.



**PRACTICALO**



**Actividad 2.6**

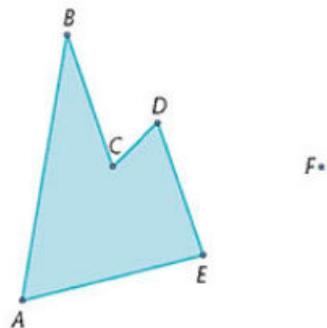
Ahora que has rotado una figura, puedes conocer el significado geométrico que tiene la rotación desde un punto de vista simétrico.

1. Utiliza tu juego de geometría para realizar, en tu cuaderno, una rotación de  $180^\circ$  de la figura que se muestra a continuación.

a) Explica, ¿qué estrategia utilizaste para trazar la figura solicitada?

b) ¿De qué manera es posible demostrar que la figura que obtuviste es imagen de la original?

2. Compara tus resultados y determina cuál es la forma más adecuada para trazar una figura simétrica a un punto o centro.



**PRACTICALO**



**Actividad 2.7**

1. La mayoría de los polígonos con los que han trabajado son convexos. ¿Se percataron del tipo de polígono con el que trabajaron en la sección anterior?, ¿qué tipo de polígono es?, ¿esto afecta en algo la rotación de una figura? Para encontrar las respuestas, analicen el siguiente esquema y contesten las preguntas.

a) Comparen la distancia que hay entre cada vértice de la figura original al centro de rotación, pueden auxiliarse de una regla o un compás, y compárenla con su correspondiente en la figura final, ¿qué observaron?

b) Utilicen un transportador y encuentren la relación de la amplitud de los ángulos correspondientes entre ambas figuras, ¿qué observaron?

c) En su cuaderno, elaboren una tabla comparativa en la que se retomen las medidas angulares de ambas figuras y otra donde se ubiquen las medidas de los lados de la figura original, comparándolos con la figura obtenida.

• Que la figura sea un polígono cóncavo, ¿afecta en algo su rotación?

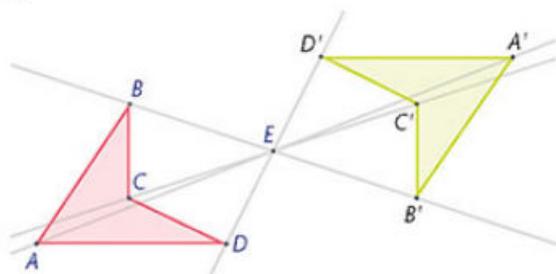
¿Por qué ocurre esto?

• ¿Qué características pueden concluir que presenta una figura que fue girada o rotada  $180^\circ$ ?

• ¿Cuál es el procedimiento más adecuado para verificar que las dos figuras son congruentes?

• ¿Qué instrumentos del juego de geometría son los más indicados para realizar una rotación?

2. Comparen sus respuestas con las de algunas parejas cercanas y, con la ayuda del profesor, analicen cómo es que se mantienen todas las características de la figura original en la figura reflejada y busquen algunos ejemplos de su aplicación práctica en la vida cotidiana, registrenlos, ilústrenlos y compártanlos con sus compañeros de clase.



**PRACTICALO**



**Actividad 2.8**

1. José Luis hace muñecos articulados de cartón. Para poder articular los brazos y piernas de sus creaciones, necesitó saber cómo se puede mover una figura si se coloca un eje de rotación dentro de ella. Ustedes hasta ahora han trabajado la rotación de figuras con el centro de rotación fuera de la figura misma, sin embargo, también es posible que se encuentre dentro de ella, como lo hace José Luis.

a) Observen la figura mostrada y la ubicación del centro de rotación, diseñen una estrategia para realizar una rotación de  $180^\circ$ .

• Expliquen, ¿cuál fue la estrategia que emplearon?

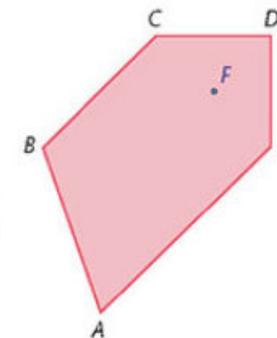
• ¿Cómo quedó la figura ya rotada con respecto a la original?

• ¿Los ángulos que midieron fueron en el sentido en que avanzan las manecillas del reloj o en sentido contrario?

• Expliquen por qué decidieron hacerlo de esa forma.

b) Tracen en su cuaderno algunos triángulos o cuadriláteros y coloquen dentro de su superficie un punto de rotación, propongan nuevas estrategias para resolver estas situaciones.

2. Comparen sus resultados con los de algún equipo cercano y, con la ayuda del profesor, expliquen qué circunstancias son distintas para las figuras que se rotan con base en un punto interior a las que se basan en uno exterior.



**LO QUE APRENDÍ**



1. Los diseñadores, decoradores y fabricantes de mosaicos y losetas utilizan de manera cotidiana la traslación y la rotación para adornar sus construcciones o productos, al igual que ellos, puedes crear tu propio diseño y trasladarlo.

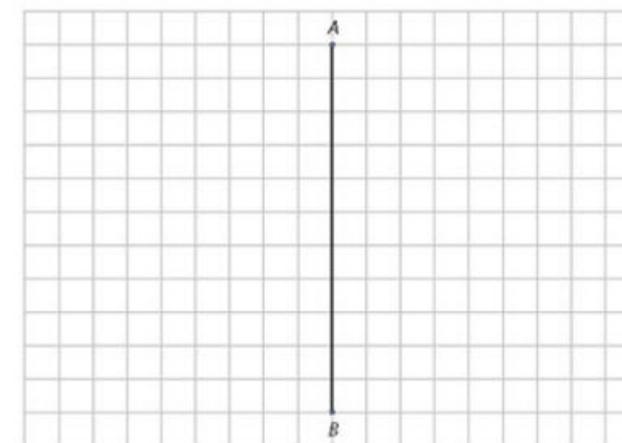
a) En el lado izquierdo del plano ubica, según tu preferencia, al menos 5 puntos no alineados con los que puedas formar un polígono, luego obtén su simétrico con respecto al segmento AB, señala los vértices y comprueba que la medida de los ángulos y de los segmentos se conserva.

• ¿Qué estrategia utilizaste para colocar los puntos?

• ¿Qué preferiste, ubicar los puntos para formar una figura regular o una figura irregular?

Explica por qué.

• Al comparar las dos figuras, ¿puedes comprobar que las medidas de sus lados y los ángulos son iguales? Justifica tu respuesta.



2. Traslada la figura A al interior del recuadro A'.

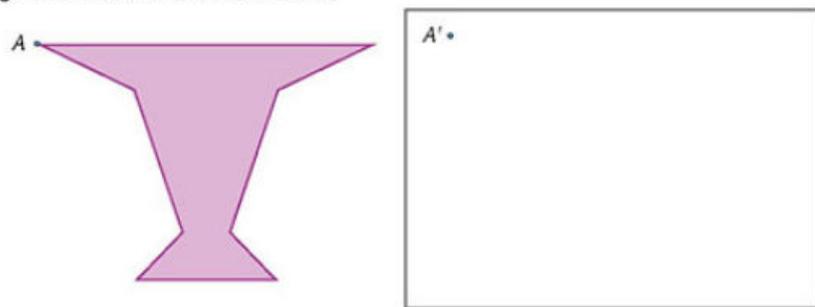


Figura original

Imagen

- Describe la estrategia que utilizaste. \_\_\_\_\_
- ¿Cómo puedes comprobar que la figura es congruente con la original? \_\_\_\_\_

3. Compara tus respuestas con las de algunos de tus compañeros y elabora una hipótesis que explique clara y brevemente las características de dos figuras que son reflejadas o rotadas por un punto.

**USA LAS TIC**

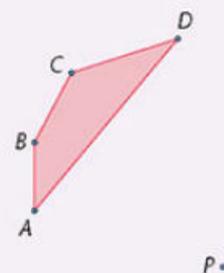


Visita la página [http://www.edu.xunta.es/espazoAbalar/sites/espazoAbalar/files/datos/1285581005/contido/ma023\\_0a01\\_es/index.html](http://www.edu.xunta.es/espazoAbalar/sites/espazoAbalar/files/datos/1285581005/contido/ma023_0a01_es/index.html) (Consultada el día el 3 de diciembre de 2016, a las 10:44 horas.) En ella encontrarás un programa interactivo que te ayudará a practicar y comprender mejor la simetría y la rotación de una figura, compara los resultados que obtengas con lo que aprendiste en este tema y escribe un comentario al respecto

**Desarrolla tus habilidades**

Una manera de poner a prueba tus conocimientos es realizando dos movimientos para una sola figura.

1. Traslada y rota la figura en el recuadro correspondiente, ¿se obtendrá el mismo resultado si se rota primero y luego se traslada?



P.

Traslación



Rotación



- Explica de qué manera determinaste el punto de partida para trazar las figuras de modo que quedaran dentro de su respectivo cuadro. \_\_\_\_\_

- ¿Cuál es la estrategia que usaste para resolver la actividad? \_\_\_\_\_

2. Compara tus resultados con los de algunos de tus compañeros y, con la ayuda del profesor, verifica que realizaste tus trazos correctamente.

Eje temático	Forma, espacio y medida
Tema	Figuras y cuerpos
Contenido 3	Construcción de diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras.



**ACUÉRDATE DE...**



1. Formen parejas, analicen las preguntas y lleven a cabo las actividades que se indican para cada inciso.

a) En la ilustración se muestran 3 figuras con sus respectivas imágenes después de haberles aplicado un movimiento. Escriban sobre cada línea el nombre de la acción que se realizó.

Figura 1

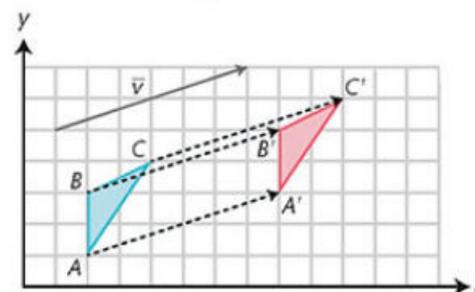


Figura 2

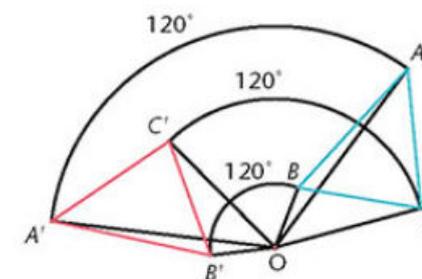


Figura 3

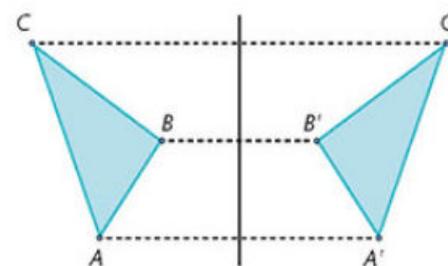
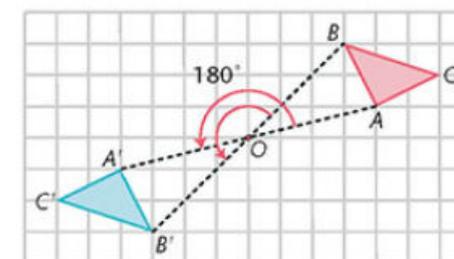


Figura 4



b) En su cuaderno construyan un cuadrilátero, tómenlo como base para realizar una traslación. Obtengan una figura por simetría central, otra por simetría axial y otra por una rotación menor a 180°.



**PRACTICALO**



**Actividad 3.1**

1. Tracen la figura simétrica con respecto al eje vertical en el recuadro del lado izquierdo, luego tracen la figura simétrica con respecto al eje horizontal, es decir, en el cuadro inferior derecho también pueden hacer una rotación con respecto a la figura original.

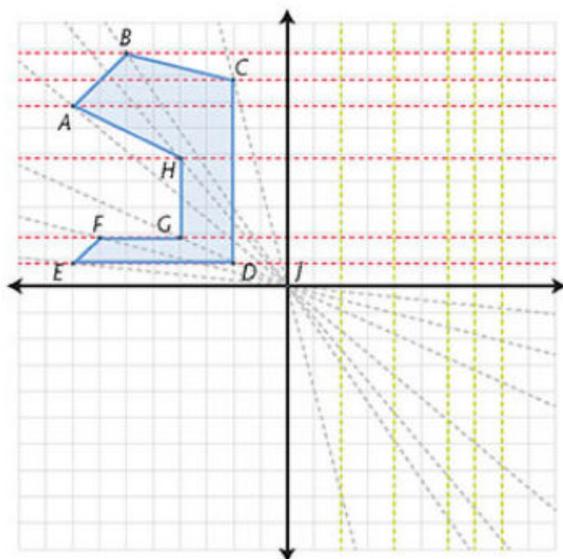
a) Analicen las figuras obtenidas y respondan las preguntas.

• ¿Qué estrategia utilizaron para determinar los puntos correspondientes a cada vértice de la figura original?

• ¿Qué relación tiene la última figura con la original?

• ¿Qué característica tienen los puntos de la figura original con la que se obtiene al pasar todos los puntos por el punto  $J$ ?

• Analizando las líneas punteadas, respondan, ¿qué relación tiene la reflexión de esta figura en los dos ejes con respecto a la simetría central, es decir, a una rotación?



2. Comparen sus trazos y respuestas con los de algunas parejas cercanas y, con la ayuda del profesor, elaboren una explicación clara y breve de la relación que tiene una rotación por un punto y reflejar el objeto sobre dos ejes perpendiculares.



**PRACTICALO**



**Actividad 3.2**

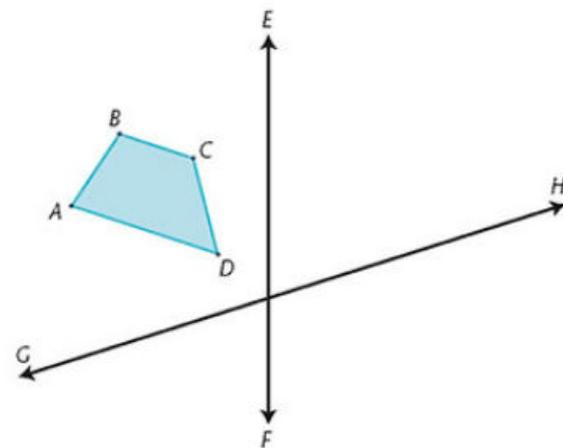
1. ¿Cuál será la posición final de una figura de la que se trazan sus simétricos, tomando como referencia dos ejes oblicuos?

a) Tracen el simétrico del cuadrilátero  $ABCD$  usando el eje  $EF$ , y el cuadrilátero  $A'B'C'D'$  sobre el eje  $GH$ .

• ¿Cuál es el efecto producido en la figura  $ABCD$  después de la segunda simetría?

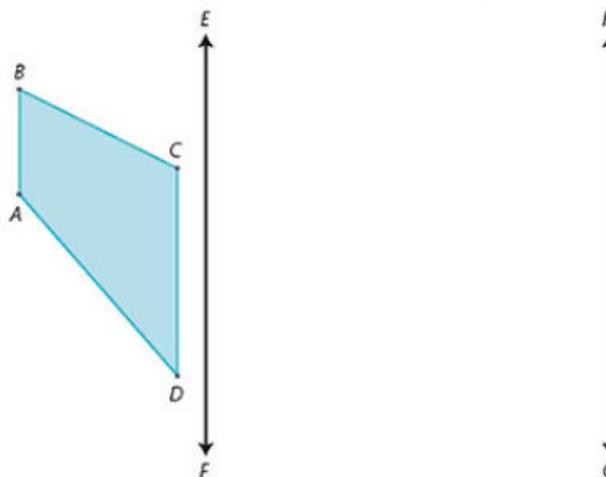
• ¿Se vieron alteradas las dimensiones de la figura original en alguna de las imágenes obtenidas?

• ¿Por qué ocurrió esto?



• Contrasten sus respuestas con las de algunos compañeros y, con la ayuda del profesor, expliquen: ¿cuál es la relación de la reflexión de una figura sobre dos ejes oblicuos en cuanto al ángulo de rotación que se genera? Den algunos ejemplos en los que se demuestre la aplicación de estas propiedades en la vida cotidiana.

2. ¿Cuál es la relación que se puede encontrar entre la simetría axial y la traslación? Para investigar esto, tomen el cuadrilátero mostrado, obtengan el simétrico de la figura sobre el eje  $EF$  y posteriormente obtengan el simétrico del cuadrilátero que trazaron sobre el eje  $HG$ .



a) En su cuaderno, trasladen esta misma figura, coloquen como referencia el punto  $B'$  dado en la figura muestra.

• ¿Qué relación encontraron entre la simetría axial del primer recuadro y la traslación realizada en el segundo recuadro?

¿Por qué ocurre esto?

• ¿Consideran que ésta es la única forma de solucionar esta situación o existen otras posibilidades?

¿Por qué?

• ¿Qué instrumentos del juego de geometría se pueden utilizar para resolver esta actividad?

• ¿Consideran que es posible utilizar otros instrumentos para llegar al mismo resultado?

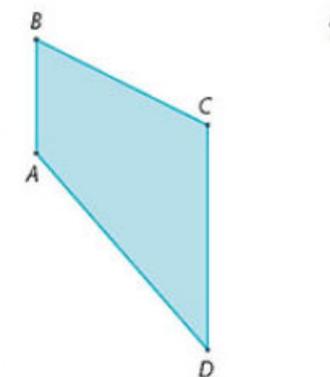
Justifiquen su respuesta.

• ¿Son los mismos instrumentos del juego de geometría los que se utilizan para todos los métodos?

Justifiquen su respuesta.

b) Al analizar los cambios que realizaron en la figura, ¿qué pueden decir que ocurrió con su forma y posición en relación con su perímetro y su superficie?

2. Comparen sus trazos en grupo, concluyan y expliquen, ¿cuál es la relación entre la reflexión de una figura sobre dos ejes paralelos y la traslación de una figura? Diseñen un problema similar en su cuaderno y comenten, frente al grupo, algunas de las estrategias y procedimientos que usaron con otros equipos.





**PRACTICALO**

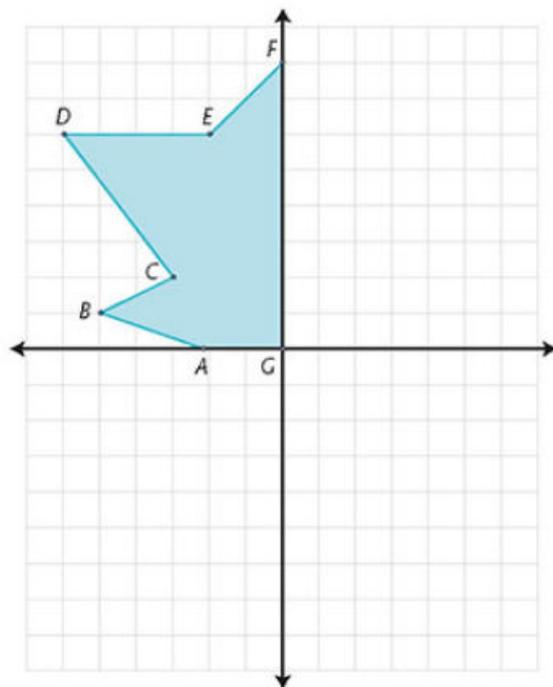


**Actividad 3.3**

Es muy común encontrar diseños decorativos simétricos, éstos toman como fundamento los mismos ejes de simetría que conoces.

1. Con base en la figura dada, concluye el diseño trazando en los otros tres cuadrantes que completan el diseño.

- Describe la estrategia que utilizaron para completar el diseño.
- Cómo base para la simetría, ¿empleaste una traslación o una rotación?
- ¿Por qué ocurrió esto?
- ¿Los ángulos de esta figura son cóncavos y convexos? Describe qué ocurrió con las medidas angulares en los 3 cuadrantes que trazaste.



2. Compara tus trazos y estrategias con los que realizaron algunos de tus compañeros. Elabora un comentario en tu cuaderno en el que expliques cuál es la relación entre la rotación de una figura y la simetría axial. Compártelo con el grupo.



**PRACTICALO**

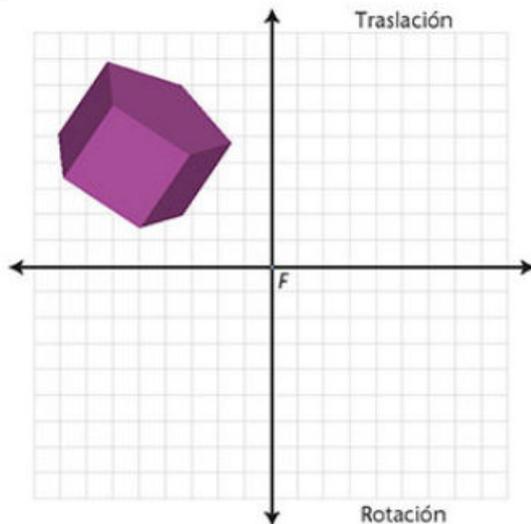


**Actividad 3.4**

Lo que has aprendido hasta ahora, la traslación, la rotación y la simetría de una figura, tiene muchas aplicaciones, por ejemplo: las personas que trabajan con diseño de imágenes, decoración, creación de escenarios, artistas, etcétera, pero esto no se limita a figuras planas, también es posible representar en dos dimensiones figuras tridimensionales.

1. Para analizar esto y contrastarlo con lo que saben, hagan la traslación y la rotación de un sólido, en este caso, un prisma pentagonal; del lado izquierdo, realiza la traslación de la figura, y en el cuadro inferior derecho, la rotación de la misma.

- a) Después de realizar las reproducciones indicadas, respondan:
- ¿Consideran que las figuras obtenidas corresponden a la reflexión real de un objeto tridimensional?



Expliquen su respuesta.

- ¿El procedimiento que emplearon fue el mismo que se usa para una figura plana? Justifiquen su respuesta.
- ¿Afectó en algo el hecho de que la figura muestre una línea oculta en la imagen de la traslación y la rotación? ¿Por qué?
- ¿Qué función tiene el punto F, en relación con los vértices homólogos entre las tres figuras?
- ¿Las medidas de los ángulos internos y la longitud de cada lado, se conservaron o cambiaron? ¿Por qué ocurrió esto?

2. Analicen con ayuda de su profesor los resultados y determinen, ¿qué ocurre cuando se realiza la traslación o la rotación de la imagen de un sólido de manera plana en relación con su representación real?

**Para leer más**

Las figuras de tres dimensiones, también se pueden trazar, trasladar o rotar de manera simétrica.

Cuando se rota una figura en un ángulo de  $180^\circ$  se le llama *simetría central* y se basa en que tres puntos sean **colineales**, tomando al punto central como centro de simetría para todos los puntos.



**Glosario**

**Colineal.** Que se encuentra en la misma línea.

**Para tener en cuenta**

En la *simetría axial*, los lados homólogos de dos figuras son paralelos entre sí y tienen la característica de que siempre conservan la misma medida; de la misma forma, los ángulos correspondientes entre ambas figuras son iguales.

Durante una traslación, todos los lados de ambas figuras son congruentes y paralelos, los puntos que forman cada vértice conservan la misma distancia y los ángulos tienen la misma medida y posición.

Durante una rotación a partir de un ángulo dado, la figura obtenida conserva las dimensiones de sus lados y las medidas de sus ángulos, no invierte su forma como en la simetría axial, y regularmente sus lados no son paralelos, aunque esto último puede depender del ángulo en que se rotó la figura.



**LO QUE APRENDÍ**



En el diseño de mosaicos, se utilizan mucho las propiedades y los conocimientos que han adquirido acerca de reflejar, rotar u obtener la imagen simétrica de otra.

1. Diseñen una estrategia que les permita completar cada recuadro de la tabla gráfica que se encuentra en la siguiente página, de manera que todos tengan tres imágenes.

- Expliquen, ¿cuál es la estrategia que plantearon?

\_\_\_\_\_

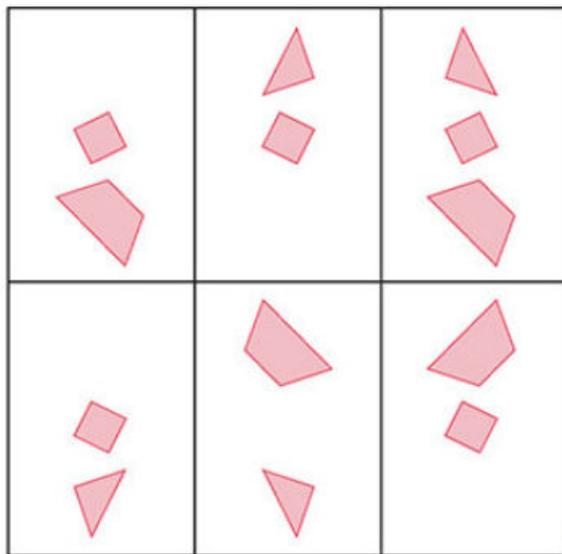
- ¿De qué manera resolvieron el problema referente a la gran cantidad de trazos que se realizan para no confundirse entre ellos?

\_\_\_\_\_

- ¿Es posible demostrar que las figuras se relacionan por medio de una rotación o una traslación?

Justifiquen su respuesta. \_\_\_\_\_

2. Comparen sus resultados y estrategias con los de otro equipo, y, con la ayuda del profesor, comenten, ¿en qué momentos de la vida cotidiana se presentan este tipo de situaciones y cuál es la utilidad práctica de saber realizar estos procedimientos?



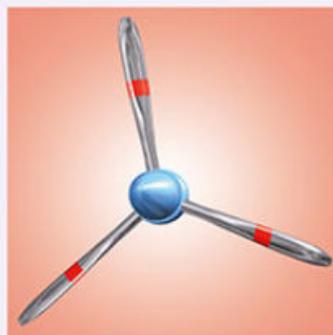
**USALAS TIC**



De la página web <http://www.sangakoo.com/es/temas/simetria-axial-y-simetria-central> (Consultada el día 6 de diciembre de 2016, a las 12:18 horas) podrás descargar un archivo, que te ayudará a enriquecer este tema. Después de estudiarlo, realicen, coordinados por su profesor, un análisis grupal sobre este material.

**Desarrolla tus habilidades**

1. Observa la imagen, es una hélice de avioneta. Primero decide cómo colocar los ejes para que en tu cuaderno realices una traslación y una rotación de la figura.



- a) Explica de qué manera decidiste ubicar los ejes. \_\_\_\_\_
- b) ¿La longitud de los lados se conservó en las figuras que trazaste? ¿Cómo puedes demostrarlo? \_\_\_\_\_
- c) ¿Cómo solucionaste el problema de tener ángulos internos tan grandes y pequeños a la vez? \_\_\_\_\_
- d) ¿Cómo puedes demostrar que los ángulos de las figuras que obtuviste corresponden a los de la figura original? \_\_\_\_\_

2. Compara tu trabajo con el de algunos compañeros y analiza si se traza una figura para obtener otra simétrica con respecto a un eje y luego cambias de posición alejando o acercando la figura original al mismo eje, ¿qué ocurre con la distancia de los vértices y con la posición de los lados homólogos? Haz una descripción que explique esta relación entre los cambios de distancia y la posición de las figuras obtenidas.

Eje temático	Forma, espacio y medida
Tema	Medida
Contenido 4	Análisis de las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo.



**ACUÉRDATE DE...**



1. Diseñen una estrategia para que cada integrante del equipo de trabajo trace un triángulo rectángulo isósceles, pero cada uno debe construirlo con diferentes medidas en sus lados.
2. Utilicen su juego de geometría y, tomando como base el lado mayor, construyan un cuadrado.
  - a) ¿Cuántas veces cabe el triángulo isósceles en el cuadrado? Entonces, ¿cuál es la relación entre la superficie de este triángulo con la del cuadrado?
  - b) ¿Influyó en el resultado el hecho de que todos tuvieran triángulos de diferente tamaño? ¿Por qué ocurrió esto?
  - c) ¿Ocurrirá lo mismo si se utiliza un triángulo rectángulo escaleno? Justifiquen su respuesta.
  - d) ¿Y si se utiliza un triángulo equilátero?
3. Contrasten sus respuestas con las de otros equipos y, con la asesoría del profesor, elaboren una hipótesis acerca de cuál es la relación entre la superficie de un cuadrado y de un triángulo rectángulo, si se toma como lado del cuadrado el lado más largo del triángulo.



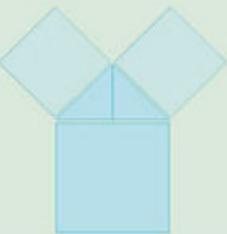
**PRACTÍCALO**



**Actividad 4.1**

1. Uno de los teoremas más importantes de las matemáticas es el de Pitágoras, y para que se inicien en la comprensión de este tema, sigan la secuencia de pasos y respondan las preguntas.

a) Tomen una hoja de papel y tracen un cuadrado de tamaño mediano (entre 4 y 8 cm de lado)	
b) Tracen una de sus diagonales.	
c) Corten el cuadrado y luego recorten por la diagonal para formar dos triángulos.	

<p>d) Formen ahora un triángulo isósceles con ambos triángulos.</p>	
<p>e) Tomen como base los congruentes del triángulo isósceles y construyan un cuadrado para cada uno.</p>	
<p>f) Corten estos cuadrados de la manera más sencilla que puedan y con estas piezas traten de formar el cuadrado cuyo lado sea la base del triángulo.</p>	

- ¿De qué manera acomodaron los triángulos para cubrir la superficie del cuadrado mayor? \_\_\_\_\_
- ¿De qué tipo de triángulo se trata? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es la medida de sus ángulos internos? \_\_\_\_\_
- Si consideran al triángulo central como uno solo, ¿cuál es la relación que pueden establecer entre los cuadrados de los lados iguales con el cuadrado que se puede formar en el lado mayor? \_\_\_\_\_
- ¿Qué relación hay entre los lados de mayor tamaño de cada triángulo con el ángulo opuesto de cada uno? \_\_\_\_\_
- De qué manera expresarían la relación entre los cuadrados de los lados más cortos en comparación con el cuadrado del lado mayor. \_\_\_\_\_

2. Comparen y comenten con el grupo las diferentes estrategias que utilizaron, así como las repuestas; después, con ayuda del profesor, elaboren una definición que exprese esta relación.



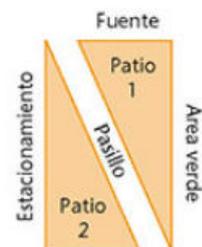
**PRACTICALO**



**Actividad 4.2**

- Para conocer la relación que existe entre los triángulos escalenos y los cuadrados de sus lados, analicen el siguiente plano.
  - En una escuela se desea hacer una remodelación en los jardines. Actualmente el jardín es atravesado por un pasillo, las mejoras que se buscan son: construir una nueva área verde, hacer espacio para colocar una fuente y quitar el segundo patio para ampliar el estacionamiento.  
El diseño está hecho para que cada nueva sección se construya en forma cuadrada para cada lado del triángulo que forma el patio 1.

Plano original



Plano de diseño



- Si el lado del cuadrado de la fuente mide 9 m y el de la sección verde mide 12 m, ¿cuáles son las áreas de la fuente y del jardín, respectivamente? \_\_\_\_\_
- ¿Cuánto mide la superficie que quieren utilizar para el estacionamiento si el largo del pasillo es de 15 metros? \_\_\_\_\_
- ¿Qué tipo de relación se puede establecer entre las áreas más pequeñas y el área mayor? \_\_\_\_\_
- Tomando como base los lados del triángulo que representa al patio 1, ¿a qué clasificación pertenece? \_\_\_\_\_

2. Comparen sus respuestas, expliquen de forma grupal cuáles son las condiciones necesarias para que se dé esta relación de cantidades.

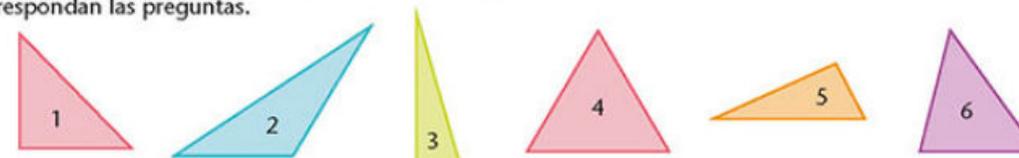


**PRACTICALO**



**Actividad 4.3**

- En el patio de la escuela, el maestro de matemáticas pintó unos triángulos de diversas formas y pidió al grupo que los analizaran y describieran.
  - Resuelvan la actividad que propuso el profesor, para ello midan cada lado de los triángulos mostrados en la imagen y obtengan el cuadrado de cada lado y, con base en las conclusiones de la actividad anterior, respondan las preguntas.



- ¿Cuáles triángulos presentan una relación entre los cuadrados de sus lados? \_\_\_\_\_
- ¿Cómo determinaron esta condición? \_\_\_\_\_
- ¿Qué triángulos no son rectángulos? \_\_\_\_\_
- ¿De qué manera determinaron esto? \_\_\_\_\_
- Por lo tanto, los triángulos rectángulos son: \_\_\_\_\_

- ¿Qué diferencia hay en la relación de los cuadrados de los lados de los triángulos 3 y 5? \_\_\_\_\_
- ¿Cómo se llaman respectivamente estos triángulos? \_\_\_\_\_
- ¿Qué diferencia se puede establecer al sumar los cuadrados de los lados menores en relación con el cuadrado del lado mayor para los triángulos 1, 2 y 6?

2. Completen la tabla, determinen el nombre de cada triángulo con base en la clasificación de sus lados y sus ángulos, y registren los datos de las últimas dos columnas.

Triángulo	Nombre del triángulo por:		Suma de los cuadrados de los lados menores	Cuadrado del lado mayor
	Sus lados	Sus ángulos		
1				
2				
3				
4				
5				
6				

- ¿En cuál de los triángulos la suma de los cuadrados de los dos lados menores fue mayor al cuadrado del lado mayor? \_\_\_\_\_
- ¿Qué provocó esta situación? \_\_\_\_\_
- ¿En qué triángulo no fue posible determinar la relación entre los lados? \_\_\_\_\_  
¿Por qué ocurrió esto? \_\_\_\_\_
- ¿En qué triángulo la suma de los cuadrados de los lados menores fue menor al cuadrado del lado mayor? \_\_\_\_\_
- ¿Qué originó esta condición? \_\_\_\_\_
- ¿En qué triángulos sí se cumplió con la condición de que la suma de los cuadrados de los lados menores fuese igual al cuadrado del lado mayor? \_\_\_\_\_
- ¿Qué característica en común tienen estos triángulos, que permitió que se cumpliera con la condición buscada? \_\_\_\_\_

3. Revisen sus respuestas en equipo y, con el profesor, determinen: ¿por qué sólo es aplicable esta relación de superficies en determinados triángulos?

**Para tener en cuenta**

Pitágoras utilizó su teorema para resolver muchos problemas de la vida cotidiana, por ejemplo, para conocer la altura de una construcción, basándose en su sombra, o para calcular la longitud que debe tener una escalera, dependiendo de la altura que se requiera que alcance; para ello desarrolló algoritmos matemáticos.

En la actividad anterior analizaron la relación que tienen los cuadrados de los **catetos**, es decir, los lados que forman el ángulo recto de un triángulo rectángulo con la **hipotenusa**, es decir, el lado que forma el cuadrado del lado más largo. Es momento de experimentar con el uso del triángulo rectángulo y los cuadrados de los lados que forman el ángulo recto para representar la relación entre los cuadrados de cada lado, pero de manera algebraica para que puedan describir y definir esta relación, como lo hizo Pitágoras.

**Glosario**

**Cateto.** Son los lados que forman el ángulo recto en un triángulo rectángulo.

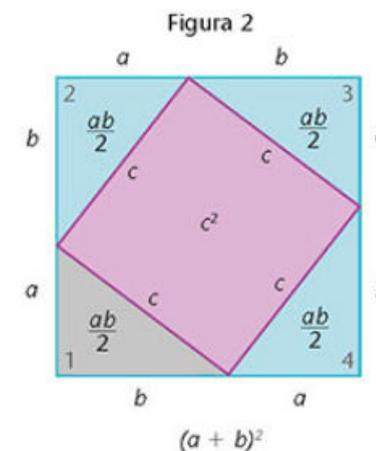
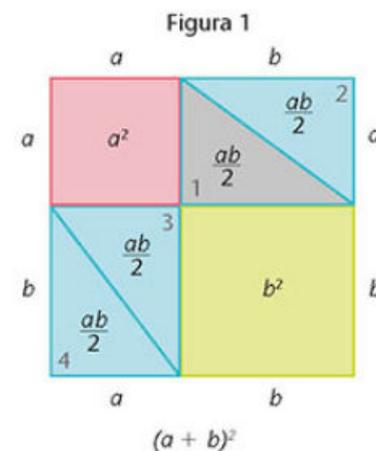
**Hipotenusa.** Es el lado mayor opuesto al ángulo recto.

**PRACTICALO**



**Actividad 4.4**

1. Comparen y analicen las figuras mostradas.



a) Ambas figuras representan la misma superficie, son cuadrados y sus lados miden lo mismo. Considerando la información anterior, responden las preguntas.

- Tomando como base el binomio que representa un lado, ¿cuál es la expresión algebraica que representa el área total para ambas figuras?, es decir,  $(a + b)^2 =$  \_\_\_\_\_
- ¿Cómo se puede representar esta misma superficie, pero con base en los cuatro triángulos rectángulos indicados en la figura 1?, es decir,  $(a + b)^2 =$  \_\_\_\_\_
- ¿Cómo se puede representar esta misma superficie, pero con base en los cuatro triángulos rectángulos indicados en la figura 2?, es decir,  $(a + b)^2 =$  \_\_\_\_\_
- Ya que las dos expresiones algebraicas que obtuvieron representan la misma cantidad es posible igualarlas entre sí. Escriban cómo queda esta expresión algebraica.  
\_\_\_\_\_
- Ahora simplifiquen la expresión reduciendo los términos semejantes. Escriban la expresión final que obtuvieron.  
\_\_\_\_\_

2. Comparen sus resultados con los de otro equipo y, con la ayuda de su profesor, elaboren una definición que explique, cómo se debe interpretar la relación entre la suma de los cuadrados de los lados que forman el ángulo recto en un triángulo rectángulo y el cuadrado del lado opuesto al ángulo recto.

**LO QUE APRENDÍ**

1. En la escuela se realizó un concurso de matemáticas; hubo cuatro alumnos que empataron en primer lugar. Para determinar al ganador, el comité decidió poner un problema similar a cada uno de ellos, pero con diferentes datos, y el que lograra resolverlo y explicarlo con más claridad sería el triunfador.

Figura 1

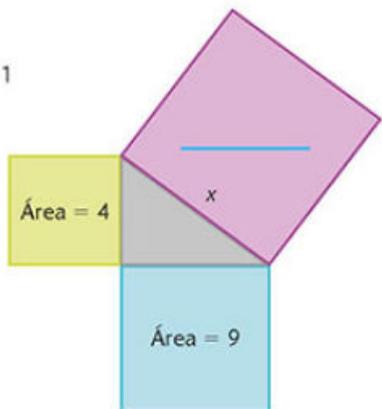


Figura 3

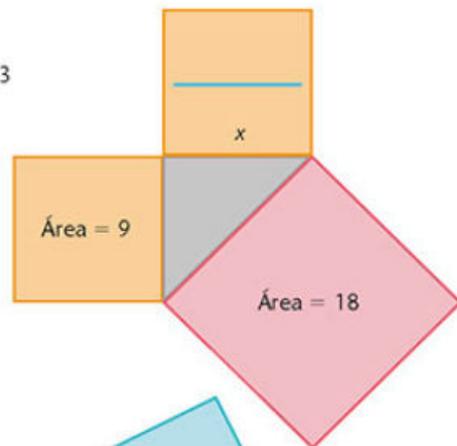


Figura 2

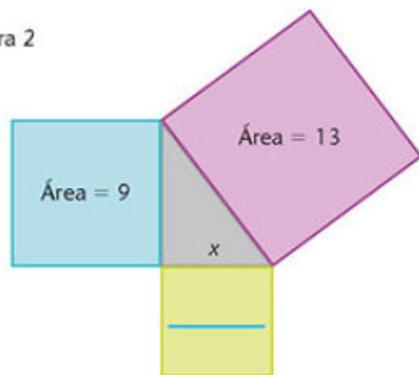
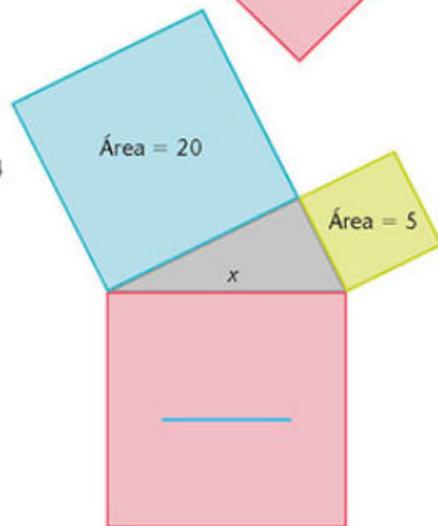


Figura 4



- ¿Qué proceso utilizaste para encontrar la superficie faltante de la figura 1? \_\_\_\_\_
- ¿Cómo determinaste la medida del lado indicado con la letra  $x$  en la figura 1? \_\_\_\_\_
- ¿Cómo determinaste la medida de la superficie faltante en la figura 2? \_\_\_\_\_
- Explica, ¿qué similitudes o diferencias ocurrieron al determinar las medidas de los lados y las medidas de los lados indicados para las figuras 3 y 4 con respecto a las figuras 1 y 2? \_\_\_\_\_

- ¿Consideras que las cuatro figuras tienen el mismo nivel de dificultad para resolverlas? \_\_\_\_\_ Justifica tu respuesta. \_\_\_\_\_
- Si el ganador del concurso fue el que tenía la figura más sencilla de explicar, responde: ¿cuál de las cuatro figuras puede ser explicada con más facilidad? \_\_\_\_\_ ¿Por qué consideras esto? \_\_\_\_\_

2. Coteja tus resultados con los de algunos de tus compañeros cercanos y elabora un comentario en tu cuaderno que explique qué diferencia encontraste en el procedimiento cuando se calcula el cuadrado de la hipotenusa a cuando se calcula el cuadrado de alguno de los catetos.

**Desarrolla tus habilidades**

- En las calles cercanas a una zona de escuelas piensan colocar algunos anuncios de educación vial, los carteles van preparados con un tubo que les permita ensamblarlos fácilmente.
  - Reúnanse en equipos, analicen la figura y determinen, ¿cuál es la longitud que debe tener el tubo si su medida equivale a la altura del triángulo equilátero que forma el anuncio?



- ¿Cuál es la longitud del tubo? \_\_\_\_\_
  - ¿Qué método o procedimiento utilizaron para determinar la longitud del tubo? \_\_\_\_\_
  - ¿Cómo se puede comprobar que la medida es la adecuada? \_\_\_\_\_
2. Comparen sus estrategias y resultados con los de otros equipos y, con la ayuda del profesor, determinen, ¿cuál planteamiento es más adecuado?, y si es posible obtener este dato usando algún otro método.

**USA LAS TIC**

En la página <http://www.disfrutalasmatemáticas.com/geometria/teorema-pitagoras.html> (Consultada el día 3 de diciembre de 2016, a las 10:58 horas), encontrarás más información acerca de este tema, así como un interactivo para su demostración. Compara lo que veas con lo que aprendiste en este libro y elabora un comentario acerca de tu visita a esta página. Compártelo con tu profesor y pídele que te dé su opinión respecto a la página.

Eje temático	Forma, espacio y medida
Tema	Medida
Contenido 5	Explicitación y uso del teorema de Pitágoras

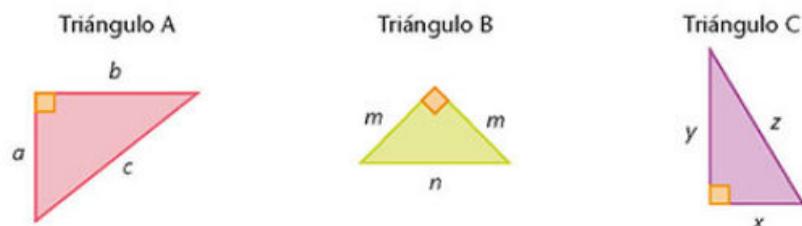


**ACUÉRDATE DE...**



1. En una fábrica de artículos de hierro se están estudiando algunas nuevas formas para las escuadras de repisa. Como los tamaños son variados, se decidió utilizar letras para encontrar una expresión que permita trabajar con cualquier tamaño. Ustedes, en el contenido anterior, aprendieron a relacionar los catetos de un triángulo rectángulo con la hipotenusa.

Analicen los triángulos mostrados en la imagen y definan una estrategia para encontrar las medidas que los relacionan y registren sobre las líneas los datos solicitados.



- a) Para el triángulo A:
- ¿Cuál es la expresión algebraica que relaciona los catetos con la hipotenusa? \_\_\_\_\_
  - Con base en esta expresión, ¿cómo se puede expresar el valor de  $c^2$ ? \_\_\_\_\_
  - ¿Cómo se expresa el valor de  $a^2$ ? \_\_\_\_\_
  - Entonces, de qué manera se expresan algebraicamente los valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$  con base en la relación de los lados de un triángulo rectángulo, registren sus expresiones.  
 $a =$  \_\_\_\_\_  $b =$  \_\_\_\_\_  $c =$  \_\_\_\_\_

- b) Para el triángulo B:
- ¿Cómo se expresa el valor de  $n^2$  en relación con los catetos? \_\_\_\_\_
  - ¿Cómo se expresa el valor para cualquiera  $m^2$ ? \_\_\_\_\_
  - ¿De qué manera determinaron esta expresión? \_\_\_\_\_

- c) Para el triángulo C:
- Registren la relación que representa cada uno de los lados con una expresión algebraica  
 $x^2 =$  \_\_\_\_\_  $y^2 =$  \_\_\_\_\_  $z^2 =$  \_\_\_\_\_
  - Por lo tanto:  
 $x =$  \_\_\_\_\_  $y =$  \_\_\_\_\_  $z =$  \_\_\_\_\_
  - Entonces, si tomamos como base la expresión  $z^2$ , ¿de qué manera se lee esta expresión algebraica? \_\_\_\_\_
  - ¿Cómo leerían esta expresión algebraica en voz alta para el valor de  $z^2$ ? \_\_\_\_\_

2. Comparen sus resultados con los de algunas parejas cercanas y con la ayuda del profesor determinen, ¿de qué manera se puede expresar esta misma relación para cualquier triángulo rectángulo?

**Para tener en cuenta**

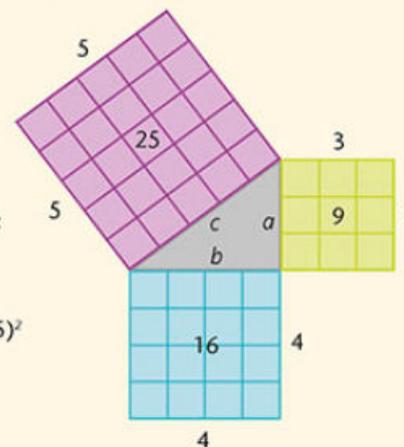
El teorema de Pitágoras dice: para cualquier triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de sus catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

Si  
 $a = 3$  cm  
 $b = 4$  cm  
 $c = 5$  cm

Y sabemos que:  
 $a^2 + b^2 = c^2$

Entonces:  
 $(3)^2 + (4)^2 = (5)^2$

Por lo tanto:  
 $9 + 16 = 25$



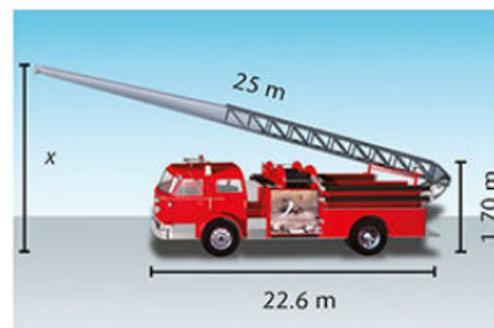
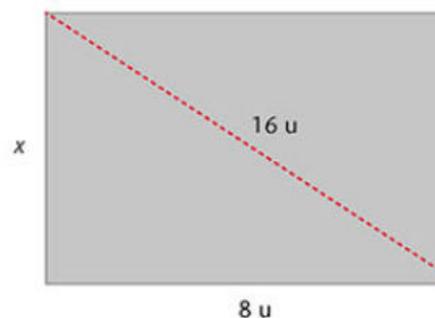
**PRACTÍCALO**



**Actividad 5.1**

1. En la sección anterior analizaron el triángulo rectángulo basándose en una pirámide, ahora analizarán la aplicación del teorema de Pitágoras en combinación con algunos rectángulos.

- ¿Cuánto mide la altura del rectángulo dado? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es la expresión algebraica que permite encontrar el valor de  $x$ ? \_\_\_\_\_
- ¿De qué manera realizaron el planteamiento de esta expresión? \_\_\_\_\_
- ¿A qué distancia del piso se encuentra el extremo de la escalera telescópica del camión de bomberos? \_\_\_\_\_



- ¿Cuál es la expresión algebraica que permite solucionar esta situación? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es la estrategia que utilizaron para encontrar el valor de  $x$ ? \_\_\_\_\_

2. Comparen sus resultados con los de un equipo cercano y determinen qué condiciones debe tener una situación para que se opte como método de solución el teorema de Pitágoras.



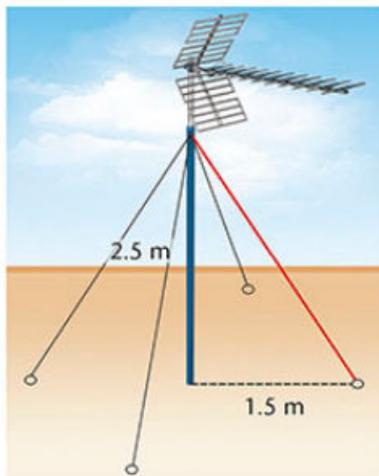
**PRACTICALO**



**Actividad 5.2**

Analicen las siguientes situaciones y respondan las preguntas planteadas.

1. El papá de Emilia compró una antena para televisión, la cual estará sujeta a un tubo que mide 2.5 m de longitud; a una distancia de 1.5 m de la base colocará los soportes que sujetarán los tensores de alambre para fijarla.



a) Analicen el esquema y diseñen una estrategia que les permita saber, ¿cuál es la longitud que deben tener estos alambres tensores?

• ¿De qué manera se puede representar algebraicamente la longitud de cada tensor? \_\_\_\_\_

• Considerando el triángulo rectángulo que se forma, ¿qué parte representa cada tensor? \_\_\_\_\_

• ¿Qué expresión algebraica representa la longitud que debe tener cada tensor? \_\_\_\_\_

• ¿Cuál es la longitud de cada tensor? \_\_\_\_\_

• Si el alambre lo compra por metros, ¿cuántos necesita como mínimo para fijar la antena si va a poner al menos cuatro tensores? \_\_\_\_\_

b) Registren en su cuaderno la expresión algebraica que plantearon, así como el desarrollo del algoritmo para obtener el resultado. ¿Hay alguna diferencia al resolver operaciones cuando los datos son números decimales a cuando son naturales? \_\_\_\_\_

2. Algunos fabricantes de objetos decorativos utilizan las pirámides para crear adornos, por ejemplo, las pirámides de base pentagonal. De todas sus dimensiones la única que no se puede medir de manera directa es la altura de la pirámide.

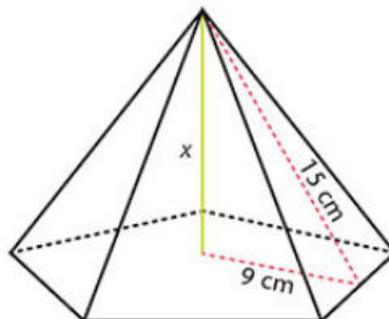
a) Analicen la imagen de la pirámide con los datos dados y respondan:

• ¿Cuál es la expresión algebraica que permite calcular el valor de la altura de la pirámide? \_\_\_\_\_

• ¿Cuánto mide la altura? \_\_\_\_\_

• Expliquen, ¿cómo se debe realizar el planteamiento de la expresión que permite solucionar esta situación? \_\_\_\_\_

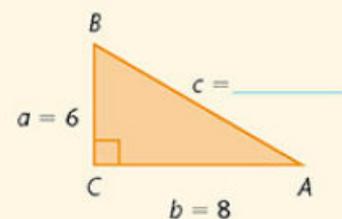
• ¿Cómo explicarían la relación entre la pirámide, el triángulo rectángulo y el teorema de Pitágoras? \_\_\_\_\_



3. Comparen sus resultados con los obtenidos por otros equipos y, con la ayuda del profesor, determinen, ¿cuál es la relación que se puede establecer entre una pirámide y el teorema de Pitágoras?

**Para leer más**

Desarrollar un algoritmo de manera clara, limpia y ordenada reduce la posibilidad de errores durante el proceso, en este caso, se puede desarrollar de esta manera.



$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$6^2 + 8^2 = c^2$$

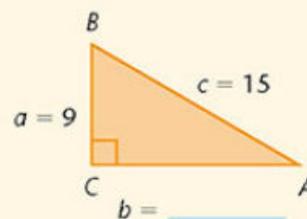
$$36 + 64 = c^2$$

$$100 = c^2$$

$$\sqrt{100} = c$$

$$10 = c$$

$$c = 10$$



$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$9^2 + b^2 = 15^2$$

$$81 + b^2 = 225$$

$$b^2 = 225 - 81$$

$$b^2 = 144$$

$$b = \sqrt{144}$$

$$b = 12$$

Alinear los signos "igual a", siempre es muy útil.



**PRACTICALO**

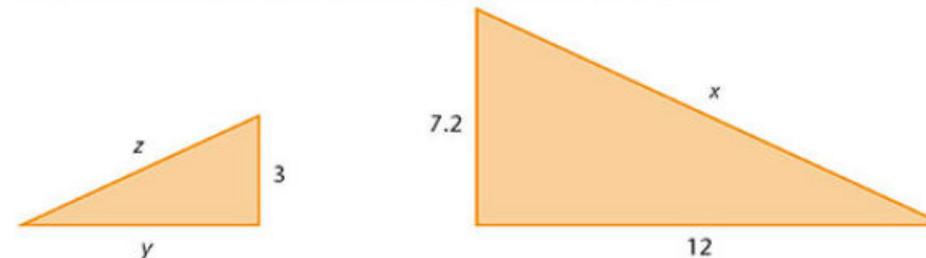


**Actividad 5.3**

1. Analicen el problema planteado y contesten las preguntas.

En ocasiones, para aplicar el teorema de Pitágoras es necesario auxiliarse de otros procedimientos que nos permitan obtener los datos que faltan.

a) Estos triángulos son semejantes, determinen el valor de las literales indicadas.



• ¿Cuál de las tres literales es la que resolvieron primero? \_\_\_\_\_

• ¿Cuál es el valor de x? \_\_\_\_\_ ¿Cuál es el valor de y? \_\_\_\_\_ ¿Cuál es el valor de z? \_\_\_\_\_

• Describan, ¿cuál es la estrategia para encontrar el valor de las tres literales? \_\_\_\_\_

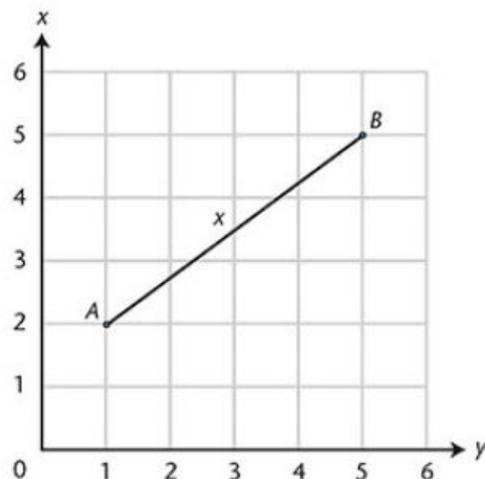
- ¿Qué otros procedimientos, además del teorema de Pitágoras, tuvieron que utilizar para resolver la situación?

- ¿Cuál literal corresponde al último valor que encontraron?
- ¿Qué operación realizaron para encontrar el valor de esta última literal?
- ¿Es posible obtener este resultado utilizando otro procedimiento? Justifiquen su respuesta.

2. Comparen sus resultados con los de algunas parejas cercanas y con el profesor elaboren una explicación breve de cómo se utiliza el teorema de Pitágoras para calcular la hipotenusa o alguno de los catetos de un triángulo rectángulo y den algunos ejemplos de dónde se aplican en la vida diaria.

### LO QUE APRENDÍ

1. En esta actividad trabajarás con el teorema de Pitágoras en distintos casos de la vida cotidiana. Analiza los esquemas dados y encuentra el valor de  $x$  en cada situación.



Valor del segmento AB: \_\_\_\_\_

- Escribe en tu cuaderno el desarrollo de las operaciones y comprueba tus resultados.

2. Compara tus resultados con los de algunos compañeros y, con la ayuda del profesor, elabora una síntesis que explique de manera concreta, ¿qué es el teorema de Pitágoras y cómo se aplica de manera práctica en la solución de problemas?, diseñen un problema propio de manera grupal donde se aplique el teorema de Pitágoras y resuélvanlo por equipos; comparen sus resultados y verifiquen que sean correctos.

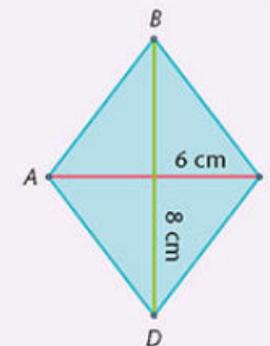
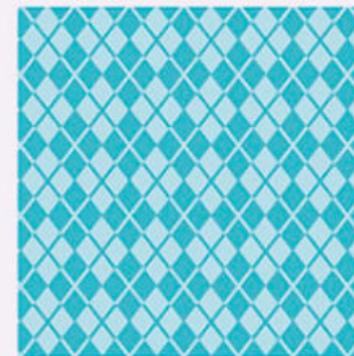
Altura que alcanza la escalera: \_\_\_\_\_



Estatura de la persona: \_\_\_\_\_

### Desarrolla tus habilidades

1. En la industria textil, las figuras con rombos siempre han tenido mucha aceptación. Analiza una de estas figuras y la relación que tiene con el teorema de Pitágoras.
  - a) Diseña una estrategia para conocer cuánto mide el perímetro del rombo, según las medidas indicadas en la figura inferior, considera que los datos que se dan es la longitud total de los dos ejes.



Perímetro = \_\_\_\_\_

- ¿Cuál es la medida del perímetro?
- ¿Cuál fue la estrategia que utilizaste?
- ¿Cuáles fueron las medidas que tomaste de base para poder aplicar el teorema de Pitágoras?
- ¿Qué longitud tuviste que calcular, la de un cateto o de la hipotenusa?

2. Analiza tus resultados con tus compañeros y con la ayuda del profesor demuestra que tu procedimiento fue el más adecuado o si pudiste realizarlo de una forma más simple y efectiva.

### USALAS TIC



En la página <http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/pitagoras.htm> (Consultada el día 3 de diciembre de 2016 a las 11:06 horas) podrás encontrar algunas demostraciones del teorema de Pitágoras; después de visitarla compara los procedimientos mostrados con el que aprendiste en este libro y determina cuál te agradó más. Explica por qué.

Eje temático	Manejo de la información
Tema	Nociones de probabilidad
Contenido 6	Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios (regla de la suma).



**ACUÉRDATE DE...**



1. Analicen y resuelvan la siguiente situación.

Jesús y Yarena son hermanos y entre los dos han decidido contribuir con las labores de su casa. Jesús propone lanzar una moneda y un dado al mismo tiempo, por lo que pueden usar un diagrama de árbol, y de esa manera decidir quién hará cada tarea. Yarena piensa que es más conveniente usar un arreglo rectangular.

a) Elaboren el diagrama de árbol y el arreglo rectangular solicitado en cada recuadro.

Diagrama de árbol para el lanzamiento de un dado y una moneda

Arreglo rectangular para el lanzamiento de dos dados

		Dado 1					
		1	2	3	4	5	6
Dado 2	1						
	2						
	3						
	4						
	5						
	6						

• ¿Cuál de las representaciones consideran que es más adecuada a la situación de lanzar dos dados? Expliquen su respuesta.

• ¿En cuál de los dos casos consideran que es más sencillo obtener la posibilidad de ocurrencia de un evento?

• ¿Qué es más probable, que salga una pareja de números pares o una cuya suma de los dígitos sea 9?

• ¿De qué manera llegaron a esta conclusión?

2. Comparen sus resultados con los de dos equipos cercanos y, con la ayuda del profesor, concluyan cuál es la ventaja de hacer esquemas, tablas o diagramas para analizar con seguridad los resultados de un fenómeno como éste.



**PRACTÍCALO**



**Actividad 6.1**

1. Analicen la situación planteada y respondan las preguntas.

En una secundaria particular dos grupos de tercer grado tienen 30 alumnos cada uno. El grupo A tiene 18 mujeres y el B tiene 13, con estos datos completa la tabla y responde las preguntas.

	Grupo A	Grupo B	TOTAL
Hombres			
Mujeres			
TOTAL			

a) Considera las siguientes probabilidades:

Es hombre

Pertenece al grupo A

Pertenece al grupo B y es mujer

• ¿Es posible seleccionar a un alumno al azar que esté en el grupo B y que sea mujer?

• ¿Es posible que el alumno seleccionado cumpla con las condiciones 2 y 3?

Expliquen su respuesta.

• Qué es más probable, ¿que el alumno seleccionado sea mujer o que sea una mujer del grupo B?

• Qué es más probable, ¿que pertenezca al grupo A y que sea mujer?, ¿o que pertenezca a B y que sea mujer?

• ¿Cuál es la probabilidad de que el alumno seleccionado no sea una mujer del grupo B?

• ¿Cuál es la probabilidad de que el alumno seleccionado sea hombre y esté en el grupo A?

**Para tener en cuenta**

Dos eventos son considerados complementarios si al momento de unirlos el resultado es todo el espacio muestral, y cuando se realiza su intersección se obtiene un conjunto vacío.

Dos eventos son independientes cuando la probabilidad de que uno ocurra no depende en ningún momento de la ocurrencia del otro.

**USAS LAS TIC**

Visita la página web <http://www.estudiantes.info/matematicas/problemas/3-eso/probabilidad.htm> (Consultada el 3 de diciembre de 2016, a las 11:08 horas), en ella encontrarás información de probabilidad y problemas resueltos, puedes comparar esta información con los conocimientos que ya tienes y después de tu visita comenta con tu profesor cuál es tu opinión y en qué consideras que puede ser útil esta información para enriquecer tus conocimientos.

**PRACTÍCALO**

**Actividad 6.2**

1. Lean la siguiente situación y contesten las preguntas.

En algunos juegos de mesa no sólo utilizan dados con seis caras (cúbicos), también utilizan formas de 4, 8, y hasta 20 caras; para analizar las características de estas piezas tomaremos un tetraedro (4 caras) y un octaedro (8 caras). En la imagen se muestra cada una de estas figuras, así como sus desarrollos planos, lo que permite ver con claridad todas sus caras.



a) Escriban la probabilidad de que ocurran cada uno de los siguientes eventos.

Octaedro				Tetraedro			
Obtener:		Obtener:		Obtener:		Obtener:	
Un 3	<input type="checkbox"/>	Un número impar	<input type="checkbox"/>	Un 4	<input type="checkbox"/>	Un número par o uno impar	<input type="checkbox"/>
Un número mayor a 4	<input type="checkbox"/>	Un número par o uno impar	<input type="checkbox"/>	Un número que no sea 4	<input type="checkbox"/>	Un número par y mayor que 3	<input type="checkbox"/>
Un número menor a 4	<input type="checkbox"/>	Un múltiplo de 2 o 3	<input type="checkbox"/>	Un número par	<input type="checkbox"/>	Un número menor a 3	<input type="checkbox"/>
Un número par	<input type="checkbox"/>			Un número impar	<input type="checkbox"/>		

b) Contesten las preguntas.

- ¿Cuáles son las características de los eventos complementarios? \_\_\_\_\_
- Justifiquen su respuesta. \_\_\_\_\_

2. Reúnanse en dos equipos, un equipo comentará la forma en que pueden aplicarse los eventos independientes en la vida cotidiana y el otro equipo comentará cómo pueden emplearse los eventos complementarios en la vida cotidiana, después se nombrará a un representante por equipo para que expongan sus comentarios a los compañeros y entre todos enriquezcan el trabajo.

- ¿Qué probabilidad hay de obtener un 5? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 5 o un 8? \_\_\_\_\_
- ¿Cómo obtuvieron la probabilidad de obtener un 5 o un 8? \_\_\_\_\_

**Para tener en cuenta**

Matemáticamente, la regla de la suma de dos sucesos se expresa como:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Sin embargo, si A y B son mutuamente excluyentes, entonces:

$$P(AB) = 0$$

Esto será igual a:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Y se lee: la probabilidad de A en unión con B es igual a la probabilidad de A más la probabilidad de B.

**Para leer más**

Aritméticamente, en la suma de dos eventos que son complementarios siempre se obtiene como resultado 1.

**PRACTÍCALO**

**Actividad 6.3**

1. Preparen dos dados o, en su defecto, hagan dos grupos de tarjetas numeradas del 1 al 6 y entre tres de los integrantes del equipo hagan el mismo experimento.

a) Tiran ambos dados o elegir al azar dos tarjetas (una de cada grupo). Registren sus resultados en la siguiente tabla.

Tirada	Alumno 1		Alumno 2			Alumno 3		
	Dado 1	Dado 2	Tirada	Dado 1	Dado 2	Tirada	Dado 1	Dado 2
1			1			1		
2			2			2		
3			3			3		
4			4			4		
5			5			5		

- b) Comparen sus resultados con los del resto del grupo.
- ¿Consideran que es posible determinar una tendencia o hacer alguna predicción sobre alguna de las tiradas con sólo tener estas tres tablas de resultados? Expliquen su respuesta.
  - Sabiendo que cada dado tiene 6 caras y que el número de puntos se repite, ¿cuál es el espacio muestral al lanzar dos dados? ¿cuántas permutaciones se pueden obtener en total?
  - ¿De qué manera se obtiene este resultado?
2. Contrasten en grupo sus respuestas y concluyan: ¿cuál es la importancia de realizar un experimento aleatorio y cuál es el propósito de realizar este tipo de estudios?



**PRACTICALO**

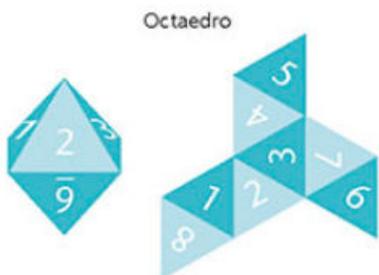


**Actividad 6.4**

1. Analicen la situación planteada y al final contrasten sus resultados y conclusiones con los que obtuvieron en la actividad anterior.

Después de tirar un dado puede ocurrir cualquiera de las siguientes condiciones:

- a) Evento uno: se obtiene un múltiplo de 3.
- b) Evento dos: se obtiene un número par mayor que 4.
- ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra el evento tres?  $P(3) =$
  - ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra el evento cuatro?  $P(4) =$
  - ¿Qué significa que un evento tenga la condición de que ocurra el evento 3 o el 4?
  - Entonces, ¿cuál es la probabilidad de que ocurra el evento tres o cuatro?  $P(3 \text{ o } 4) =$



2. Al comparar los resultados de la primera situación para los eventos 1 y 2, con la segunda para los eventos 3 y 4.
- a) ¿Consideran que hay alguna diferencia en sus resultados y en el tipo de eventos que se tratan? Justifiquen su respuesta.
- b) Comparen sus resultados con los de otros equipos y, con la asesoría del profesor, determinen:
- ¿Cuál es la conveniencia de analizar en primer lugar la probabilidad independiente de cada uno de los eventos dados en cada situación?
  - ¿Es posible realizar la suma de las probabilidades de cada uno, si éstos tienen algún elemento en común?
  - ¿Qué ocurre si no tienen elementos en común?
  - ¿Cuál es el evento que tiene el conector y?
  - ¿Qué diferencia hay al usar o y y en una condición?
  - ¿Qué son los eventos compuestos que utilizan los conectores o y y?
  - ¿Cuál es la relación que se observa en la relación que hay en la probabilidad de cada uno?

**Para tener en cuenta**

Los eventos compuestos pueden llevar dos conectores. Si llevan o indica que puede pasar cualquiera de ellos, pero sólo uno; en cambio, si llevan y, indica que pueden pasar dos o más al mismo tiempo.



**PRACTICALO**



**Actividad 6.5**

1. A Luisa le gusta tener sus monedas en un monedero, en la imagen se muestran las monedas que hoy tiene.



- ¿Cuál es la probabilidad de sacar una moneda de 1 peso?
  - ¿Cuál es la probabilidad de que sea de 2 pesos?
  - ¿Cuál es la probabilidad de que la moneda sea de 5 o de 10 pesos?
  - ¿Cuál es la probabilidad de que la moneda sea mayor que 1 peso y menor que 10?
- a) De estos eventos mencionados:
- ¿Algunos son complementarios? Explica por qué.
  - ¿Hay condiciones que sean mutuamente excluyentes? Explica tu respuesta.

2. Compara tus resultados con los que obtuvieron algunos de tus compañeros y, con la asesoría de tu profesor, determina las condiciones que permiten saber si dos eventos son mutuamente excluyentes o complementarios.

**Para tener en cuenta**

Los eventos mutuamente excluyentes son aquellos en los que si un evento sucede, significa que el otro no puede ocurrir.



**LO QUE APRENDÍ**



1. Un juego de mesa contiene dos dados y un tablero, para avanzar se lanzan los dados y se suma el número de puntos que se obtengan en su cara superior.

a) Analicen esta situación y respondan las preguntas.

- Si se considera como favorable a uno solo de estos eventos, ¿cuál es su probabilidad?
- De todos los posibles resultados, ¿qué eventos propondrían para que se consideren complementarios?

• Expliquen cómo lo determinaron.

• Propongan dos eventos que sean complementarios.

• Expliquen cómo lo realizaron.

• Diseñen dos eventos que sean mutuamente excluyentes, ¿cuáles serían?

b) Consideren los siguientes eventos, encuentren sus resultados posibles y determinen la probabilidad de cada uno, tomen en cuenta que se considera cada evento como la suma de los puntos de la cara superior de cada dado.

• Evento uno: el resultado de la suma es 12.

Número de resultados posibles:

Probabilidad de ocurrencia:

• Evento dos: el resultado de la suma es 7.

Número de resultados posibles:

Probabilidad de ocurrencia:

• Evento tres: el resultado de la suma es mayor a 10 o menor que 10.

Número de resultados posibles:

Probabilidad de ocurrencia:

c) Respondan las preguntas:

• ¿Qué estrategia utilizaron para encontrar todos los resultados posibles?

• ¿Cuál de los eventos tiene una probabilidad mayor?

• ¿Cuál evento tiene una probabilidad menor?

• ¿Alguna de estas condiciones contiene eventos complementarios?

Expliquen su respuesta.

• ¿Hay alguna condición que muestre eventos que sean mutuamente excluyentes?

Justifiquen su respuesta.

2. Comparen sus resultados y respuestas con algunos de sus compañeros y con la ayuda del profesor elaboren una definición formal para cada uno de los eventos que estudiaron en este contenido.

**Desarrolla tus habilidades**

1. En equipos, analicen la situación planteada y respondan las preguntas.

La señora Alicia vende flores y a cada cliente le gusta obsequiarle una flor sorpresa, para ello tiene una canasta con flores, la condición es que el cliente tome una al azar.

a) Hoy puso rosas, 4 blancas, 3 amarillas y 6 rojas, además, 2 margaritas.

• ¿Cuál es el espacio muestral?

• ¿Cuál es la probabilidad de sacar una rosa o una margarita?

• ¿Cuál es la probabilidad de sacar una rosa roja o una amarilla?

• ¿Cuál es la probabilidad de sacar una margarita?

• ¿Cómo pueden definir un evento que sea imposible?

• ¿Cuál es la probabilidad de que no salga una margarita?

• ¿Alguno de estos eventos son complementarios?

Justifiquen su respuesta.

• ¿Algunos de estos eventos son mutuamente excluyentes?

Expliquen, ¿por qué ocurre esto?

• Diseñen un evento que sea complementario, ¿cuál sería?

• ¿Cómo plantearían dos eventos que sean mutuamente excluyentes?

2. Comparen sus resultados con los de algunos de sus compañeros y, con la ayuda del profesor, elaboren una tabla comparativa que muestre los distintos tipos de eventos y las características de la probabilidad de cada uno.

**Evaluación tipo PISA**

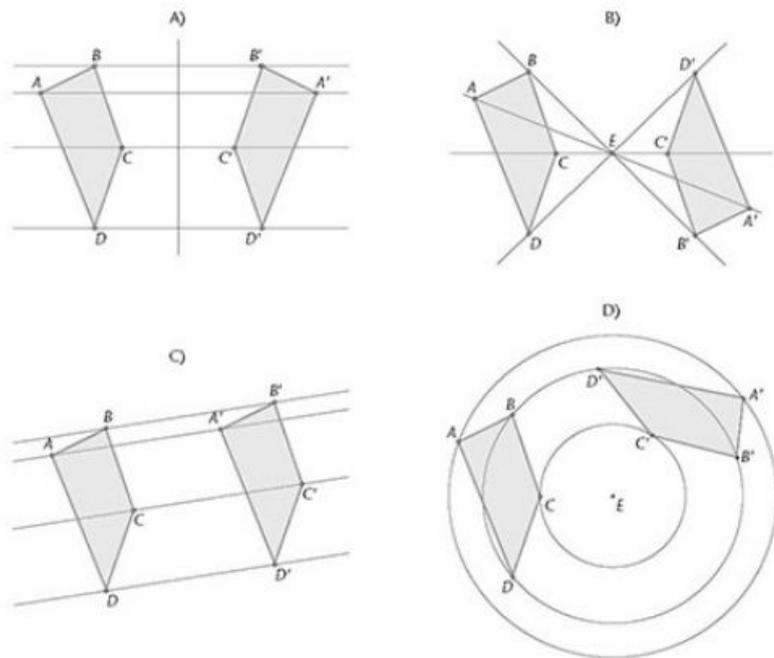
1. Para proteger las botellas de cristal, una empresa las empaqueta en cajas de cartón con base rectangular firme, ésta tiene la misma forma en todas las cajas, independientemente de su tamaño; si el área está dada por una expresión  $x^2 + 7x + 12$ , ¿qué expresiones algebraicas representan el largo y el ancho de la base?

- a)  $(x - 3)(x - 4)$
- b)  $(x + 3)(x - 4)$
- c)  $(x - 3)(x + 4)$
- d)  $(x + 3)(x + 4)$

2. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones indica de manera correcta las propiedades de rotación y traslación de una figura? Encierra "sí" o "no", según corresponda.

a) La rotación de una figura se realiza con un giro de $180^\circ$ sobre su punto de rotación para cada uno de sus vértices.	Sí	No
b) Durante la rotación o traslación de una figura se conservan las medidas de sus lados y sus ángulos.	Sí	No
c) Al trasladar una figura esto equivale a verla reflejada mediante un eje de simetría.	Sí	No
d) Cuando una figura se traslada o se rota, siempre sus lados son paralelos a los de la figura original.	Sí	No

3. Para ilustrar una tarea de matemáticas, Ramiro hizo algunos diseños. Analiza las imágenes y responde las preguntas.

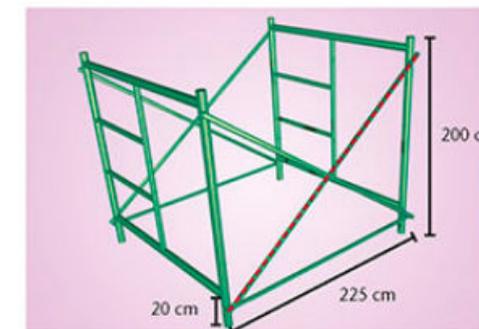


**Evaluación tipo PISA**

- a) ¿En cuál diseño aplicó la simetría central? \_\_\_\_\_
- b) ¿En cuál diseño aplicó la simetría axial? \_\_\_\_\_
- c) Describe cuál es la diferencia entre ambas. \_\_\_\_\_

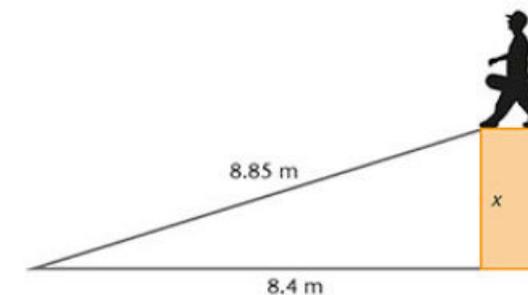
4. El tío de Esteban trabaja en la construcción, el andamio que utiliza se dañó en uno de sus soportes, analiza la imagen y determina las medidas del nuevo soporte que debe comprar.

- a) 295.24 cm
- b) 230.35 cm
- c) 288.14 cm
- d) 300.00 cm



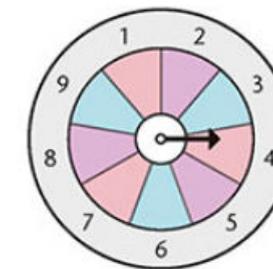
5. Ricardo se va a lanzar por una rampa, analiza la imagen y determina desde qué altura se va a lanzar.

- a) 3.5 m
- b) 2.8 m
- c) 2.6 m
- d) 2.1 m



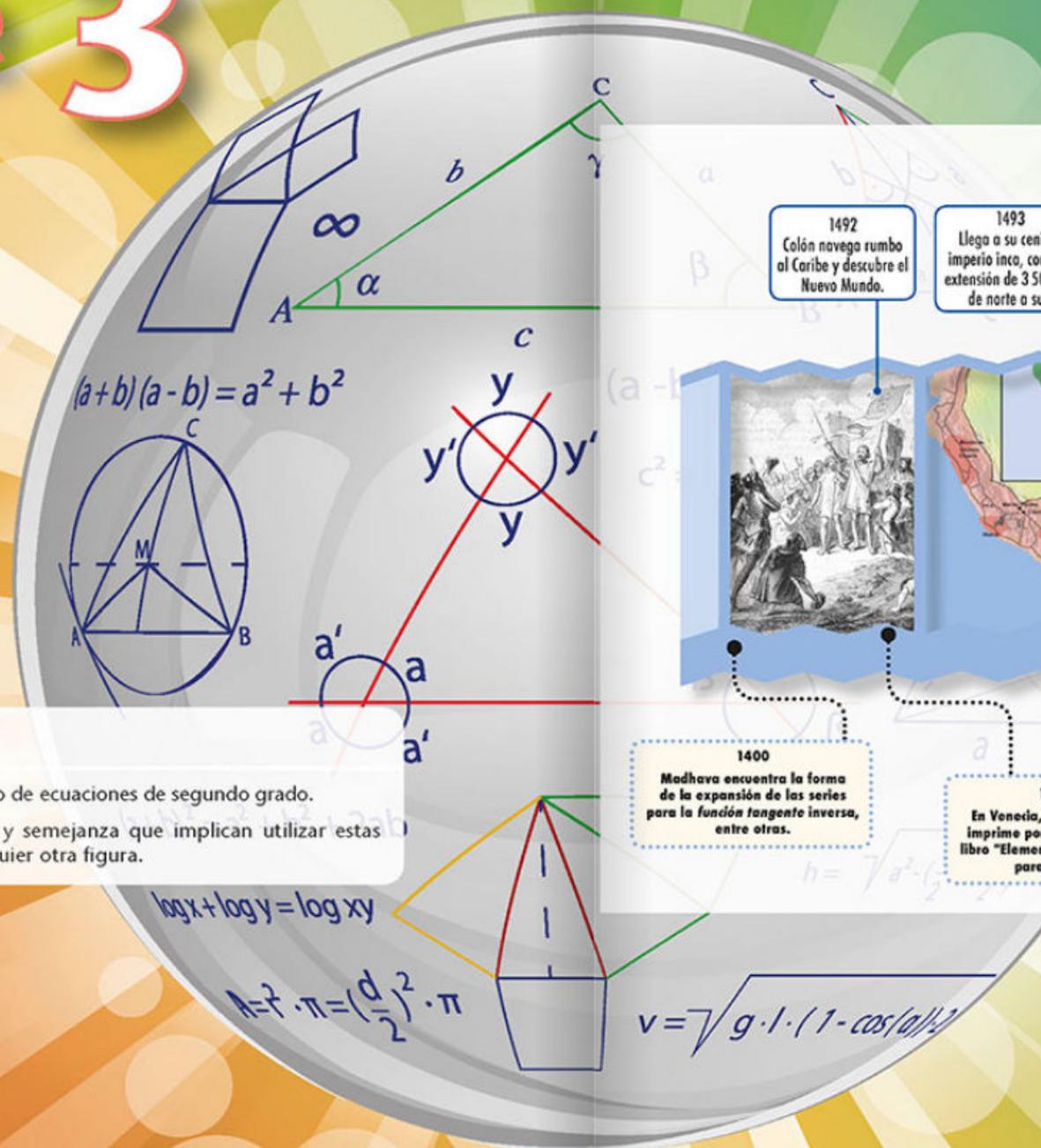
6. En la feria de su pueblo, Lucía quiere jugar en una ruleta, ¿de qué tipo de evento se trata si ella dice que caerá en un múltiplo de 2 o en un color azul?

- a) Independientes
- b) Excluyentes
- c) Complementarios
- d) Aleatorios



• ¿Cuál es la probabilidad que tiene de ganar? \_\_\_\_\_

# Bloque 3



- Aprendizajes esperados:**
- Resuelve problemas que implican el uso de ecuaciones de segundo grado.
  - Resuelve problemas de congruencia y semejanza que implican utilizar estas propiedades en triángulos o en cualquier otra figura.

Gracias a Tales de Mileto fue posible construir la teoría de la semejanza de triángulos, la cual se basa en teoremas.

## Contexto histórico

1492 Colón navega rumbo al Caribe y descubre el Nuevo Mundo.

1493 Llegó a su cenit el imperio inca, con una extensión de 3 500 km de norte a sur.

1516-17 Los otomanos logran conquistar Siria, Egipto y Arabia.

1519 Fernando de Magallanes cruza el Océano Pacífico.

## Hechos matemáticos

1400 Madhava encuentra la forma de la expansión de las series para la función tangente inversa, entre otras.

1482 En Venecia, Erhard Ratdolt imprime por primera vez el libro "Elementos de Euclides", para latinos.

1506 Escipión del Ferro descubre un método algebraico para resolver la ecuación reducida del tipo uno de tercer grado.

1530 Copérnico hace aportaciones a la astronomía y a la trigonometría.

Eje temático	Sentido numérico y pensamiento algebraico
Tema	Patrones y ecuaciones
Contenido 1	Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas. Aplicación de la fórmula general para resolver dichas ecuaciones.



**ACUÉRDATE DE...**

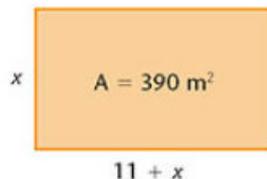


Recuerden las actividades realizadas en los bloques anteriores referentes a ecuaciones cuadráticas, donde utilizaron sus propios procedimientos y la factorización.

1. Analicen la siguiente situación y respondan lo que se les pide.

a) Un terreno rectangular tiene las siguientes medidas, observen la imagen.

- ¿Cuál es la ecuación que modela la situación? \_\_\_\_\_
- ¿Qué forma tiene la ecuación? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es el término de segundo grado o cuadrático? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es el término de primer grado o término lineal? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es el término independiente? \_\_\_\_\_
- ¿Cómo resolvieron la ecuación? \_\_\_\_\_
- ¿Por qué decidieron utilizar ese método? \_\_\_\_\_
- ¿De qué manera hicieron la justificación de sus resultados? \_\_\_\_\_
- ¿Qué tipo de ecuaciones cuadráticas conocen? Describanlas. \_\_\_\_\_



2. Comparen sus resultados con los que obtuvieron otros compañeros y establezcan, ¿cómo es posible determinar la necesidad de utilizar una ecuación cuadrática para resolver alguna situación?



**PRACTÍCALO**

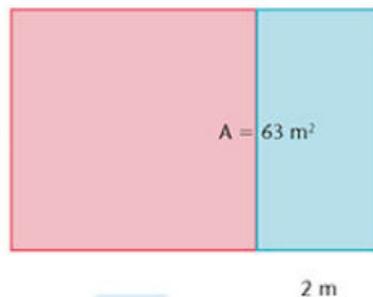


**Actividad 1.1**

1. Analicen la siguiente situación y respondan lo que se les indica.

a) La superficie que ocupaba la cooperativa escolar el año pasado era cuadrada, para este año se le agregó una sección, con lo que quedó convertida en un rectángulo de 63 m<sup>2</sup>. Si el largo del rectángulo es 2 m mayor que su ancho, ¿cuáles son sus dimensiones? Escribanlas en las líneas de la figura.

- ¿Cuál es la ecuación que modela esta situación? \_\_\_\_\_
- ¿Cómo obtuvieron sus resultados? \_\_\_\_\_
- ¿Qué forma tiene la ecuación? \_\_\_\_\_



- ¿Cuál es el término de segundo grado o cuadrático? \_\_\_\_\_  
¿Y su coeficiente? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es el término de primer grado o lineal? \_\_\_\_\_  
¿Y su coeficiente? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es el término independiente? \_\_\_\_\_

2. Comparen sus respuestas con las de otros compañeros y comenten acerca de la finalidad de igualar a cero una ecuación cuadrática.

**Para tener en cuenta**

Una ecuación de segundo grado de la forma  $ax^2 + bx + c$ , se puede resolver empleando la **fórmula** general.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Donde,  $a$  es el coeficiente del término de segundo grado o cuadrático;  $b$  es el coeficiente del término de primer grado o lineal;  $c$  es el término independiente.



**Glosario**

**Fórmula.** Es una ecuación o regla que relaciona objetos matemáticos o cantidades.



**PRACTÍCALO**



**Actividad 1.2**

1. Resuelvan la siguiente situación aplicando la fórmula general y contesten lo que se les indica.

a) Si al doble del cuadrado de la edad que tiene un niño, y al triple de esta edad, se añaden 48 años, suman 200 años, ¿qué edad tiene el niño?

- ¿Cuál es la ecuación cuadrática que modela esta situación? \_\_\_\_\_
- Expliquen cómo la obtuvieron. \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es el valor de  $a$ ? \_\_\_\_\_ ¿Cuál el de  $b$ ? \_\_\_\_\_ ¿Y el de  $c$ ? \_\_\_\_\_
- Sustituyan los valores en la fórmula general.

$$a = \quad b = \quad c =$$

$$x = \frac{-\quad \pm \sqrt{(\quad)^2 - 4(\quad)(\quad)}}{2(\quad)}$$

- Aplicando la jerarquía de operaciones, ¿cuál se debe realizar primero?
- Anoten los resultados en la fórmula.

$$x = \frac{-\quad \pm \sqrt{(\quad) - 4(\quad)}}{(\quad)}$$

- Continuando con las operaciones tenemos que:

$$x = \frac{-\quad \pm \sqrt{(\quad) + (\quad)}}{(\quad)}$$

- Por lo tanto:

$$x = \frac{-\quad \pm \sqrt{(\quad)}}{(\quad)}$$

- Utilicen su calculadora para obtener la raíz cuadrada.

$$x = \frac{-(\quad) + (\quad)}{(\quad)}$$

- ¿Qué consideras que indica el signo  $\pm$ , al momento de resolver una ecuación cuadrática?

$$x_1 = \frac{-(\quad) + (\quad)}{(\quad)}$$

$$x_2 = \frac{-(\quad) - (\quad)}{(\quad)}$$

- ¿Cuál de las dos raíces es viable para resolver el problema? \_\_\_\_\_

¿Por qué? \_\_\_\_\_

- En su cuaderno, comprueben que las raíces obtenidas sean correctas.
- Entonces, ¿se podría tomar cualquiera de los valores de  $x$  como válida para la solución de la situación?

¿Por qué? \_\_\_\_\_

2. Comparen su secuencia y sus respuestas con las de otros compañeros, comenten si el valor que toman de  $x$  dependerá de la situación a resolver.

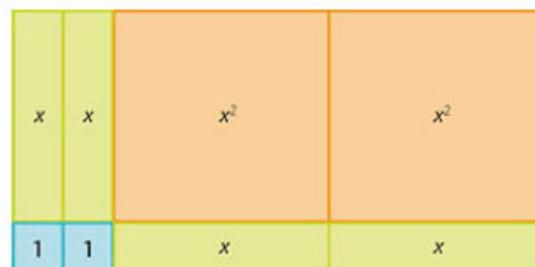


**PRACTICALO**



**Actividad 1.3**

1. Alberto trazó un plano de una bodega de  $72 \text{ m}^2$  y la dividió en secciones, cada una tiene una marca: las  $x^2$  son para almacenar maquinaria, las  $x$  para papelería y las marcadas con el número 1 para artículos de limpieza.



- ¿Cómo se expresa la medida del largo? \_\_\_\_\_
- ¿Cómo se expresa la medida del ancho? \_\_\_\_\_
- Según el plano, ¿cuál es la expresión algebraica que permite encontrar las dimensiones de la bodega? \_\_\_\_\_
- Elabora en tu cuaderno las operaciones necesarias para conocer las dimensiones de la bodega.
- ¿Cuánto mide de largo? \_\_\_\_\_ ¿Cuánto mide de ancho? \_\_\_\_\_
- ¿De qué manera es posible demostrar que estos resultados son correctos? \_\_\_\_\_

2. Resuelve y comprueba en tu cuaderno las siguientes ecuaciones.
  - a)  $x^2 - 4x - 12 = 0$
  - b)  $x^2 - 8x + 12 = 0$
  - c)  $x^2 - 3x + 2 = 0$
3. Compara tus resultados con los de algunos de tus compañeros y con la asesoría del profesor determina qué aspectos debes vigilar para poder resolver adecuadamente una ecuación de segundo grado por medio de la fórmula general.

**Para leer más**

**Discriminante**

En la fórmula general, la expresión  $b^2 - 4ac$ , recibe el nombre de *discriminante de la ecuación*, permite conocer el tipo de raíces que se puede presentar; de esta manera, tenemos:

Si  $b^2 - 4ac > 0$ , (positivo) la ecuación tiene dos raíces diferentes reales y desiguales.

Si  $b^2 - 4ac = 0$ , (cero) la ecuación tiene dos raíces reales e iguales.

Si  $b^2 - 4ac < 0$ , (negativo) la ecuación no tiene raíces, por tanto, no tiene solución.



**PRACTICALO**



**Actividad 1.4**

1. Continuando con la aplicación de la fórmula general, lean y analicen la siguiente situación, después respondan lo que se les indica.

- a) Sofía es 3 años mayor que su hermano Miguel y el producto de sus edades es 130; determinen qué edad tiene cada uno.

- Elaboren en su cuaderno un esquema de esta situación.

- ¿Cuál es la ecuación cuadrática que modela esta situación? \_\_\_\_\_

- Cómo se determinan los valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$ ? \_\_\_\_\_

¿Por qué? \_\_\_\_\_

- ¿Cómo es el discriminante? \_\_\_\_\_

- ¿Cuántas soluciones tiene esta situación? \_\_\_\_\_

¿Por qué? \_\_\_\_\_

- En su cuaderno, determinen las raíces de esta ecuación empleando la fórmula general.

- Expliquen de qué manera comprobarían su resultado. \_\_\_\_\_

• Por lo tanto, la edad de Sofía es: \_\_\_\_\_ y la edad de Miguel es: \_\_\_\_\_

2. Comparen sus respuestas con las de otros equipos, propongan un ejercicio donde el discriminante sea cero y otro donde el discriminante sea negativo y expóngalos ante el grupo.



**PRACTICALO**



**Actividad 1.5**

1. Lean, analicen y contesten lo que se les pide en la siguiente situación.

- a) La suma de las edades de dos hermanas es de 27 años y el producto de sus edades es 180 años, ¿qué edad tiene cada una?

- Realicen en su cuaderno un esquema que determine esta situación.

- ¿Cuál es la ecuación que modela esta situación y la resuelve? \_\_\_\_\_

- ¿Cuántas soluciones tiene? \_\_\_\_\_

- Expliquen de manera breve, ¿cómo encontraron los valores de la edad de cada hermana? \_\_\_\_\_
- Si tuviera dos raíces, ¿cuál tomarían en cuenta? \_\_\_\_\_  
¿Por qué? \_\_\_\_\_
- Expliquen cómo comprobarían que su respuesta es verdadera. \_\_\_\_\_

2. Comparen sus resultados con los de otros compañeros y con la supervisión de su profesor expliquen al grupo cuál es la estrategia que emplearon para plantear adecuadamente esta situación.



**PRACTICALO**



**Actividad 1.6**

1. Encuentra los valores de  $x$  para las siguientes ecuaciones cuadráticas. Realiza el desarrollo en tu cuaderno.

Ecuación cuadrática	Discriminante	Tipo de las raíces	Valores de las raíces
a) $x^2 + 12x - 32 = 0$			$x_1 = \dots$ $x_2 = \dots$
b) $3w^2 + 17w + 10 = 0$			$w_1 = \dots$ $w_2 = \dots$
c) $3x^2 - 5x - 2 = 0$			$x_1 = \dots$ $x_2 = \dots$
d) $x^2 + 14x + 49 = 0$			$x_1 = \dots$ $x_2 = \dots$
e) $6t^2 - 4t + 32 = 0$			$t_1 = \dots$ $t_2 = \dots$
f) $z(z - 9) + 9(z - 9) = 0$			$z_1 = \dots$ $z_2 = \dots$
g) $y^2 + 4y - 45 = 0$			$y_1 = \dots$ $y_2 = \dots$
h) $x^2 + 22x + 121 = 0$			$x_1 = \dots$ $x_2 = \dots$
i) $2k^2 + 6k - 2 = 0$			$k_1 = \dots$ $k_2 = \dots$
j) $v(v - 10) - 11(v - 10) = 0$			$v_1 = \dots$ $v_2 = \dots$

- ¿Cuántas ecuaciones tuvieron dos soluciones? \_\_\_\_\_
- ¿Cuántas presentaron una sola solución? \_\_\_\_\_
- ¿Cuántas no tuvieron solución? \_\_\_\_\_
- ¿Resolviste todas las ecuaciones para encontrar las que no tuvieron solución? \_\_\_\_\_  
¿Por qué? \_\_\_\_\_

- ¿Consideras que todas estas ecuaciones permiten modelar alguna situación? \_\_\_\_\_  
Justifica tu respuesta. \_\_\_\_\_
- Selecciona una de ellas y diseña una situación que la modele. \_\_\_\_\_

2. Compara tus respuestas y resultados con los de otros compañeros y verifica que tus demostraciones son correctas.



**LO QUE APRENDÍ**



1. Pablo tenía la idea de construir una alberca cuadrada, pero al final decidió agregar 4 m en la base y en el lado opuesto, y a los otros dos lados 1.5 m a cada uno, el área del rectángulo excede a la del cuadrado en 222 cm<sup>2</sup>. Calculen la longitud de los lados de la alberca resultante.

- Elaboren en su cuaderno un esquema que represente la situación.
- ¿Cuál es la expresión matemática que modela esta situación? \_\_\_\_\_
- Expliquen cómo la obtuvieron. \_\_\_\_\_
- ¿Cómo es el discriminante? \_\_\_\_\_
- De las dos soluciones, ¿cuál eligieron? \_\_\_\_\_  
¿Por qué? \_\_\_\_\_

2. Comparen sus respuestas y su solución con otros compañeros, comenten si existe otra forma para comprobar que son correctas.

**Desarrolla tus habilidades**

1. Reúnanse en equipos y resuelvan el siguiente problema.
- a) Para el desfile del 20 de noviembre participaron 180 estudiantes de una escuela, si el número de estudiantes de cada fila es de 8 más que el número de filas que hay:
- ¿Cuántas filas y cuántos estudiantes hay en cada fila? \_\_\_\_\_
  - ¿Cómo es el discriminante? \_\_\_\_\_
  - Por tanto, el valor del largo es: \_\_\_\_\_  
Y el valor del ancho: \_\_\_\_\_
  - ¿El área resultó ser el doble? \_\_\_\_\_  
¿Por qué? \_\_\_\_\_
2. Comparen sus respuestas con las del grupo y comenten cómo expresarían una ecuación en donde en lugar de aumentar las dimensiones de una figura rectangular éstas tuvieran una disminución.

**USA LAS TIC**



En la siguiente página web <http://es.onlinemath.com/math/assistance/equation/quadratic/> (Consultada el día 5 de diciembre de 2016, a las 15:48 horas), encontrarás una calculadora que resuelve ecuaciones cuadráticas de todo tipo, puedes utilizarla para comprobar tus resultados, después de tu visita es conveniente que comentes con tu profesor tu experiencia y que determines, ¿cuál es la ventaja de contar con este recurso tecnológico?

Eje temático	Forma, espacio y medida
Tema	Figuras y cuerpos
Contenido 2	Aplicación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas.



ACUÉRDATE DE...



En el bloque 1, contenido 2, revisaron los criterios de congruencia y semejanza de triángulos, así como sus propiedades.

1. Analicen la siguiente situación y respondan lo que se les indica.

a) Tracen en su cuaderno dos triángulos, uno cuyos lados midan 3 cm, 5 cm y 6 cm, y el otro cuyos lados midan 6 cm, 10 cm y 12 cm.

- Denoten los vértices del primer triángulo como  $ABC$  y al segundo triángulo como  $A'B'C'$ .

- ¿Cómo son entre sí los lados de ambos triángulos?

- ¿Cómo son sus ángulos internos?

- ¿Qué criterio para la semejanza de triángulos emplearon?

¿Por qué?

b) Construyan en su cuaderno un triángulo del cual uno de sus lados mida 8 cm y su ángulo  $60^\circ$ ; en el otro triángulo el lado mide 4 cm y el ángulo  $60^\circ$ .

- Denoten cada uno de los vértices de ambos triángulos.

- ¿Pudieron construirlo? ¿Por qué?

2. Comparen sus respuestas con las de otros compañeros y repasen nuevamente los criterios para la congruencia de triángulos.



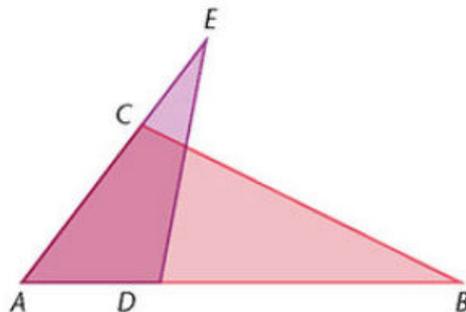
PRACTICALO



Actividad 2.1

1. Observen la siguiente figura, analíenla y contesten lo que se les indica.

a) El  $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ . Calculen los valores de  $AC$  y  $BC$ , sabiendo que  $AE = 7$  cm;  $AB = 9.4$  cm;  $AD = 3.8$  cm y  $DE = 4.8$  cm.



- Expliquen cómo encontraron el valor de  $AC$ .
- Expliquen cómo encontraron el valor de  $BC$ .
- ¿Cómo quedaría la expresión para este cálculo?

2. Comparen sus respuestas con otros compañeros y comenten en qué cuestiones de la vida cotidiana se pueden aplicar estos criterios.



PRACTICALO



Actividad 2.2

Las aplicaciones de la semejanza de triángulos tienen muchos usos. En pareja resuelvan las siguientes situaciones y respondan lo que se les pide.

1. Se pretende medir la profundidad de un pozo con un instrumento como el de la figura: su base mide 27 cm y su altura 36 cm. Si el diámetro del pozo es de 1.35 m, ¿qué profundidad tiene?

- ¿Cuál es la expresión matemática que les permite encontrar el resultado?

- ¿Los triángulos que se forman, son congruentes o semejantes?

¿Por qué?

- En qué unidades de longitud expresaron su resultado, si tenemos que el instrumento tiene las unidades en centímetros y el diámetro del pozo en metros.

¿Por qué?

- ¿Cuál es la profundidad del pozo?

2. En la torre de Pisa se colocaron dos plomadas, como las mostradas en la imagen. Tomando dichos datos como base, respondan, ¿qué altura tiene la torre?

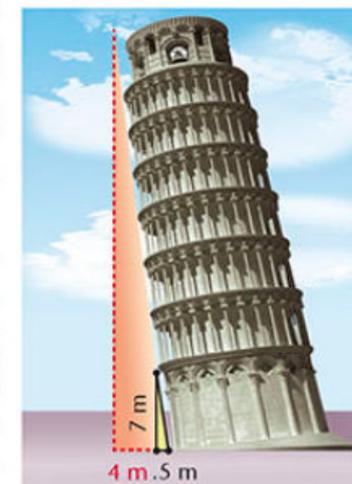
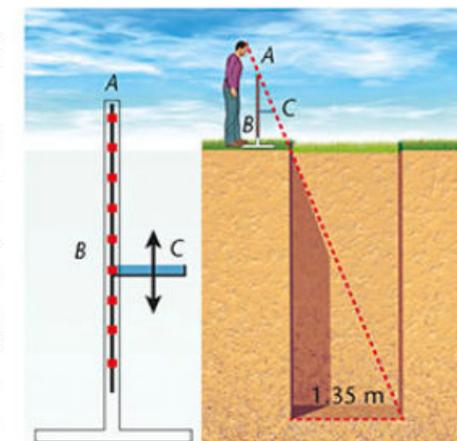
- ¿Cuál es la expresión matemática que les permite encontrar el resultado?

- ¿Los triángulos que se forman, son congruentes o semejantes?

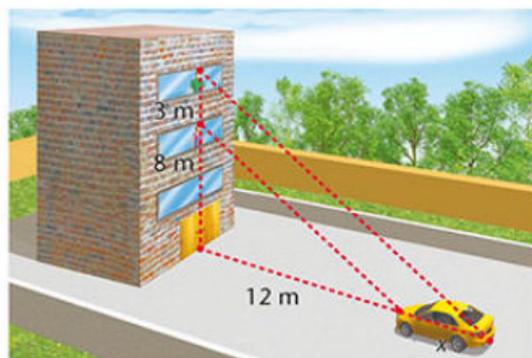
¿Por qué?

- Con la misma proyección de sombra de la torre, si desde una altura de 28 m se lanzara una nueva plomada y ésta quedara a 2 m de la base, ¿obtendríamos la misma altura para la torre?

¿Por qué?



3. Dos personas ven un auto deportivo desde su ventana. La primera, a una altura de 8 m, ve la parte delantera; la segunda, 3 m más arriba, observa la parte trasera del auto. La línea visual de ambos tiene la misma pendiente. Si el frente del auto está a 12 m de la pared, ¿cuál es el largo del auto?



- ¿Cuál es la expresión matemática que representa esta situación?
- ¿Los triángulos formados son semejantes o congruentes? ¿Por qué?
- ¿Cuál es la longitud del auto?
- Si ahora otra persona está a 4 m de altura y ve la parte de enfrente, mientras una segunda persona está 2 m más arriba y ve la parte trasera, cuando el auto está a 9 m de distancia del edificio, ¿cuál es la longitud del auto? ¿Por qué?

4. Comparen sus respuestas y procedimientos y, a manera de repaso, mencionen las diferencias entre semejanza y congruencia.

**PRACTICALO**

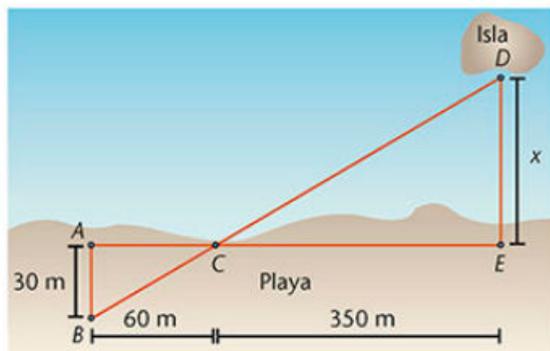
**Actividad 2.3**

1. Observa detenidamente la siguiente imagen y considerando lo que se indica, responde.

a) Si  $\overline{AB} \perp \overline{AE}$  y  $\overline{DE} \perp \overline{AE}$ . ¿A qué distancia se encuentra la isla de la orilla de la playa?

• ¿Cuál es la expresión matemática que permite calcular la distancia?

• ¿Qué relación guardan los triángulos entre sí? ¿Por qué?



• ¿A qué distancia de la playa está la isla?

• Si  $\overline{BC} = 67.08$  m, ¿a qué distancia se encuentra la isla desde el punto C?

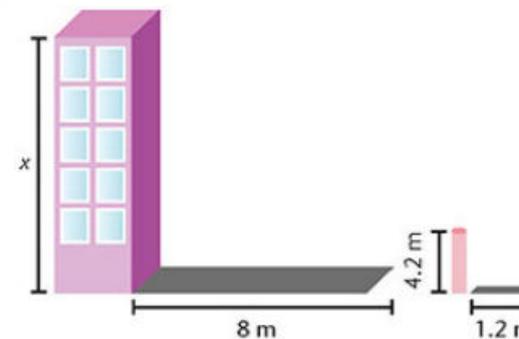
• Explica brevemente cómo encontraste el resultado.

• ¿Cuál es la expresión para esta nueva situación?

2. Compara tus respuestas y resultados con los de otros compañeros, y con la asesoría de tu profesor explica cuál es la importancia de conocer este procedimiento al aplicarlo en la vida real para el cálculo de distancias inaccesibles.

**LO QUE APRENDÍ**

1. Un edificio proyecta una sombra de 8 m a la misma hora que un poste de luz de 4.2 m de altura proyecta una sombra de 1.2 m, ¿cuál es la altura del edificio?



• Explica cómo plantearías la solución.

• ¿Cómo son entre sí los triángulos que se forman, semejantes o congruentes?

Justifica tu respuesta.

• ¿Cuál es la expresión algebraica que modela esta situación?

• Por tanto, ¿cuál es la altura del edificio?

2. Compara tus respuestas con las de otros compañeros y comenten de qué manera se puede realizar la demostración para saber que su resultado es el correcto.

**Desarrolla tus habilidades**

1. Bajo la supervisión de su profesor, reúnanse en equipos y lleven a cabo la siguiente actividad en el patio de la escuela.

a) Dividan el equipo en dos.

• Consigan una vara o un palo y midan su longitud.

• Encuentren el momento ideal para que exista una proyección de sombra, intenten que sea antes del mediodía.

• La primera parte del equipo deberá poner el objeto que eligieron en forma perpendicular al piso y medir la sombra que proyecta.

b) La segunda mitad del equipo seleccionará una de las siguientes opciones: el asta bandera, un árbol, el edificio de los salones.

• Medirán la sombra que proyecta.

c) Con los datos obtenidos reproduzcan en su cuaderno un esquema de cómo quedó planteada la situación.

d) ¿Cuál es la expresión matemática que permite calcular la altura de los objetos que eligieron?

Por lo tanto, la altura del objeto es de:

2. Comenten sus respuestas con otros equipos que eligieron objetos diferentes para realizar la actividad.

**USAS LAS TIC**

En la siguiente página <http://www.thatquiz.org/tq/previewtest?C/K/1/P/38351332292361> (Consultada el día 5 de diciembre de 2016 a las 9:48 horas), encontrarás un interactivo con preguntas en línea, es conveniente que las resuelvas para valorar tus conocimientos adquiridos; después de tu visita comenta tus resultados con tu profesor, él te podrá dar alguna sugerencia o consejo para mejorar tus habilidades.

Eje temático	Forma, espacio y medida
Tema	Figuras y cuerpos
Contenido 3	Resolución de problemas geométricos mediante el teorema de Tales.

**ACUÉRDATE DE...**

En el contenido anterior estudiaste los criterios de congruencia y semejanza, ahora conocerás una variante de ellos.

1. Lee con atención la siguiente situación y responde.

a) De acuerdo con los datos de la siguiente figura y sabiendo que  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ , ¿cuál es la medida de  $x$  y  $z$ ?

• ¿Cuál es la proporción que empleaste para encontrar el valor de  $x$ ? ¿Por qué?

• ¿Cuál es el valor de  $x$ ?

• ¿Cuál es la proporción que empleaste para encontrar el valor de  $z$ ? ¿Por qué?

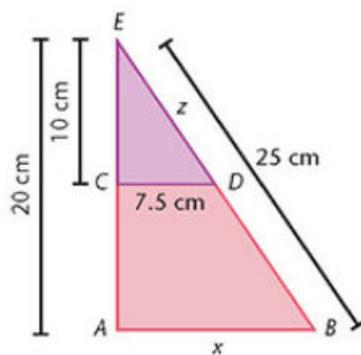
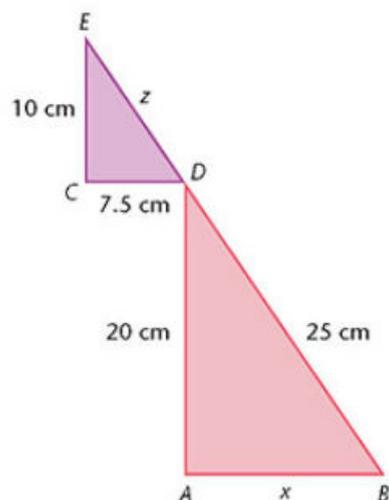
• ¿Cuál es el valor de  $z$ ?

b) Si desplazaras el  $\triangle CDE$  sobre el segmento  $BD$ , quedaría de la siguiente manera.

Con esta misma figura, ¿se pueden calcular los valores de  $x$  y de  $z$ ? ¿Por qué?

• ¿La razón empleada para los cálculos será la misma? ¿Por qué?

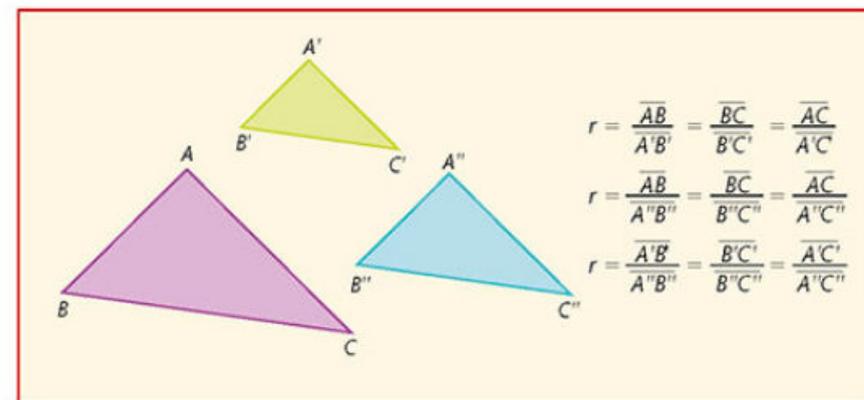
• ¿Qué diferencias hay entre la figura anterior y ésta?



2. Compara tus respuestas con las de otros compañeros y comenten acerca de la semejanza de los triángulos que se presentan.

**Para leer más**

En un grupo de triángulos semejantes, la razón entre las medidas de lados de un triángulo es igual a la razón entre las medidas de los dos lados correspondientes de cada uno de los otros triángulos.



**PRACTÍCALO**

**Actividad 3.1**

1. Observen que en la siguiente figura las rectas  $a, b, c, y d$  son paralelas y las rectas  $m$  y  $n$  son transversales que cortan el haz de paralelas.

a) Tomando como referencia dichas rectas y las medidas que se muestran, respondan las siguientes preguntas.

• ¿Cuál es la razón de  $\overline{TU}$  en relación con  $\overline{UV}$ ?

• ¿Cuál es la razón de  $\overline{PQ}$  en relación con  $\overline{QR}$ ? ¿Por qué?

• ¿Cuál es la razón de  $\overline{PQ}$  en relación con  $\overline{RS}$ ?

• ¿Por qué?

• ¿Cuál es la razón de  $\overline{TU}$  en relación con  $\overline{VW}$ ?

• ¿Por qué?

b) Son proporcionales los segmentos que se forman en cada una de las rectas  $m$  y  $n$ ?

Justifiquen su respuesta.

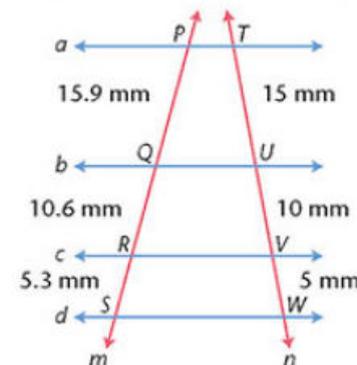
• Tracen un segmento de recta, desde  $a$  hasta  $d$ , que mida 6 cm. Midan cada uno de los segmentos que se forman entre las paralelas y respondan.

• ¿Mantienen estos segmentos la misma proporcionalidad que los segmentos de las rectas  $m$  y  $n$ ? Justifiquen su respuesta.

2. Comparen sus respuestas con las de sus demás compañeros y concluyan: cómo son entre sí los segmentos que forman las transversales al cortar dos o más rectas paralelas.

**Glosario**

**Razón.** Es una relación entre dos medidas.





**PRACTICALO**

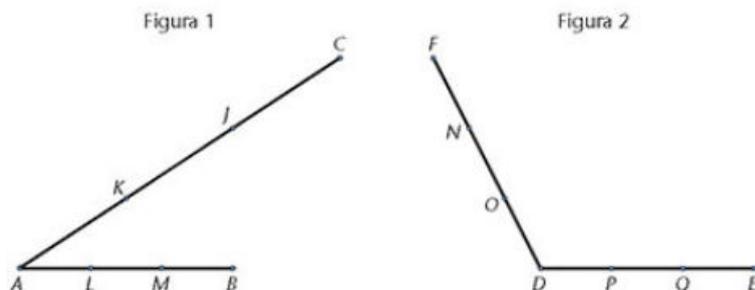


**Actividad 3.2**

El **teorema** de Tales también se puede aplicar a dos rectas que convergen en un vértice, observen las figuras.

1. Realicen los trazos indicados y respondan las preguntas.

**Glosario**  
**Teorema.** Es una proposición cuya verdad es demostrable.



- Tracen una recta que una los extremos de ambas figuras.
- Tracen líneas paralelas entre los segmentos indicados.
- Con una regla tomen las medidas de dos segmentos de cada figura, los que crean más convenientes y utilicen el teorema de Tales para encontrar los valores faltantes.
- Registren las medidas de los segmentos en la tabla.

$\overline{AK} =$	$\overline{KJ} =$	$\overline{JC} =$	$\overline{AL} =$	$\overline{LM} =$
$\overline{MB} =$	$\overline{DO} =$	$\overline{ON} =$	$\overline{NF} =$	$\overline{DP} =$
$\overline{PQ} =$	$\overline{QE} =$	$\overline{AJ} =$	$\overline{DN} =$	$\overline{FE} =$
$\overline{CB} =$	$\overline{NQ} =$	$\overline{KL} =$	$\overline{OP} =$	

- Expliquen la estrategia que utilizaron para resolver esta actividad.
- Expliquen de qué manera comprobaron que sus resultados son correctos.

2. Comparen sus respuestas con las de algún equipo cercano y con la ayuda del profesor expliquen, ¿cuál es la manera más sencilla de aplicar el teorema de Tales cuando se tienen que encontrar varias medidas en una sola figura?



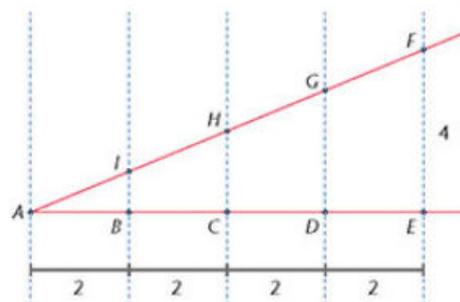
**PRACTICALO**



**Actividad 3.3**

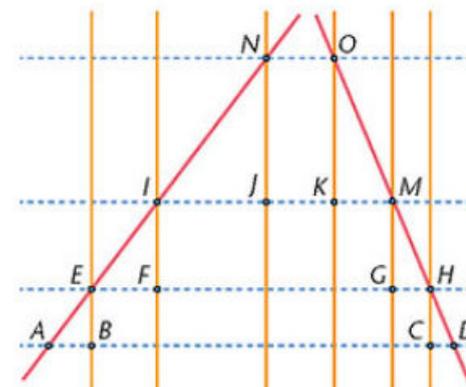
1. En la siguiente figura se muestran líneas paralelas que miden dos unidades de separación entre cada una de ellas. Analízala y encuentra la medida de los segmentos  $\overline{BI}$ ,  $\overline{CH}$  y  $\overline{DG}$ .

- Escribe y justifica tu planteamiento para encontrar el valor del  $\overline{BI}$ .
- Por tanto, ¿cuál es el valor del  $\overline{BI}$ ?



- Escribe y justifica tu planteamiento para encontrar el valor del  $\overline{CH}$ .
- ¿Será el mismo planteamiento para encontrar el valor del  $\overline{DG}$ ? ¿Por qué?
- Si se sabe que el  $\overline{AF}$  mide 9 cm, ¿cuánto mide  $\overline{HG}$ ?
- Explica cómo obtuviste el resultado.
- Por tanto, el  $\overline{AG}$  mide: \_\_\_\_\_ y el  $\overline{AH}$  mide: \_\_\_\_\_

2. Observa la siguiente figura y contesta lo que se te pide.



- Encuentra al menos un par de triángulos que sean semejantes.
- Explica por qué resultan semejantes esos dos triángulos.
- ¿Cuáles lados resultan proporcionales en el par de triángulos que encontraron?
- Si  $\overline{BE} = 3$  cm;  $\overline{FI} = 5$  cm;  $\overline{JN} = 8$  cm;  $\overline{AN} = 20$  cm y  $\overline{OD} = 18$  cm, encuentra la medida de los  $\overline{AE}$ ;  $\overline{EI}$  y  $\overline{OM}$ .
- Si  $\overline{IJ} = 6$  cm, ¿cuánto miden los lados del  $\triangle EFI$ ?

3. Compara tus respuestas y resultados con los de otros compañeros, y con la asesoría de tu profesor verifica que tus respuestas y procedimientos sean correctos.



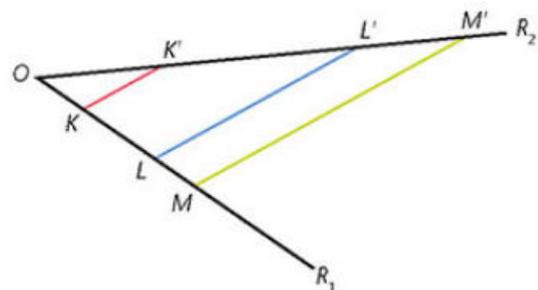
**PRACTICALO**



**Actividad 3.4**

1. La siguiente figura está formada por dos rectas,  $R_1$  y  $R_2$ , las cuales se interceptan en el punto  $O$ , a su vez, se trazaron las paralelas  $KK'$ ,  $LL'$ ,  $MM'$ , entre las rectas  $R_1$  y  $R_2$ , formando los segmentos correspondientes.

- ¿Cuáles son los segmentos que se forman en  $R_1$ ?
- ¿Cuáles son los segmentos que se forman en  $R_2$ ?
- ¿Cuál es el segmento correspondiente a  $\overline{OK}$ ?
- ¿Y el correspondiente a  $\overline{LM}$ ?



2. Consideren los valores que se dan para algunos segmentos y completen la siguiente tabla.

Recta $R_1$	Recta $R_2$	Razón entre las paralelas	
$\overline{OK} = 10$	$\overline{OK'} = 25$	$\frac{\overline{OK}}{\overline{OK'}} = \dots = \dots$	$\frac{\overline{KL}}{\overline{K'L'}} = \frac{\overline{OL} - \overline{OK}}{\overline{OL'} - \overline{OK'}} = \dots$
$\overline{OL} = \dots$	$\overline{OL'} = 65$	$\frac{\overline{OL}}{\overline{OL'}} = \dots = \dots$	$\frac{\overline{LM}}{\overline{L'M'}} = \frac{\overline{OM} - \overline{OL}}{\overline{O'M'} - \overline{O'L'}} = \dots$
$\overline{OM} = 40$	$\overline{OM'} = \dots$	$\frac{\overline{OM}}{\overline{OM'}} = \dots = \dots$	$\frac{\overline{KM}}{\overline{K'M'}} = \dots = \dots$

3. Comparen sus respuestas con las de algún equipo cercano y con la asesoría del profesor acuerden la forma correcta de determinar cuáles segmentos son correspondientes y cómo se debe expresar la razón de semejanza entre ellos.

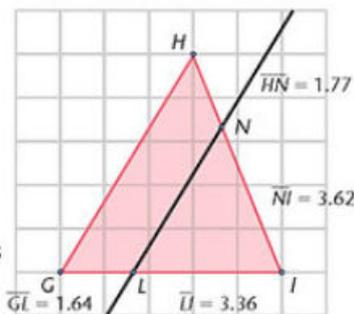
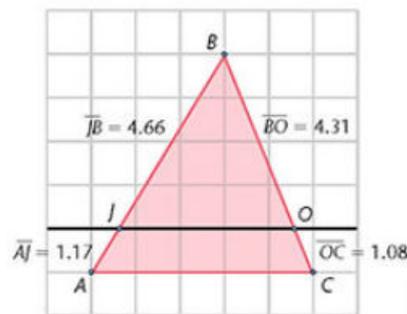
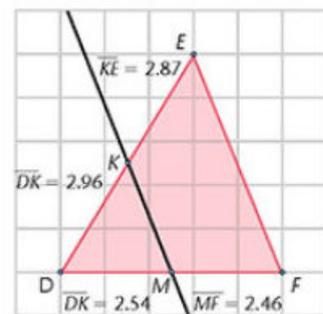


**PRACTICALO**



**Actividad 3.5**

1. Observen los tres triángulos dados y respondan las preguntas.



• ¿Los triángulos son congruentes o semejantes?

Justifiquen su respuesta.

• ¿Qué relación tienen los tres triángulos con respecto a su perímetro y las medidas de sus lados?

2. Tomando como base el teorema de Tales, completen la siguiente tabla. La primera columna corresponde a la proporción y la sustitución, con base en su segmento; la segunda a la operación aritmética que da la longitud del segmento solicitado.

Segmento	Proporción y sustitución	Operación
$\overline{DK}$	$\frac{\overline{DM}}{\overline{MF}} = \frac{\overline{DK}}{\overline{KE}} = \frac{2.54}{2.46} = \frac{X}{2.87}$	$X = \frac{(2.54)(2.87)}{2.46}$
$\overline{JB}$		
$\overline{LI}$		
$\overline{MF}$		
$\overline{JB}$		
$\overline{HN}$		

3. Comparen su tabla con la de algunos equipos cercanos, y con la ayuda del profesor establezcan, ¿cuál es el proceso para poder plantear y sustituir los datos necesarios al establecer una proporción basada en el teorema de Tales?

**Para leer más**

Tales de Mileto es considerado uno de los siete sabios griegos, gracias a él fue posible construir la teoría de la semejanza de triángulos, que está basada en su famoso teorema.

**Para tener en cuenta**

El teorema de Tales textualmente dice: Si varias paralelas cortan a dos transversales, determinan en ellas segmentos correspondientes proporcionales.



**LO QUE APRENDÍ**



1. Resuelve los siguientes triángulos utilizando el teorema de Tales.

Figura 1

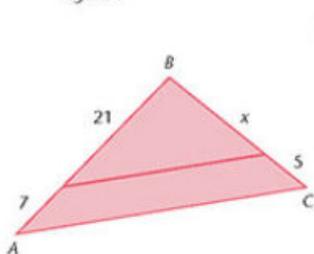


Figura 2

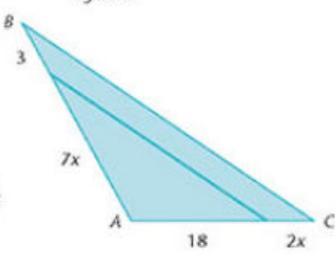
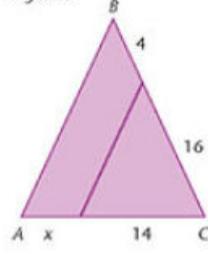


Figura 3



• Explica la forma en que elaboraste el planteamiento de cada operación.

• ¿De qué manera puedes demostrar que tus resultados son correctos?

2. Toma como base alguna de las figuras y plantea una situación que pueda modelarse con ella, escríbela.

3. Compara tus resultados con los de algunos de tus compañeros cercanos y con la ayuda del profesor llega a una conclusión que explique de manera breve, ¿cuál es el concepto del teorema de Tales y cuál es la manera correcta de utilizarlo?

**USAS LAS TIC**



Visita la página <https://www.geogebra.org/m/JmqDyGap> (Consultada el día 6 de diciembre de 2016, a las 11:52 horas), compara los conocimientos que ahora tienes por medio de este material interactivo y lleva a cabo una práctica con él; con la ayuda del profesor analicen el concepto del teorema de Tales y respondan: ¿de qué manera pueden demostrar la aplicación de dicho teorema para una figura en movimiento?

**Desarrolla tus habilidades**

1. Reúnanse en parejas. Consigan una hoja de acetato y, con ayuda de una hoja de rayas de un cuaderno y de un marcador permanente, tracen el rayado sobre el acetato. Ahora tomen una hoja blanca y tracen 4 segmentos de manera aleatoria y de la longitud que mejor les guste.

a) ¿De qué manera utilizarían el acetato para dividir el primer segmento que trazaron en 3 partes iguales?

b) Dividan las otras 3 rectas, una en 4, otra en 5 y la última en 6 partes iguales utilizando el acetato, ¿la estrategia que utilizaron fue la misma?

c) ¿Cuál es la relación que tiene esta actividad con el teorema de Tales?

d) ¿Cuáles son las características que permiten que con una hoja rayada se puedan dividir segmentos distintos en partes iguales?

2. Comparen sus resultados con los de algunos de sus compañeros y con la ayuda del profesor elaboren una justificación que explique cuál es la razón por la que esta actividad está relacionada directamente con el Teorema de Tales.

Eje temático Forma, espacio y medida

Tema Figuras y cuerpos

Contenido 4 Aplicación de la semejanza en la construcción de figuras homotéticas.



**ACUÉRDATE DE...**



1. Reflexionen acerca de las preguntas que se plantean y, en parejas, elaboren una respuesta para cada una.

a) Geométricamente, ¿qué es la semejanza?

b) Si se tienen dos figuras, ¿cuáles son las características principales que nos permiten conocer si son semejantes o no?

c) ¿En una poligonal abierta o cerrada se pueden obtener figuras que sean semejantes?

2. Comparen sus resultados con los de algunas parejas cercanas y con la ayuda del profesor redacten una conclusión propia basada en sus conocimientos y experiencia de lo que es la semejanza entre dos figuras y cuáles son las características que presentan.



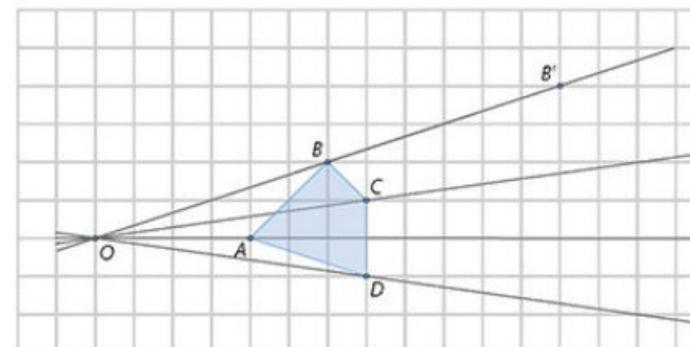
**PRACTÍCALO**



**Actividad 4.1**

1. Con ayuda de un compás, tomen la medida de cada uno de los vértices del polígono mostrado en la figura y midan la distancia que hay al centro O, luego, sobre cada recta encuentren los puntos que corresponden a la imagen de cada uno.

a) Respondan las preguntas.



• ¿La figura que obtuvieron es congruente con la figura original?

• ¿Consideran que ambas figuras pueden ser congruentes y semejantes al mismo tiempo?

• ¿Consideran que los lados de la imagen obtenida son paralelos a los lados de la figura original? Justifiquen su respuesta.

- Al seguir este procedimiento, ¿qué relación tienen entre sí ambas figuras en cuanto a tamaño? Expliquen su respuesta.

2. Comparen sus resultados con los de algún equipo cercano y con la ayuda de su profesor concluyan qué características encuentran cuando una figura y su imagen quedan del mismo lado del punto que se utilizó como vértice de las rectas auxiliares con las que se trazaron.



**PRACTICALO**

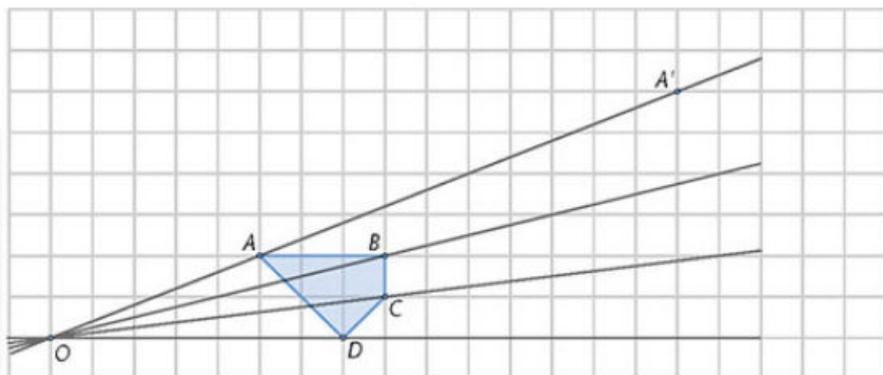


**Actividad 4.2**

1. Tracen la imagen correspondiente a la figura original, con base en el punto dado, y respondan las preguntas.

**Glosario**

**Homotecia.** Es la transformación de una figura en el plano, a partir de un punto (centro) y una constante (razón de homotecia). La homotecia es una manera más de obtener figuras a escala.



- ¿Qué estrategia utilizaron para encontrar los puntos faltantes?
- ¿Los lados que forman la imagen siguen siendo paralelos a los lados de la figura original? ¿Por qué ocurre esto?
- ¿Qué relación guarda la imagen obtenida con la figura original en cuanto a su tamaño? ¿Cómo determinaron esta medida?
- ¿Qué relación hay entre el perímetro de la figura original y su homotecia?
- ¿Qué relación hay entre el área de ambas figuras?
- ¿Qué diferencia hay entre la relación de los perímetros y las áreas de ambas figuras?
- ¿Cómo expresarían en una escala la relación entre ambas figuras? Justifiquen su respuesta.

2. Comparen sus respuestas con las de algunas parejas cercanas y con ayuda del profesor determinen cuándo dos figuras coinciden con rectas que convergen en un mismo punto, ¿cómo es posible obtener su relación en cuanto a su tamaño y escala?



**PRACTICALO**



**Actividad 4.3**

1. Realicen lo que se pide y al finalizar, respondan las preguntas.

- En el siguiente recuadro, dentro de la columna que dice figura original, tracen un cuadrilátero.
- En la columna con título Vértice ubiquen un punto y a partir de él tracen líneas hacia cada vértice del cuadrilátero, las cuales crucen la columna "Imagen obtenida".

Vértice	Figura original	Imagen obtenida

- ¿Cuál fue la estrategia que utilizaron para ubicar el cuadrilátero y el vértice para que su imagen estuviera dentro de la tercera columna?
- ¿Fue posible determinar una relación exacta entre el tamaño de ambas figuras? ¿Por qué ocurrió esto?
- ¿Las figuras mantienen condiciones de paralelismo entre sus lados?
- ¿Los ángulos entre ambas figuras son correspondientes? ¿Cómo pueden justificar su respuesta?

2. Comparen sus respuestas con algunas parejas cercanas y con la ayuda del profesor determinen qué condiciones es necesario observar para poder construir figuras semejantes en una superficie dada.



PRACTICALO



Actividad 4.4

1. Comparen los triángulos mostrados, observen las medidas de los segmentos dados y respondan las preguntas.

- Los triángulos, ¿son proporcionales en la longitud de sus lados?

¿Cómo pueden demostrar que su afirmación es correcta?

- ¿Cuál es la razón entre los segmentos dados?

Justifiquen su respuesta.

- ¿Cómo es posible demostrar las condiciones de paralelismo entre los segmentos de ambas figuras, así como la igualdad en la medida de sus lados?

- ¿Cuál es la relación entre la superficie de ambas figuras? Expliquen su respuesta.

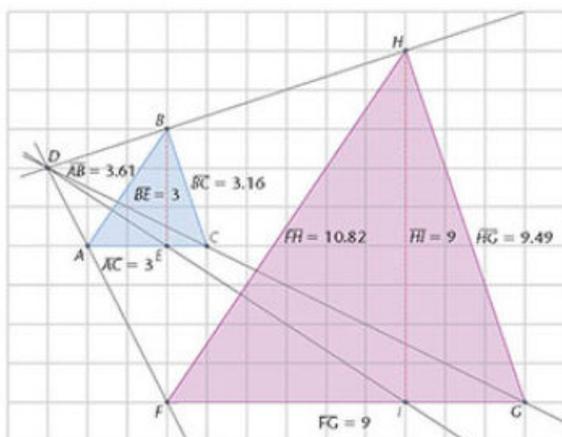
- ¿Es la misma relación la que se presenta entre el área y el perímetro de ambas figuras?

Expliquen su respuesta.

- Si decimos que  $k$  representa la razón entre ambas figuras, ¿qué número le corresponde?

Entonces, ¿cuántas veces es mayor el triángulo  $FGH$  en comparación con  $ABC$ ?

2. Comparen sus resultados con los de otro equipo y con la ayuda del profesor establezcan cuál es la relación que existe entre la distancia del centro de homotecia a cada uno de los vértices del primer triángulo en relación al perímetro y área de la segunda figura.



Para tener en cuenta

La homotecia es la transformación de una figura que se realiza con base en un punto específico, las figuras que se obtienen son semejantes, ya que tienen la misma forma, sus lados son paralelos, sus ángulos iguales y son proporcionales las medidas de sus lados.

Para que dos figuras sean homotéticas se deben cumplir dos condiciones:

1. Que los lados entre las figuras sean paralelos entre sí.
2. Que las rectas auxiliares que unen sus vértices converjan en un solo punto llamado centro de homotecia.



LO QUE APRENDÍ



1. Analiza, plantea, resuelve y comprueba tus resultados para los siguientes problemas.

- a) Si a un cubo que tiene  $64 \text{ cm}^3$  de volumen se le aplica una homotecia tal que  $k = 2$ .

- ¿Cuánto mide su volumen?
- ¿Cuánto mide la superficie del área de la base?
- ¿Cuánto mide cada uno de sus lados?

- b) Si se tiene un triángulo equilátero donde sus lados miden  $3 \text{ cm}$  y se le aplica una homotecia de manera que  $k = 4$ , ¿cuál es el perímetro resultante?

- c) El área de un cuadrado, luego de aplicar una homotecia, mide  $100 \text{ cm}^2$ , si el cuadrado original mide  $4 \text{ cm}^2$ , ¿cuál fue el factor de homotecia que se aplicó?

Explica tu resultado.

2. Compara tus resultados con los de algunos de tus compañeros y, con la ayuda de tu profesor, ofrece con tus propias palabras una explicación breve que describa cuál es el proceso completo que se debe realizar para analizar, plantear, resolver y comprobar un problema donde intervienen la homotecia y la semejanza entre dos figuras.

Desarrolla tus habilidades

1. Lee con detenimiento las siguientes instrucciones, realiza lo que se pide y al final responde las preguntas y llega a una conclusión.

- a) Toma una lupa convencional y selecciona un objeto que se pueda ver con comodidad a través de ella.

- b) Coloca la lupa tan cerca como puedas del objeto y observa hasta qué distancia la puedes separar para que el objeto se vea más grande.

- c) Aleja la lupa a una distancia mayor al punto que tu consideres como el máximo.

- Al aumentar la imagen del objeto con la lupa, ¿dónde consideras que se encuentra el centro de homotecia?

Explica tu respuesta.

- En el punto que tú consideras como el máximo para alejar la lupa del objeto sin que se pierda el aumento de la imagen, ¿dónde se encuentra el centro de homotecia?

Justifiquen su respuesta.

- Cuando excedes ese punto máximo, ¿cómo se ve la imagen del objeto a través de la lupa?

¿Por qué crees que ocurre esto?

- Al pasar de este punto máximo, ¿dónde se encuentra el centro de homotecia?

Explica tu respuesta.

2. Con la ayuda del profesor concluyan sobre la relación que tiene la semejanza de figuras y la homotecia en fenómenos físicos, como la reflexión de un objeto a través de un lente de aumento.

USAS LAS TIC



Visita la página <http://www.educacionplastica.net/zirkel/homotecia.html> (Consultada el día 5 de diciembre de 2016, a las 10:04 horas), ahí encontrarás una actividad interactiva simple, pero que ilustra muy bien la razón de semejanza entre los lados de dos figuras y podrás compararla utilizando un control deslizador; después, experimenta haciendo cálculos entre los triángulos en diferentes posiciones y comprueba tus resultados por medio de operaciones.

Eje temático	Manejo de la información
Tema	Proporcionalidad y funciones
Contenido 5	Lectura y construcción de gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos.



**ACUÉRDATE DE...**



1. Al lanzar una pelota hacia arriba, todos dan por hecho que nuevamente va a caer, reflexionen acerca de esta acción y contesten las preguntas.

- ¿De qué depende la altura que alcance la pelota? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál será la velocidad de la pelota al llegar a su punto más alto? \_\_\_\_\_  
Entonces, ¿qué ocurre con la velocidad desde que la pelota es lanzada hasta que regresa nuevamente? \_\_\_\_\_

- ¿Será posible calcular la distancia que ha recorrido la pelota en distintos momentos del lanzamiento? \_\_\_\_\_  
Justifiquen su respuesta. \_\_\_\_\_

- ¿En qué influye la fuerza con la que es lanzada la pelota en relación a la distancia que recorre y el tiempo que tarda en su recorrido? \_\_\_\_\_

- Si se tomara la distancia recorrida durante distintos tiempos y luego con ello se hiciera una gráfica que relacionara la distancia y el tiempo, ¿qué forma consideran que tendría la gráfica obtenida? \_\_\_\_\_  
Justifiquen su respuesta. \_\_\_\_\_

2. Comparen sus respuestas con las de algunas otras parejas y con la ayuda del profesor concluyan cómo es una gráfica que represente la relación entre la distancia y el tiempo durante un tiro vertical.



**PRACTICALO**



**Actividad 5.1**

1. Al lanzar una pelota, Luis pidió a su amigo Francisco que calculara aproximadamente la altura a la que se encontraba la pelota en cada segundo del lanzamiento, Paco contó sólo 4 segundos en total y registró las alturas (en metros) en una tabla.

Tiempo	Distancia
0	0
1	6
2	8
3	6
4	0

a) Respondan las preguntas.

- ¿Cuál fue la altura máxima que alcanzó la pelota? \_\_\_\_\_
- ¿En cuánto tiempo alcanzó su altura máxima? \_\_\_\_\_
- ¿Por qué las cantidades para los tiempos 0 y 1 es la misma para los tiempos 3 y 4? \_\_\_\_\_

b) Construyan la gráfica correspondiente a la tabla y respondan las preguntas.

- ¿Cómo se llama la línea obtenida en la gráfica? \_\_\_\_\_
- Algebraicamente, este tipo de líneas, ¿con qué tipo de expresiones se representan? \_\_\_\_\_
- ¿Qué característica específica debe tener una expresión algebraica para que dé una curva de este tipo? \_\_\_\_\_



c) Comparen sus respuestas con las de algún equipo cercano y con la ayuda del profesor sinteticen qué es una curva de segundo grado y qué características tienen las expresiones algebraicas que las representan.



**PRACTICALO**



**Actividad 5.2**

1. La expresión algebraica  $y = -2x^2 + 8x$  representa la ecuación del problema anterior, completen la tabla y respondan las preguntas.

Tiempo	Distancia	Operaciones
0	0	$-2(0)^2 + 8(0) = 0$
1		$-2(\quad)^2 + 8(\quad) =$
2		$-2(\quad)^2 + 8(\quad) =$
3		$-2(\quad)^2 + 8(\quad) =$
4		$-2(\quad)^2 + 8(\quad) =$

- ¿Corresponden los resultados a los obtenidos en la actividad anterior? \_\_\_\_\_
- ¿Qué relaciones pueden encontrar entre los términos de la expresión algebraica y la parábola que representa? \_\_\_\_\_
- ¿Cómo es posible obtener la distancia recorrida por la pelota entre los segundos 3 y 4? \_\_\_\_\_
- El procedimiento es el mismo para calcular la distancia entre los segundos 1 y 2? \_\_\_\_\_  
Expliquen por qué ocurre esto. \_\_\_\_\_

2. Comparen sus resultados con los de algunos de sus compañeros y con la ayuda del profesor concluyan cuál es el procedimiento para poder graficar una parábola a partir de una expresión algebraica dada.



**PRACTICALO**



**Actividad 5.3**

En la actividad anterior trabajaron con una ecuación cuadrática conocida, sin embargo, es posible obtener una expresión de este tipo si se aprende a modelar la situación que la representa.

1. El perímetro de un rectángulo es de 16 cm.

- a) En su cuaderno tracen los posibles rectángulos que cumplan con esta condición.
- b) Elaboren una tabla con las dimensiones del largo y el ancho de las figuras que encontraron.

Largo				
Ancho				

- ¿Qué estrategia utilizaron para encontrar las dimensiones de cada rectángulo? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál de las figuras obtenidas tiene más superficie? \_\_\_\_\_  
¿Cuál tiene la menor superficie? \_\_\_\_\_
- ¿Por qué tienen superficie distinta si tienen el mismo perímetro? \_\_\_\_\_
- Si uno de estos rectángulos tiene una superficie de  $15 \text{ cm}^2$ , según la tabla, ¿cuáles son sus dimensiones? \_\_\_\_\_
- Si representamos con una  $x$  a uno de los lados de cualquiera de los rectángulos, ¿cuál es la expresión algebraica que permite expresar el valor del otro lado? \_\_\_\_\_  
Expliquen su respuesta. \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es la expresión algebraica que representa la multiplicación de los dos lados y que da como resultado  $15 \text{ cm}^2$ ? \_\_\_\_\_
- ¿Cómo queda esta expresión cuando se acomoda como una ecuación cuadrática de la forma  $x^2 + bx + c$ ? \_\_\_\_\_
- Expliquen, ¿cuál fue el procedimiento que realizaron? \_\_\_\_\_

2. Comparen sus resultados con los de algunos compañeros y con la ayuda del profesor determinen cuál es el proceso para plantear y expresar en su forma más simple una expresión de segundo grado a partir del modelo de una situación.



**PRACTICALO**

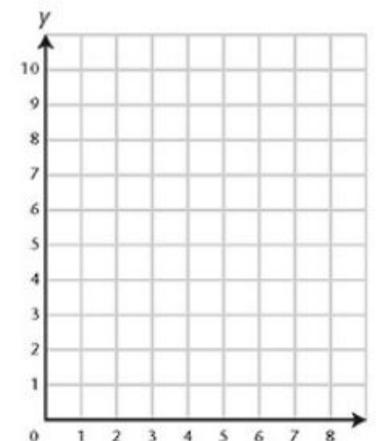


**Actividad 5.4**

1. Retomen la ecuación obtenida en la sección anterior y completen la tabla para los valores dados en  $x$ .

$x$	1	2	3	4	5	6	7	8
$y$								

a) Usando los valores dados, tracen la gráfica correspondiente a esta ecuación.



- ¿Hacia dónde abre la parábola? \_\_\_\_\_
- ¿Qué determina esta posición? \_\_\_\_\_
- ¿En qué puntos corta la parábola al eje de las  $x$ ? \_\_\_\_\_
- ¿Qué relación tienen estas cantidades con la superficie buscada en la actividad anterior donde se requería encontrar las medidas de un rectángulo que midiera  $15 \text{ cm}^2$  de superficie? \_\_\_\_\_
- ¿Cómo puedes describir la relación entre los valores de ambos ejes? \_\_\_\_\_
- Por lo tanto, ¿qué representan gráficamente los puntos de intersección en el eje  $x$ ? \_\_\_\_\_

2. Comparen sus respuestas con las de algunos de sus compañeros y con la ayuda del profesor elaboren una breve síntesis del proceso para modelar, interpretar y resolver un problema donde interviene la representación gráfica de una ecuación de segundo grado.

**Para leer más**

Gráficamente, en una ecuación cuadrática, si el término de primer grado y el término independiente valen cero, la parábola tiene su vértice en el centro del plano, y su eje coincide con el eje  $y$ , el sentido hacia donde abre se lo da el signo positivo (hacia arriba) y negativo (hacia abajo). Cualquier alteración en el término de primer grado provoca un desplazamiento de la parábola (hacia la derecha o la izquierda) o en el independiente (hacia arriba o hacia abajo).

**Para tener en cuenta**

La gráfica que relaciona la distancia recorrida y el tiempo en fenómenos físicos como el tiro vertical o la caída de un objeto en un plano inclinado, se llama parábola, esto es una curva plana y abierta. Algebraicamente la expresión que la representa debe tener como máximo exponente el 2 en su variable y puede ir acompañada de un término de primer grado, un término independiente o ambos.



**LO QUE APRENDÍ**

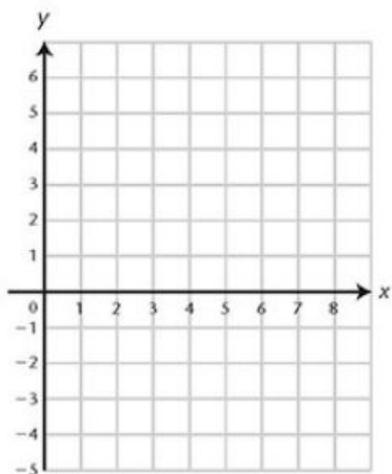


1. Dado un rectángulo que tiene un perímetro de 16 unidades y una superficie de  $12 u^2$  encuentra las medidas del largo y el ancho por medio del modelado de esta situación, traza la tabla con los valores necesarios para realizar la gráfica y comprueba algebraicamente tus resultados. Plantea claramente la función necesaria.

a) Completa la tabla.

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y								

b) Traza la gráfica.



- c) En tu cuaderno resuelve algebraicamente la ecuación y comprueba el valor gráfico de las raíces.
- d) Compara tus resultados con los de algún compañero y con la ayuda del profesor verifica que tus respuestas y procedimientos sean correctos.

**USALAS TIC**



En la página <http://tusclasesdeapoyo.com/2012/06/14/actividades-interactivas-de-fisica-y-quimica-para-eso/> (Consultada el día 6 de diciembre de 2016, a las 11:58 horas), encontrarás una actividad interactiva que te ayudará a comprender este tema, observa cómo aplicar los conocimientos que adquiriste y posteriormente comenta tu visita con tu profesor.

**Desarrolla tus habilidades**

1. Si se deja caer libremente un cuerpo desde la torre de Pisa, que tiene una altura de 77.5 m aproximadamente, ¿en cuánto tiempo llegará al suelo?
  - a) Utiliza tus conocimientos de física y con ellos modela esta situación en tu cuaderno o en hojas blancas.
    - Elabora una representación gráfica del problema.
    - Encuentra la ecuación cuadrática que la representa.
    - Construye la tabla y la gráfica correspondientes.
    - Comprueba tus raíces resolviendo algebraicamente la ecuación cuadrática.

Eje temático	Manejo de la información
Tema	Proporcionalidad y funciones
Contenido 6	Lectura y construcción de gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera.



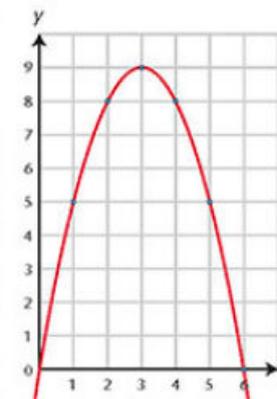
**ACUÉRDATE DE...**



1. En la gráfica mostrada se puede apreciar el tiro más alto que logró hacer Iván.

- a) Analicen la imagen y respondan las preguntas.
- b) Con la información de la gráfica completen la siguiente tabla.

x	y	x	y
1		4	
2		5	
3		6	



- ¿Cuál es la expresión algebraica que representa esta parábola? \_\_\_\_\_
- ¿De qué manera determinaron la expresión? \_\_\_\_\_
- ¿De qué tipo de expresión se trata? \_\_\_\_\_
- Expliquen, ¿cómo determinaron los valores de los coeficientes? \_\_\_\_\_

2. Comparen sus respuestas con las de algunos de sus compañeros y con la asesoría del profesor corroboren los procedimientos que utilizaron y determinen cuál es la relación entre la gráfica y la expresión algebraica que la modela.



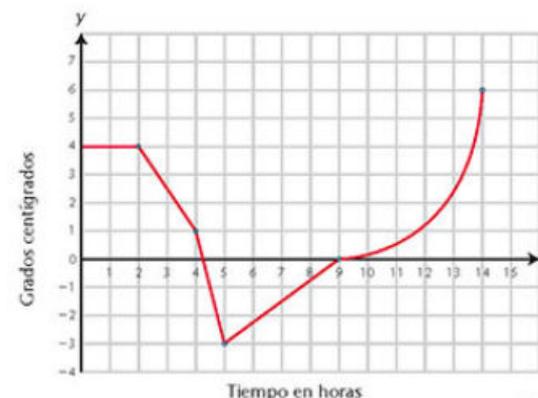
**PRACTÍCALO**



**Actividad 6.1**

1. Analicen la situación planteada y respondan las preguntas.

- a) El refrigerador del Sr. Rogelio está fallando, para conocer cómo está trabajando registró la temperatura que marcó durante un día. Analicen la gráfica que elaboró y respondan las preguntas.
  - ¿Qué ocurrió con la temperatura durante las primeras dos horas? \_\_\_\_\_



- ¿En qué periodo descendió más la temperatura? \_\_\_\_\_
- ¿Qué ocurrió con la temperatura entre las 9 y las 14 horas? \_\_\_\_\_
- ¿En qué periodo el incremento de temperatura se dio de manera regular? \_\_\_\_\_
- ¿En cuántos periodos la temperatura descendió de manera regular? \_\_\_\_\_

2. Comparen sus respuestas con las de algunos de sus compañeros y con la asesoría del profesor determinen cuál es la manera correcta de interpretar gráficas que relacionan temperatura y tiempo y que, además, presentan secciones rectas y curvas.



**PRACTICALO**



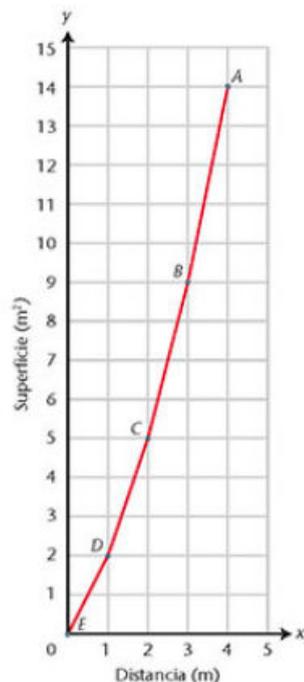
**Actividad 6.2**

1. Leonardo acaba de comprar un proyector para hacer las presentaciones de su trabajo, y está probando a qué distancia lo debe colocar para obtener una imagen con la mayor calidad posible, para ello está moviendo su proyector a distancias regulares. En sus primeras pruebas una quedó muy pequeña, otra cubría la pantalla correctamente y en otra más la imagen se salía.

En la gráfica se puede observar la relación entre la distancia a la que separó el proyector y la medida de la superficie que proyecta.

a) Con base en esta información, respondan las preguntas.

- ¿Cuántos metros cuadrados de superficie puede proyectar si separa el proyector 3 m? \_\_\_\_\_
- ¿Cuántos metros cuadrados de superficie puede cubrir si lo separa 4 m? \_\_\_\_\_
- Entonces, ¿cuántos metros cuadrados cubrirá si lo separa 5 metros? \_\_\_\_\_
- ¿De qué manera calcularon este resultado? \_\_\_\_\_
- Si quisiera obtener una imagen de  $7 \text{ m}^2$ , ¿a qué distancia tendría que colocar el proyector? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es la expresión algebraica que representa esta parábola? \_\_\_\_\_
- ¿Cuáles son los valores de los coeficientes? \_\_\_\_\_
- ¿De qué manera pueden comprobar que esta expresión es correcta? \_\_\_\_\_



2. Comparen sus respuestas con las de algunos de sus compañeros y con la ayuda del profesor elaboren una explicación breve acerca de cómo se debe interpretar una gráfica que contiene una parábola, y cuál es la relación que tiene con la expresión algebraica que la representa.

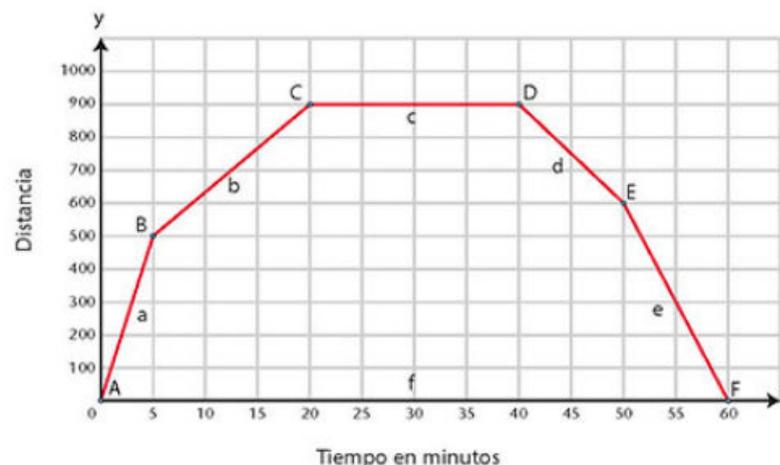


**PRACTICALO**



**Actividad 6.3**

1. La mamá de Ricardo le pidió que fuera a casa de una de sus tías a recoger algunas cosas, él tomó su bicicleta e hizo el recorrido como se muestra en la gráfica. Analíenla y respondan las preguntas.



- ¿Qué distancia recorrió en los primeros 5 minutos? \_\_\_\_\_
- ¿Qué distancia recorrió entre los puntos B y C? \_\_\_\_\_
- ¿Cuánto tiempo permaneció en casa de su tía? \_\_\_\_\_
- ¿A qué distancia está la casa de su tía? \_\_\_\_\_
- ¿Cuánto tiempo tardó en regresar a su casa? \_\_\_\_\_
- En total, ¿cuánta distancia recorrió? \_\_\_\_\_
- ¿Cuánto tiempo utilizó desde que salió de su casa hasta que regresó? \_\_\_\_\_
- Describan, ¿cuál es la manera en la que se interpreta una gráfica de este tipo? \_\_\_\_\_

• En su cuaderno, tracen una gráfica similar, en la que muestren algún recorrido que hayan hecho ustedes, y compárenla con el recorrido de Ricardo.

2. Comparen sus resultados con los de algunos de sus compañeros y con la ayuda del profesor determinen cuál es la forma que consideran más adecuada para poder analizar una gráfica que está formada por distintos segmentos de recta.



**PRACTICALO**

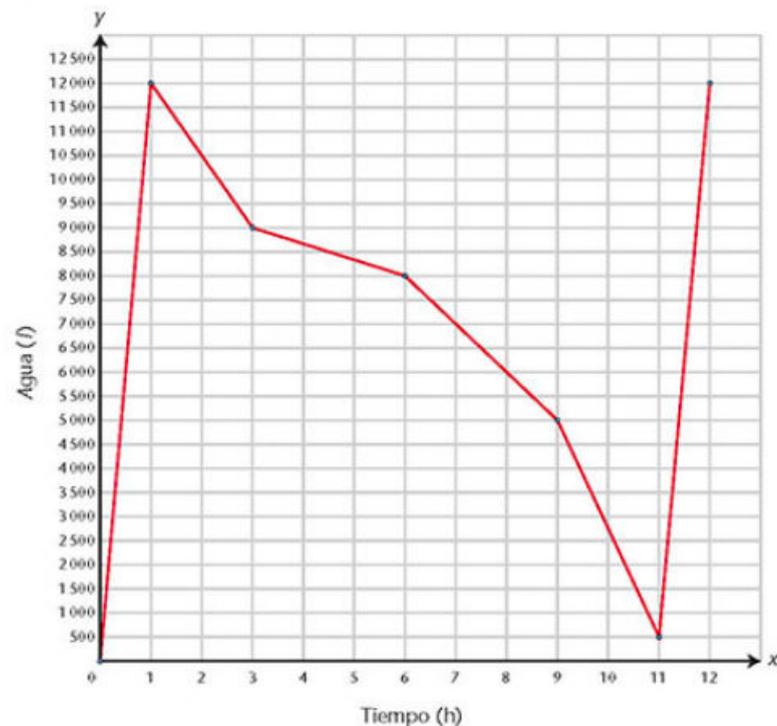


**Actividad 6.4**

1. El Sr. Noé tiene una purificadora de agua, ayer desinfectaron su tinaco y hoy lo va a llenar, para lo cual contrató una pipa con agua potable; en cuanto lo tenga lleno va a abrir su negocio y empezará a vender.

En la siguiente gráfica se puede observar el nivel que tuvo el agua durante todo el día de trabajo hasta que cerró su negocio.

a) Analicen la gráfica y respondan las preguntas.



- Si empezó a llenar su tinaco a las 7 de la mañana, ¿a qué hora abrió el negocio? \_\_\_\_\_
- Si cada garrafón tiene 20 litros de capacidad, ¿cuántos vendió en la primera hora? \_\_\_\_\_
- ¿En qué tiempo vendió el agua? \_\_\_\_\_
- Si decidió cerrar su negocio y recargar nuevamente el tanque para tenerlo listo para el siguiente día, ¿a qué hora cerró? \_\_\_\_\_
- ¿Cuánto tiempo mantuvo abierto el negocio? \_\_\_\_\_

2. Comparen sus resultados con los de algunos de sus compañeros y con la asesoría del profesor determinen cuál es la conveniencia de saber interpretar gráficas que contienen líneas.

**Para leer más**

La capacidad de argumentación es, sin duda alguna, una competencia matemática muy importante, que se utiliza de manera permanente en el estudio de esta ciencia, lo que permite validar o descartar conclusiones y con ello hacer el aprendizaje más significativo.

Es muy importante que analices e interpretes las deducciones a las que llegas durante las actividades; para generar más, es necesario que tengas discusiones con tus compañeros, siempre bajo la supervisión de tu profesor, lo que te permitirá verificar la validez de las mismas y consolidar tus conocimientos.

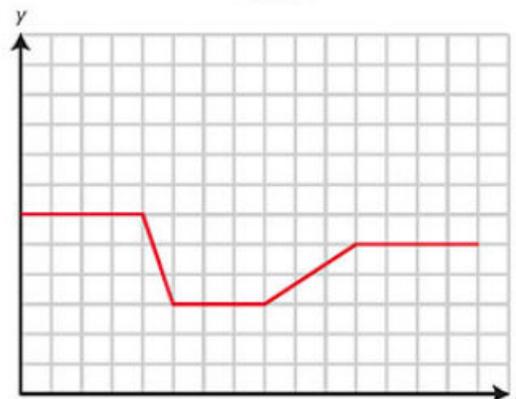


**LO QUE APRENDÍ**

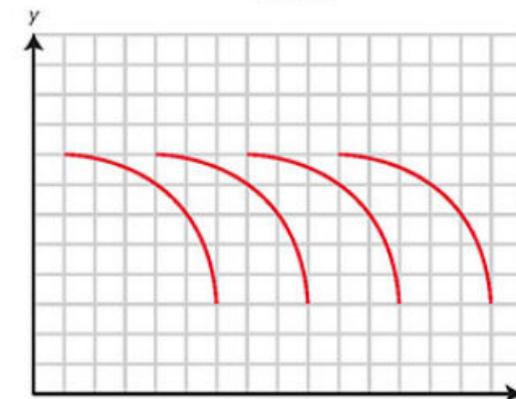


1. Analiza las gráficas mostradas y responde las preguntas.

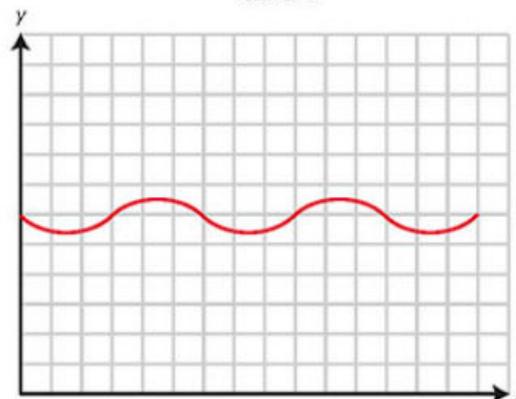
Gráfica 1



Gráfica 2



Gráfica 3



Gráfica 4



- ¿Cuál de las gráficas se puede relacionar con el recorrido de un automóvil? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál de las gráficas se puede relacionar con el lanzamiento de un objeto? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál de las gráficas se puede relacionar con el suero endovenoso que se le aplica a un paciente? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál de las gráficas se puede relacionar con los efectos en el organismo de un medicamento ingerido mediante pastillas? \_\_\_\_\_

2. Compara tus resultados con los de algunos de tus compañeros y, con la asesoría de tu profesor, determina cómo se puede relacionar una gráfica con una situación por medio de la interpretación de la misma.

**USA LAS TIC**

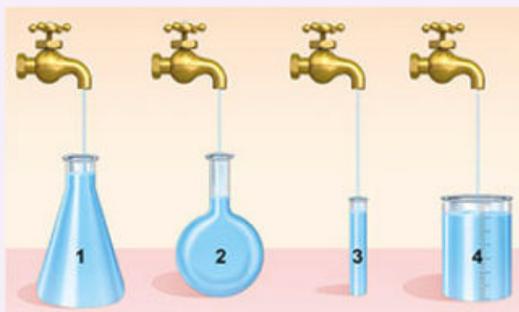


Visita la página <http://www.profesorenlinea.cl/matematica/Graficos02.html> (Consultada el día 5 de diciembre de 2016, a las 10:17 horas), en la que encontrarás información acerca de este tema, ejemplos y ejercicios. Durante tu visita, contrasta tus conocimientos con lo que en ella aparece y después de tu visita comenta con tu profesor, ¿cuál es la utilidad de contar con este tipo de recursos tecnológicos y cómo puede ser de utilidad en la vida cotidiana?

**Desarrolla tus habilidades**

1. En un laboratorio de química se están llenando algunos recipientes con líquido, todas las llaves se abren a un mismo tiempo y dan la misma cantidad de agua.

a) Observen la imagen y realicen un bosquejo de las gráficas que representan la relación de la altura con el tiempo que tardan en llenarse.




- ¿Cuál es la estrategia que utilizaron para determinar la forma de la gráfica de cada recipiente? \_\_\_\_\_
- ¿Qué criterio utilizaron para trazarlas? \_\_\_\_\_
- ¿De qué manera es posible comprobar que los recipientes corresponden a las gráficas dadas? \_\_\_\_\_

2. Comparen sus resultados con los de algunos de sus compañeros y con la ayuda del profesor elaboren una explicación acerca de cuál es el proceso de interpretación de una gráfica, cuál es la relación que tiene con las expresiones algebraicas y con la situación que modela.

Eje temático	Manejo de la información
Tema	Nociones de probabilidad
Contenido 7	Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto).



**ACUÉRDATE DE...**



1. Analicen la siguiente situación y realicen lo que se pide

a) Al lanzar un dado, se dan tres condiciones que se consideran favorables, la primera es *A*, que en la cara superior salga un número 6, la segunda, *B*, que salga un 3 o un 5 y la tercera, *C*, es que salga cualquier número par.

- ¿Cuál es la probabilidad de *A*? \_\_\_\_\_ ¿Cuál es la de *B*? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es la de *C*? \_\_\_\_\_
- El que ocurra alguno de estos tres eventos, ¿influye en alguno de los otros o son independientes entre sí? \_\_\_\_\_  
Explicuen su respuesta. \_\_\_\_\_
- Si al hacer el primer lanzamiento decimos que ocurrió el evento *A*, ¿en qué altera a los otros eventos? \_\_\_\_\_
- Si decimos que ha ocurrido *B*, ¿algún evento se vio alterado? \_\_\_\_\_  
¿Por qué ocurrió esto? \_\_\_\_\_
- ¿Cómo describirían la diferencia entre lo que ocurre, si al hacer el lanzamiento ocurre *A* o *C* en comparación a si ocurre *B*? \_\_\_\_\_

2. Comparen sus resultados con los de algunos de sus compañeros y con la ayuda del profesor concluyan cuáles son las condiciones que permiten determinar la ocurrencia de dos eventos independientes.



**PRACTÍCALO**



**Actividad 7.1**

1. Discutan las siguientes situaciones y, con base en sus opiniones, contesten las preguntas.

a) El profesor de Física quiere aplicar una pequeña evaluación de lo que se vio en la clase de hoy, para ello elaboró un cuestionario con 4 preguntas de opción múltiple, cada una de ellas tiene 5 respuestas distintas.

- Suponiendo que un alumno responde totalmente al azar las 4 preguntas, ¿cuál consideran que es la probabilidad de que acierte las 4 respuestas correctas? \_\_\_\_\_  
Justifiquen su respuesta. \_\_\_\_\_
- ¿Cuál será la probabilidad de que al responder totalmente al azar apruebe el examen? \_\_\_\_\_
- Expliquen su respuesta. \_\_\_\_\_
- ¿Qué estrategia utilizaron para encontrar las respuestas? \_\_\_\_\_

b) En una clínica de maternidad nacerán 3 bebés el día de hoy; de todas las posibilidades existentes, ¿qué probabilidad consideran que tiene el que pase alguno de estos tres eventos?

- Que nazca primero una mujer y luego dos hombres. \_\_\_\_\_
- Que nazcan primero dos hombres y luego una mujer. \_\_\_\_\_
- Que nazca primero un hombre, luego una mujer y al final otro hombre. \_\_\_\_\_
- ¿Qué procedimiento utilizaron para encontrar las respuestas anteriores? \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_
- ¿Consideran que estas situaciones plantean eventos que dependen entre sí para que ocurran, o son totalmente independientes? \_\_\_\_\_ ¿Por qué? \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

2. Comparen sus respuestas con las de algunos de sus compañeros y con la ayuda del profesor comenten algunas de las estrategias empleadas y concluyan si fueron adecuadas y permitieron obtener los resultados correctos.



**PRACTICALO**



**Actividad 7.2**

1. En un municipio del Estado de México tienen, para su seguridad, carros de bomberos y ambulancias. Actualmente, si se requiere un carro de bomberos, la probabilidad de que esté disponible es  $\frac{49}{50}$  y si se necesita una ambulancia, la probabilidad de que esté disponible es  $\frac{23}{25}$ .

a) Suponiendo que ocurre una emergencia donde se requiera que esté disponible una ambulancia y un carro de bomberos al mismo tiempo, ¿cuál es la probabilidad de que sí estén disponibles? \_\_\_\_\_

- ¿Qué operación realizaron para encontrar este resultado? \_\_\_\_\_
- ¿Estos eventos son independientes entre sí o uno depende del otro? \_\_\_\_\_  
Expliquen su respuesta. \_\_\_\_\_
- Al investigar la probabilidad de que dos condiciones se den simultáneamente, ¿la probabilidad aumenta o disminuye? \_\_\_\_\_ ¿Por qué ocurre esto? \_\_\_\_\_
- ¿Cómo expresarían la probabilidad de que estén disponibles los dos vehículos en número decimal? \_\_\_\_\_ ¿Qué operación realizaron? \_\_\_\_\_ Por lo tanto, ¿cuál es el porcentaje? \_\_\_\_\_

2. Comparen sus resultados con los de algunas parejas cercanas y con la ayuda del profesor determinen cómo es más conveniente expresar e interpretar la probabilidad de ocurrencia de dos eventos, como número racional, número decimal o en porcentaje; y cómo es posible obtener la probabilidad de ocurrencia de que se den dos eventos independientes de manera simultánea.



**PRACTICALO**



**Actividad 7.3**

Hasta ahora has analizado eventos que no llevan alguna alteración previa, sin embargo, existe la posibilidad de que algún evento no lo sea.

1. Reflexiona y responde las preguntas.

a) Suponiendo que una moneda se alteró de manera que el anverso tenga el doble de posibilidades de salir que el reverso.

- ¿Consideras que si se va a lanzar una moneda entre dos personas que saben de esta condición, pueden hacer una predicción justa del posible resultado al lanzar una vez la moneda? \_\_\_\_\_  
¿Por qué? \_\_\_\_\_
- ¿Esta condición se altera si en vez de hacer un lanzamiento se realizan al menos 3? \_\_\_\_\_  
Justifica tu respuesta. \_\_\_\_\_
- Si se realizan 3 lanzamientos, ¿cuál es la probabilidad de que se obtengan dos veces el anverso y una vez el reverso? \_\_\_\_\_ ¿Cómo calculaste este resultado? \_\_\_\_\_
- De todos los posibles resultados, ¿cuáles son los favorables? \_\_\_\_\_
- ¿Consideras que estos eventos son independientes entre sí? \_\_\_\_\_  
Explica tu respuesta. \_\_\_\_\_

2. Compara tus resultados con los de algunos de tus compañeros y con la ayuda del profesor determina cuál es el algoritmo adecuado para obtener la probabilidad cuando se relacionan entre sí varios eventos.



**PRACTICALO**



**Actividad 7.4**

1. A continuación se muestran tres situaciones, analicen cada una y respondan las preguntas.

a) Lanzar dos dados al mismo tiempo.

- ¿Cuál es la probabilidad de que en ambas caras salga el mismo número? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es la probabilidad de que en ambas caras salga un 3? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es la probabilidad de que en un solo dado caiga 3? \_\_\_\_\_
- Entonces, al lanzarlos juntos, ¿qué operación permite conocer la probabilidad de que en ambos caiga 3? \_\_\_\_\_
- ¿Afecta en algo la probabilidad de uno de los dados al otro? \_\_\_\_\_
- ¿Por qué ocurre esto? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es la probabilidad de que ambas caras sumen 7? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es la probabilidad de que caigan números iguales y además sumen 8? \_\_\_\_\_
- ¿Cuáles eventos de los mencionados anteriormente se pueden considerar independientes? \_\_\_\_\_
- Justifiquen su respuesta. \_\_\_\_\_

b) Lanzar un dado y una moneda al mismo tiempo.

- ¿Cuál es la probabilidad de que caiga 6 y cruz? \_\_\_\_\_
- Si primero tiran el dado y cae 6, y luego la moneda, ¿cuál es la probabilidad de que caiga cruz? \_\_\_\_\_

- Si primero tiran la moneda y cae cruz, y luego el dado, ¿cuál es la probabilidad de que caiga 6? \_\_\_\_\_
  - Si sólo se lanza el dado, ¿cuál es la probabilidad de obtener un número impar y mayor que 3? \_\_\_\_\_
  - Si al lanzar un dado ya se sabe que salió un número mayor que 3, ¿qué probabilidad hay de que sea impar? \_\_\_\_\_
  - ¿Cuál de los eventos mencionados anteriormente son independientes? \_\_\_\_\_
  - ¿Cuáles eventos son dependientes? \_\_\_\_\_
- c) Extraer dos fichas al azar de un contenedor que tiene 3 fichas marcadas con el número 1, dos fichas marcadas con el número 2 y cuatro fichas marcadas con el número 3.
- ¿Cuál es la probabilidad de que al mismo tiempo Ramiro saque una ficha marcada con 1 y Lucía otra con un 2? \_\_\_\_\_
  - Si regresan las fichas que tomaron y nuevamente saca cada uno una ficha, ¿cuál es la probabilidad de que Ramiro saque una marcada con el número 2 y Lucía una marcada con el número 3? \_\_\_\_\_
  - ¿Estos eventos son independientes entre sí? \_\_\_\_\_  
Justifiquen su respuesta. \_\_\_\_\_
2. Comparen sus resultados con los de algunos de sus compañeros y con la ayuda del profesor concluyan cómo se determina si dos eventos son independientes entre sí y cómo se calcula la probabilidad de ocurrencia de estos eventos.

**Para leer más**

Recuerda que dos eventos son independientes cuando no afectan entre sí su probabilidad de ocurrencia, y su probabilidad puede calcularse mediante la regla del producto. Matemáticamente, esta regla, según la teoría de la probabilidad, indica que *la probabilidad de que se produzcan los sucesos A y B como producto de la probabilidad del suceso A por la probabilidad de que ocurra B cuando se conoce que ha ocurrido A* (a esto se le llama también probabilidad condicionada). Y su notación es:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P\left(\frac{B}{A}\right)$$

El símbolo  $\cap$  (intersección) en este caso indica que se producen los sucesos A y B.

Si éstos son independientes, es decir si la probabilidad de uno de ellos no depende de que haya sucedido el otro, entonces:

$$P\left(\frac{B}{A}\right) = P(B)$$

Por lo que la regla del producto queda de la siguiente manera:

$$P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(A) \times P(B)$$

Es muy importante que sepas interpretar este tipo de expresiones matemáticas; pide ayuda a tu profesor para que te oriente en cuanto a cómo se debe leer para poder entenderla con facilidad.

**Para tener en cuenta**

Cuando se tienen varios eventos que son independientes entre sí, la manera de calcular la probabilidad de que ocurran todos ellos se realiza por medio de una multiplicación de la probabilidad que cada uno de estos eventos representa. A esto se le conoce como *la regla del producto*.



**LO QUE APRENDÍ**



1. En la siguiente tabla están los números que representan los puntos en las fichas del juego de dominó.

Fichas de dominó							
	0	1	2	3	4	5	6
0	0, 0						
1	0, 1	1, 1					
2	0, 2	1, 2	2, 2				
3	0, 3	1, 3	2, 3	3, 3			
4	0, 4	1, 4	2, 4	3, 4	4, 4		
5	0, 5	1, 5	2, 5	3, 5	4, 5	5, 5	
6	0, 6	1, 6	2, 6	3, 6	4, 6	5, 6	6, 6

- ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer una ficha al azar sea (6, 6)? \_\_\_\_\_
  - ¿Cuál es la probabilidad de que al sacar una ficha la suma de sus cantidades sea 8? \_\_\_\_\_
  - ¿Cuál es la probabilidad de que sea una ficha con dos números iguales? \_\_\_\_\_
  - ¿Cuál será la probabilidad de que al sacar una ficha contenga un 6 y además la suma de sus puntos dé un número par? \_\_\_\_\_
  - ¿Cuál es la probabilidad de que al sacar una ficha la suma de sus puntos sea 7 y a su vez esté formada por un número par y uno impar? \_\_\_\_\_
2. Compara tus respuestas con las de algunos compañeros, y con la ayuda del profesor determina cuál es la importancia de la observación y la deducción en el análisis de una situación de probabilidad donde se trabaja con más de dos eventos que pueden ser excluyentes o no entre sí.

**Desarrolla tus habilidades**

1. En un paquete de franelas hay cuatro de color blanco y tres de color negro, y en otro paquete hay tres franelas blancas y cinco negras, ¿cuál es la probabilidad de que al extraer una franela de cada paquete ambas sean de color negro? \_\_\_\_\_
2. Describe el planteamiento que realizaste y las operaciones que te permitieron calcular la probabilidad. \_\_\_\_\_

**USA LAS TIC**



Si quieres aprender más acerca de la regla del producto visita la página <http://carnesimatic.webcindario.com/probabilidadll.htm> (Consultada el día 5 de diciembre, a las 10:30 horas), donde encontrarás información teórica y ejemplos. Después de tu visita elabora un comentario con tu opinión acerca del contenido y los ejemplos y compártelo con tu profesor.

**Evaluación tipo PISA**

1. Analiza la imagen mostrada y los datos que contiene, y responde.

a) ¿Cuál es la expresión algebraica que permite encontrar la medida de las dimensiones del rectángulo?

b) ¿Cuál de las siguientes opciones indica las dimensiones correctas del rectángulo?

- a) 6 cm de base y 4 de altura
- b) 7 cm de base y 5 de altura
- c) 8 cm de base y 3 de altura
- d) 12 cm de base y 2 de altura

2. Un ingeniero está midiendo la altura de un poste, para ello él sabe que la sombra que proyecta es de 7.5 m y está tomando como referencia la altura de su tripié de 1.7 m, que proyecta una sombra de 1.27 m.

a) ¿Cuánto mide la altura del poste?

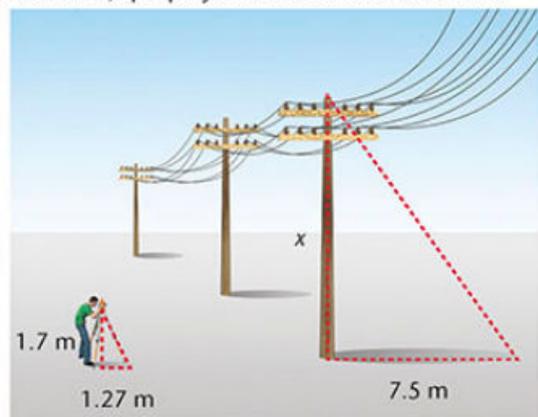
b) De las siguientes proporciones, ¿cuál permite obtener la altura del poste?

a)  $\frac{1.27 \text{ m}}{x} = \frac{1.7 \text{ m}}{7.5 \text{ m}}$

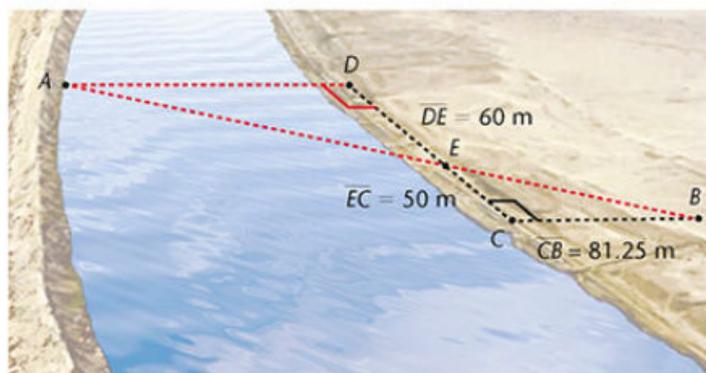
b)  $\frac{1.27 \text{ m}}{1.7 \text{ m}} = \frac{x}{7.5 \text{ m}}$

c)  $\frac{1.7 \text{ m}}{1.27 \text{ m}} = \frac{x}{7.5 \text{ m}}$

d)  $\frac{7.5 \text{ m}}{1.27 \text{ m}} = \frac{1.7 \text{ m}}{x}$



3. Analiza el esquema y determina.



**Evaluación tipo PISA**

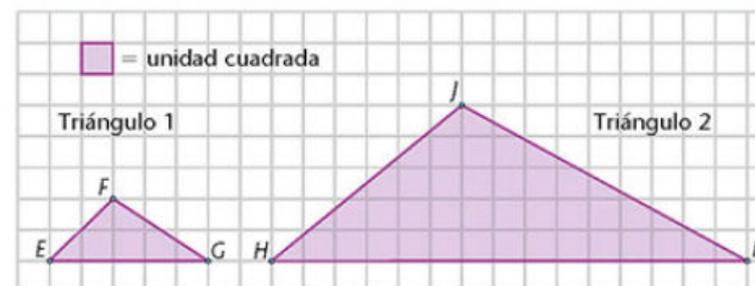
a) ¿Cuánto mide el ancho del canal de Suez ( $\overline{AD}$ )?

a) 97.5 m	c) 125.8 m
b) 70.25 m	d) 85.7 m

b) ¿Quién fue el matemático que enunció el teorema que dice: "Si varias paralelas cortan a dos transversales, se forman entre ellas segmentos correspondientes proporcionales"?

4. Explica, ¿cómo se obtiene la razón de semejanza entre dos figuras?

a) Analiza la imagen y determina, ¿cuál es la razón de semejanza?



5. Una caja para jabón de tocador mide 2 cm de altura y su largo es 3 cm mayor que su ancho. Si su volumen es  $80 \text{ cm}^3$ , cuáles son las dimensiones del largo y del ancho?

a) ¿Cuál de las siguientes expresiones modela esta situación? Encierra en un círculo un "Sí" o "No" para cada una.

a) La expresión algebraica es $2x^2 + 6x - 80 = 0$ , el largo se expresa como $x$ y el ancho es $x + 3$ .	Sí	No
b) La expresión algebraica es $2x^2 - 6x - 80 = 0$ , el largo se expresa $x - 3$ como y el ancho es $x$ .	Sí	No
c) La expresión algebraica es $2x^2 + 6x + 80 = 0$ , el largo se expresa como $3 + x$ y el ancho es $x$ .	Sí	No
d) La expresión algebraica es $2x^2 - 6x + 80 = 0$ , el largo se expresa como $3 - x$ y el ancho es $x + 3$ .	Sí	No

6. De los eventos indicados, ¿qué incisos contienen eventos independientes?

- a) Lanzar un dado en dos ocasiones y esperar que en el primer tiro salga un número par y en el segundo un impar.
- b) Lanzar un dado en dos ocasiones para obtener un número par en cada lanzamiento.
- c) Lanzar dos veces un dado y esperar que caiga un 3 en el primer lanzamiento y en el segundo un múltiplo de 3.
- d) Lanzar un dado a un mismo tiempo y esperar que si cae un número menor que 2 en un dado y en el segundo caiga un número par.

# Bloque 4

## Aprendizajes esperados:

- Utiliza en casos sencillos expresiones generales cuadráticas para definir el  $n$ -ésimo término de una sucesión.
- Resuelve problemas que implican el uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.
- Calcula y explica el significado del rango y la desviación media.

A las gráficas de las funciones seno y coseno se las considera ondas senoidales. El estudio de las funciones senoidales permite entender la naturaleza de muchas ondas que se encuentran a nuestro alrededor, por ejemplo en un electrocardiograma o en mareas oceánicas.

## Contexto histórico



Eje temático	Sentido numérico y pensamiento algebraico
Tema	Patrones y ecuaciones
Contenido 1	Obtención de una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión.

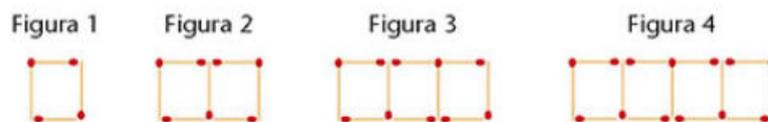


**ACUÉRDATE DE...**



1. En su curso de Matemáticas de segundo grado aprendieron a encontrar una expresión algebraica que permite conocer cualquier término de una sucesión. Para recordar ese procedimiento examinen la situación dada y respondan las preguntas.

a) Con la intención de construir modelos geométricos móviles, el maestro de matemáticas de la escuela de Laura utilizó cerillos. Analicen el modelo y registren debajo de cada uno el número de cuadrados que se forman y la cantidad de cerillos que se utilizaron.



Número de cuadrados \_\_\_\_\_  
 Número de cerillos \_\_\_\_\_

- Siguiendo esta forma, ¿cuántos cuadrados tendrá la siguiente figura?  
 ¿De cuántos cerillos estará formada? \_\_\_\_\_
- ¿Cuántos cuadrados tendrá la octava figura?  
 ¿De cuántos cerillos estará formada? \_\_\_\_\_
- ¿Qué procedimiento utilizaron para determinar estos resultados? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es la regla que hay que seguir para obtener una figura a partir de la anterior? \_\_\_\_\_
- Siguiendo el mismo patrón hasta la décima figura, ¿cómo se puede determinar la cantidad de cuadrados que se formarán y la de cerillos que se emplearán? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es la fórmula que permite encontrar cualquier término de esta sucesión? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es la expresión algebraica que representa la sucesión con base en el número de cerillos con que se forma cada figura? \_\_\_\_\_
- Escriban en su cuaderno las operaciones que realizaron.
- ¿Cómo pueden comprobar que esta expresión es correcta? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es el número necesario de cerillos para formar una figura con 15 cuadros?  
 Justifiquen su respuesta. \_\_\_\_\_

2. Comparen sus respuestas con las de otros equipos y, con la ayuda del profesor, verifiquen que su fórmula sea la adecuada; en clase, redacten una síntesis de las características de estas sucesiones, diseñen una sucesión propia, similar a la de esta actividad y comprueben sus resultados.



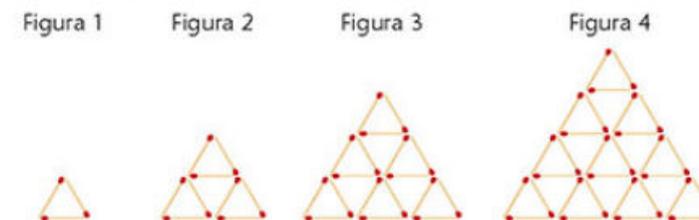
**PRACTÍCALO**



**Actividad 1.1**

1. Analicen la siguiente sucesión basada en una construcción triangular hecha con cerillos.

a) El profesor de Laura presentó esta secuencia en clase, para que el grupo la comparara con la planteada anteriormente. Escriban sobre las líneas indicadas en la imagen, la cantidad de triángulos formados y el número de cerillos utilizados para cada figura, después contesten las preguntas.



Número de triángulos \_\_\_\_\_  
 Número de cerillos \_\_\_\_\_

- ¿Cuál es la diferencia entre la cantidad de triángulos de la figura 2 y la figura 1? \_\_\_\_\_  
 ¿Qué diferencia existe entre la figura 3 y la figura 2? \_\_\_\_\_  
 ¿Y entre la 4 y la 3? \_\_\_\_\_
  - ¿Cuál es la diferencia entre estos tres resultados? \_\_\_\_\_
  - ¿De qué manera consideran que pueden ser útiles estas cantidades? \_\_\_\_\_
  - Si se continúa con esta forma en la construcción de las figuras, ¿cuál es la cantidad de triángulos que se formarán en la figura 5? \_\_\_\_\_  
 ¿De qué manera determinaron el resultado? \_\_\_\_\_
  - ¿Qué estrategia utilizarían para conocer la cantidad de triángulos que se forman para las figuras consecutivas 6, 7 y 8? \_\_\_\_\_
  - ¿Cómo determinarían la cantidad de triángulos formados para la figura 15? \_\_\_\_\_
  - ¿De qué manera pueden elaborar una expresión algebraica que represente un número  $n$ , es decir, cualquier figura de esta sucesión? \_\_\_\_\_
  - ¿De qué grado es la expresión que plantearon?  
 ¿Por qué ocurrió esto? \_\_\_\_\_
  - ¿Cómo pueden comprobar si la expresión algebraica es correcta o no? \_\_\_\_\_
  - ¿Cuántos triángulos se formarán en la figura 40? \_\_\_\_\_
- b) Sobre el número de cerillos con los que se formaron las figuras:
- ¿Cuántos cerillos se necesitan para crear la figura 5? \_\_\_\_\_ ¿Cómo determinaron esta cantidad? \_\_\_\_\_

- ¿De qué manera pueden determinar la cantidad de cerillos necesaria para construir las figuras 6, 7 y 8?  
 \_\_\_\_\_  
 ¿Es la misma estrategia que usaron para encontrar el número de triángulos?  
 ¿Por qué ocurrió esto?  
 \_\_\_\_\_
- ¿Cómo determinarían la cantidad necesaria de cerillos para formar la figura 15?  
 \_\_\_\_\_
- En este caso, ¿cuál es la expresión algebraica que proponen que permita obtener la cantidad de cerillos necesaria para representar cualquier figura  $n$ ?  
 ¿De qué grado fue la expresión que plantearon?  
 ¿Fue del mismo grado que la expresión para el número de triángulos?  
 ¿Por qué ocurrió esto?  
 \_\_\_\_\_
- ¿Cómo pueden comprobar si esta expresión algebraica es correcta?  
 \_\_\_\_\_
- ¿Cuántos cerillos se necesitarán para formar la figura 40?  
 \_\_\_\_\_

2. Comparen sus respuestas con las de algunos equipos y comenten en grupo las estrategias que utilizaron para dar respuesta a las preguntas, analicen las expresiones algebraicas planteadas y determinen cuál consideran que es la más adecuada. También expliquen si es que consideran que hay alguna otra estrategia para resolver situaciones como éstas.



**PRACTICALO**



**Actividad 1.2**

1. Reflexionen sobre la situación planteada y contesten las preguntas.

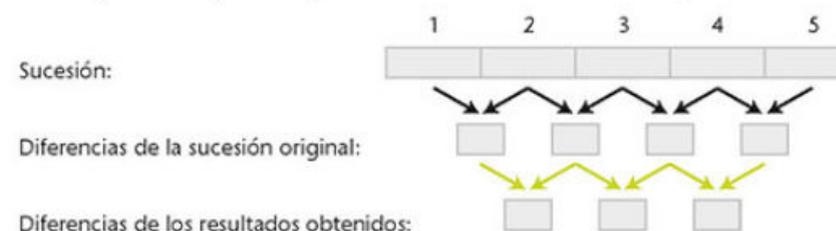
a) El profesor de matemáticas pidió a sus alumnos que elaboraran un diseño único. Propuso que los hicieran coloreando los cuadros de su cuaderno; Laura realizó el que se muestra en la imagen. Escriban sobre las líneas las medidas correspondientes a la base, la altura y el área de cada rectángulo, después contesten las preguntas.



Base _____	Base _____	Base _____	Base _____
Altura _____	Altura _____	Altura _____	Altura _____
Área _____ $u^2$	Área _____ $u^2$	Área _____ $u^2$	Área _____ $u^2$

- Si Laura continúa con este mismo diseño, ¿cuántas unidades cuadradas tendrá la figura 5?  
 \_\_\_\_\_
- ¿De qué manera se obtiene este resultado?  
 \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es la sucesión numérica para las bases de los primeros 5 rectángulos?  
 ¿Cuál es la sucesión numérica para las alturas de los primeros 5 rectángulos?  
 ¿Cuál es la expresión algebraica que representa la sucesión de las bases?  
 ¿Cuál es la expresión algebraica para la sucesión de las alturas?  
 ¿Cuál es la diferencia entre ellas?  
 \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es la sucesión numérica para las áreas de los rectángulos?  
 ¿Qué expresión algebraica proponen para que represente esta sucesión?  
 ¿Tiene el mismo exponente que las dos expresiones anteriores?  
 ¿Por qué ocurre esto?  
 ¿Qué procedimiento o estrategia deben seguir para calcular las dimensiones y el área de la figura 10?  
 \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es la regla que permite encontrar el área para cualquiera de las figuras? Descríbanla.  
 \_\_\_\_\_
- ¿Cómo pueden comprobar que la regla que describieron es correcta?  
 \_\_\_\_\_

b) Tomen como base la sucesión correspondiente al área de los rectángulos y registrenla en la tabla en la primera fila, luego, en la segunda fila, obtengan la diferencia entre cada número y su antecesor, y en la tercera columna repitan esta operación para los números obtenidos en la segunda fila.



- ¿Qué tienen de distinto la sucesión original y la segunda sucesión obtenida a partir de sus diferencias?  
 \_\_\_\_\_
- ¿Qué ocurrió con los números de la última fila?  
 ¿Por qué?  
 \_\_\_\_\_
- ¿Qué utilidad pueden tener estas diferencias?  
 \_\_\_\_\_

2. Comparen sus respuestas con las otras parejas y, con ayuda de su profesor, demuestren la veracidad de sus expresiones algebraicas, determinen las que consideren que son mejores y propongan una nueva estrategia para resolver este tipo de situaciones.



**PRACTICALO**



**Actividad 1.3**

- Diseñen su propia expresión cuadrática, encontrando una sucesión  $y$ , a partir de esta última, establezcan nuevamente la expresión cuadrática que plantearon originalmente.
  - Diseñen una ecuación cuadrática de la forma  $ax^2 + bx + c$ . Escríbanla.
  - Utilicen los números naturales a partir del 1 para sustituir los valores en su expresión y encuentren los primeros 5 términos de la sucesión. Regístenlos.
  - Tomen la sucesión y apliquen el método de diferencias para encontrar la expresión algebraica original.
    - ¿Coincidió con la que ustedes plantearon?
    - ¿Por qué ocurrió esto?
  - Determinen cuál es el valor de  $y$  cuando  $n$  vale 15?
  - Ahora seleccionen un valor superior a 20, calculen el valor de  $y$ , a partir de éste demuestren el valor que le dieron a  $n$ .
- Comparen su trabajo con el de otros equipos y, con su profesor, verifiquen que tanto sus estrategias como operaciones sean correctas. Repitan esta actividad en su cuaderno de manera individual y propongan sucesiones nuevas.

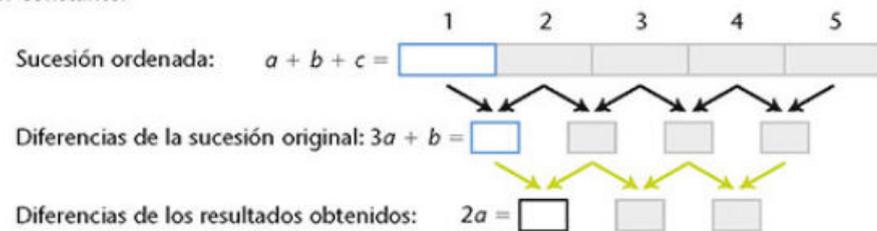


**PRACTICALO**



**Actividad 1.4**

- Observa la siguiente serie de sucesiones esquematizadas que te servirá para aprender a aplicar el método de diferencias.
  - Dada la sucesión 6, 15, 28, 45, 66..., ubícalos en el siguiente arreglo y completa los datos que faltan para obtener la sucesión de primer grado a partir de sus diferencias y que, a su vez, éstas te permitan obtener el valor constante.



- ¿Cuál de estas tres expresiones algebraicas es posible resolver de manera inmediata?
    - ¿Por qué no es posible resolver antes alguna de las otras dos?
  - Explica qué estrategia puedes utilizar para encontrar los valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$ , a partir de las ecuaciones dadas.
- b) Determina los valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$ .
- $2a =$  \_\_\_\_\_  $3a + b =$  \_\_\_\_\_  $a + b + c =$  \_\_\_\_\_
- Sustituye estos valores en la expresión  $ax^2 + bx + c$  ( ) $x^2 +$  ( ) $x +$  ( )

- Para comprobar si esta expresión algebraica es correcta para la sucesión 6, 15, 28, 45, 66..., completa la tabla.

x	( ) $x^2 +$ ( ) $x +$ ( )	y
1		
2		
3		
4		
5		

- ¿Qué valor toma  $y$  cuando  $n = 20$ ?
- Si  $y = 1326$ , ¿qué valor le corresponde a  $n$ ?
- ¿Cómo obtuviste el resultado?

- Comparte tus respuestas y procedimientos con algunos de tus compañeros y analiza los que ellos hicieron; elaboren una síntesis que explique, de forma breve, cómo se comprueba que la expresión obtenida es correcta. Pide a tu profesor que organice una lluvia de ideas para conocer si alguien propone algún método distinto.

**Para tener en cuenta**

El método de diferencias está dado por 3 expresiones algebraicas que se relacionan directamente con las sucesiones y las diferencias que derivan de ésta.

Es importante que recuerdes que la forma de una expresión algebraica de segundo grado completa, tiene la forma  $ax^2 + bx + c$  y está constituida por un término de segundo grado  $ax^2$ , un término de primer grado  $bx$  y un término independiente  $c$ .

Tu objetivo es encontrar los valores  $a$ ,  $b$ ,  $c$  para poder sustituirlos en la forma  $x^2 + bx + c$  y de esta manera obtener la expresión algebraica que representa la sucesión.

El método es:

- La expresión  $a + b + c$  se iguala al primer término de la sucesión original.
- La expresión  $3a + b$  se iguala con el primer término de la sucesión de primer grado obtenida en las primeras diferencias.
- La expresión  $2a$  se iguala al término constante obtenido a partir de las diferencias de la sucesión de primer grado obtenida anteriormente.

Una vez obtenida la expresión, es posible calcular cualquiera de sus términos (enésimo); simplemente debes sustituir el número progresivo del cual deseas conocer su valor y resolver la operación; por ejemplo, para los valores 1, 2, 3 y  $n$  en la expresión  $x^2 + x + 1$  son 3, 7, 13 y  $n^2 + n + 1$ , donde  $n$  representa el número.



**PRACTICALO**



**Actividad 1.5**

1. Resuelvan la siguiente actividad.

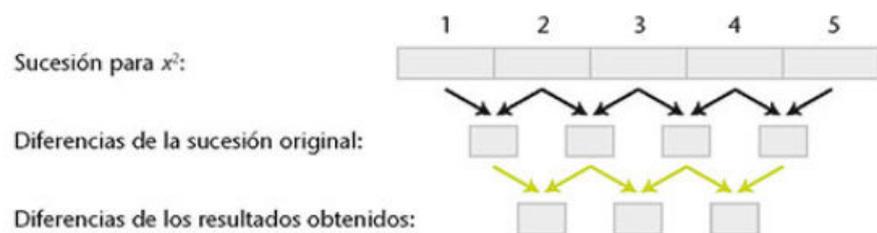
a) En cada sección de la siguiente tabla se encuentra una expresión cuadrática y debajo de ella un conjunto de valores para la  $x$ . Obtengan los valores de las columnas correspondientes a  $y$ , con ello podrán formar tres sucesiones con 5 números cada una.

$x$	$x^2$	$y$
1		
2		
3	$(3)^2$	9
4		
5		

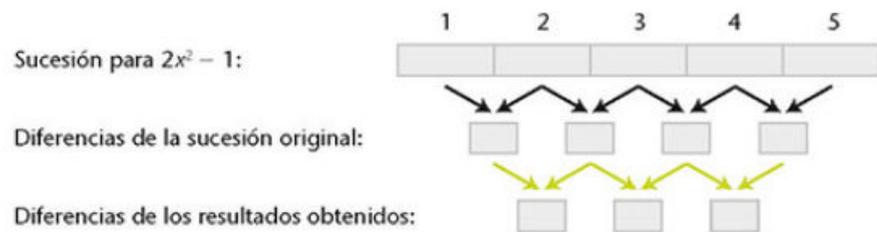
$x$	$2x^2 - 1$	$y$
1		
2		
3		
4		
5	$2(5)^2 - 1$	49

$x$	$x^2 + 2x + 3$	$y$
1		
2		
3	$(3)^2 + 2(3) + 3$	18
4		
5		

b) Con los valores de  $y$  formen sucesiones y completen los recuadros obteniendo las diferencias como lo realizaron en la actividad anterior.

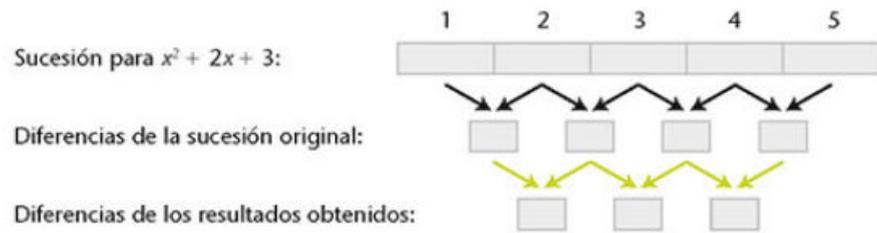


• ¿Cuál es el valor de la diferencia en los resultados obtenidos? \_\_\_\_\_



• ¿Cómo lo determinaron? \_\_\_\_\_

• ¿Cuál es el valor de las diferencias del tercer renglón? \_\_\_\_\_



• ¿Cuál es la expresión algebraica que representa los valores de las diferencias de la sucesión original? \_\_\_\_\_

• ¿Cómo la determinaron? \_\_\_\_\_

• ¿Cuál es el valor de las diferencias del tercer renglón? \_\_\_\_\_

2. Analicen sus resultados con algunas otras parejas y examinen los primeros términos de cada renglón con la función de la que provienen y elaboren una hipótesis que explique de qué manera consideran que están relacionados.

**Glosario**

**Hipótesis.** Es una frase que afirma una suposición que tiene cierto grado de credibilidad, debe ponerse a prueba para verificar su validez y si se cumple se puede convertir en una tesis o teorema confirmado por datos verídicos reales.

**Para leer más**

Para determinar que una sucesión está basada en una expresión algebraica de segundo grado es necesario observar tres aspectos:

1. No es posible determinar su expresión algebraica de manera directa como con una sucesión de primer grado.
2. Las primeras diferencias entre sí son números distintos, sin embargo presentan una regularidad como las expresiones algebraicas de primer grado.
3. Las diferencias obtenidas de las anteriores forman una sucesión de una constante, es decir, de un mismo número.



**LO QUE APRENDÍ**



1. Examina la sucesión dada y calcula los datos que se piden 3, 4, 7, 12, 19...

• ¿Cuáles son respectivamente los términos 6 y 7 de esta sucesión? \_\_\_\_\_

• Escribe en tu cuaderno las operaciones que llevaste a cabo.

• ¿Cuál es la expresión algebraica que representa esta sucesión? \_\_\_\_\_

• ¿Cuál es el valor del vigésimo término de esta sucesión? \_\_\_\_\_

• ¿En qué lugar de esta sucesión se encuentra el número 960? \_\_\_\_\_

• Comprueba la expresión algebraica de esta sucesión. Escribe la sustitución y las operaciones para los primeros tres números.

Para  $x = 1$  \_\_\_\_\_

Para  $x = 2$  \_\_\_\_\_

Para  $x = 3$  \_\_\_\_\_

2. Ahora diseña una expresión algebraica similar a la que encontraste y obtén los primeros términos que te permitan llevar a cabo el proceso para determinar los coeficientes y comprobar que tus algoritmos son correctos.

3. Comparte tus resultados con algunos compañeros, analicen sus expresiones algebraicas. Con la ayuda de su profesor seleccionen, clasifiquen los tipos de ecuaciones utilizadas y organicen una lluvia de ideas para conocer si consideran que existe otra manera de resolver este tipo de situaciones.

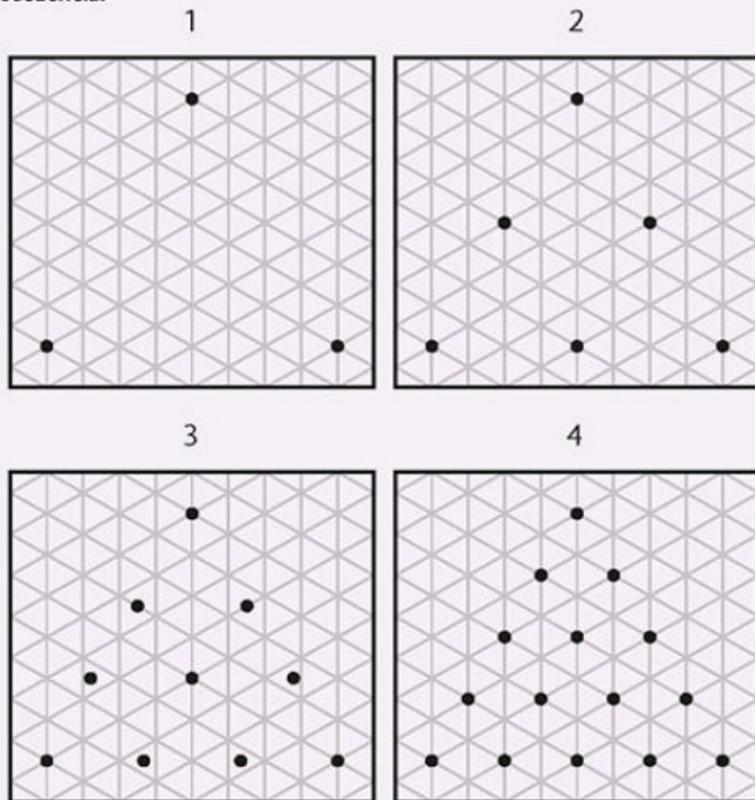
**USA LAS TIC**



Visita la página <https://www.easycalculation.com/es/algebra/arithmetic-progression.php> (Consultada el día 5 de diciembre de 2016, a las 16:03 horas), en la que encontrarás un programa interactivo en el que al cargar una sucesión, te muestra la expresión algebraica que la representa, además, construirá la sucesión y podrás observar gráficamente la línea que le corresponde. Este proceso te servirá para plantear nuevas situaciones y comprobar las que ya estudiaste, ofreciéndote una idea más clara de este tema. Después de tu visita, elabora en tu cuaderno un comentario acerca de las ventajas de utilizar este tipo de recursos, en qué te ayudó. De ser posible compártelo y coméntalo frente al grupo bajo la coordinación del profesor.

**Desarrolla tus habilidades**

1. En un libro de juegos mentales, Arturo cortó algunas fichas que forman una secuencia.



a) Reúnanse en equipos, analicen las fichas y respondan las preguntas:

- ¿Cuál es la serie que se forma? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es la expresión algebraica que la representa? \_\_\_\_\_
- ¿De qué manera determinaron esta expresión? \_\_\_\_\_
- Si, en total, la serie está formada por 10 fichas, ¿cuántos puntos contiene? \_\_\_\_\_

2. Comparen sus respuestas con las de sus compañeros y, con la ayuda de su profesor, demuestren que su expresión es correcta y determinen si hay alguna otra manera de resolver esta situación.

Eje temático	Forma, espacio y medida
Tema	Figuras y cuerpos
Contenido 2	Análisis de las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo. Construcción de desarrollos planos de conos y cilindros rectos.



**ACUÉRDATE DE...**



1. Realicen la siguiente actividad y contesten las preguntas.

Tengan a la mano tres palos de madera (como los que se usan en las banderas pequeñas), hojas de colores, tijeras, un lápiz, su juego de geometría y cinta adhesiva.

- a) Corten una semicircunferencia, un triángulo rectángulo y un rectángulo.
- b) Peguen el rectángulo a uno de los palos, peguen el triángulo por alguno de sus lados menores y también la semicircunferencia por su diámetro.
- c) Ahora giren las figuras y analicen las figuras que forman y las características que presentan.



- ¿Qué tipo de sólido se visualiza cuando se gira una circunferencia sobre su propio eje? \_\_\_\_\_
- ¿Qué cuerpo se visualiza al girar el triángulo? \_\_\_\_\_  
¿Y al girar el rectángulo? \_\_\_\_\_
- ¿En qué se transforman los lados de estas figuras planas? \_\_\_\_\_  
Justifiquen su respuesta. \_\_\_\_\_
- ¿Cuál de estas tres figuras consideran que al ser giradas crea la figura con mayor volumen? \_\_\_\_\_  
¿Por qué? \_\_\_\_\_

2. Comparen sus respuestas con las de otras parejas y, en conjunto con el profesor, elaboren su propia descripción que responda la pregunta, ¿qué es un sólido de revolución? Elaboren una explicación breve de la relación que hay entre los lados de una figura plana y la superficie del sólido que forman al girar sobre un eje.

**Para leer más**

Seguramente, al escuchar la palabra *Revolución* tu mente evoca el movimiento armado del 20 de noviembre de 1910, con lo cual recurras a su definición como cambio violento en las instituciones políticas, sociales y económicas de una nación; pero además, el término tiene significado científico, industrial y, por supuesto, tecnológico. En mecánica, esta palabra se utiliza para indicar el número de vueltas que da una pieza sobre su eje, es una unidad de frecuencia. En matemáticas, una revolución se define como una rotación de  $360^\circ$ , es decir, una vuelta completa que da un objeto sobre un eje hasta llegar a su posición de inicio.

**Glosario**

**Generatriz.** Son las líneas formadas por los lados de un polígono (rectángulo y triángulo rectángulo) que al girar sobre un eje generan el cono o el cilindro.



**PRACTÍCALO**

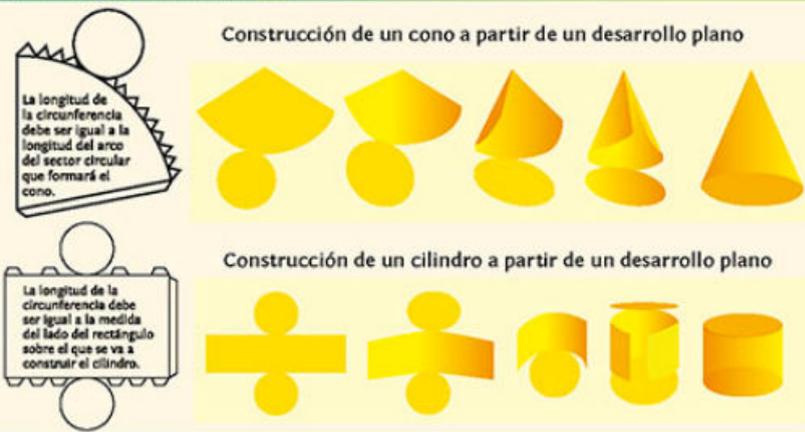


**Actividad 2.1**

1. Tomando como base las figuras planas de la actividad anterior, dibujen en su cuaderno los sólidos que se forman si se realiza la rotación de la **generatriz** bajo las siguientes condiciones:

- Si se gira un triángulo rectángulo tomando como eje el cateto de mayor tamaño y otro si se toma como eje el cateto menor.
  - Si se gira un rectángulo tomando como eje su base y otro tomando como eje su altura.
  - Si se gira una circunferencia sobre un diámetro horizontal y otro tomando como eje un diámetro vertical.
    - ¿Cuál es la diferencia entre las figuras formadas? \_\_\_\_\_
    - ¿Qué ocurrió en el caso del círculo? \_\_\_\_\_
    - Al comparar los sólidos formados por el triángulo y el rectángulo, ¿consideran que tienen el mismo volumen? \_\_\_\_\_
- ¿Qué hubiera ocurrido con la figura de revolución formada si en lugar de pegar el rectángulo por el lado mayor se hubiera pegado por el menor? \_\_\_\_\_
- ¿Existirá alguna otra manera de generar un cilindro? \_\_\_\_\_
- ¿Es posible generar una esfera al revolucionar alguna otra figura? \_\_\_\_\_
2. Comparen sus resultados con los de sus compañeros y con la asesoría del profesor determinen, ¿cuáles son las características de los sólidos que se forman cuando se giran figuras planas con lados rectos, si se toman como ejes cada uno de sus lados? ¿De qué manera se relacionan las medidas de los lados de las figuras planas con las dimensiones de las figuras de revolución que forman?

Para tener en cuenta



PRACTICALO



Actividad 2.2

- Diseñen una estrategia, determinen las dimensiones y construyan un cono y un cilindro con una hoja de papel. Consideren las indicaciones de la sección anterior, "Para tener en cuenta".
  - ¿Cuál fue la estrategia que diseñaron para la construcción de estas figuras?
    - ¿Qué estrategia utilizaron para hacer coincidir las longitudes de la circunferencia y la del sector circular al formar el cono? \_\_\_\_\_
    - ¿De qué manera lograron que coincidiera la longitud de la circunferencia con el lado del rectángulo en la construcción del cilindro? \_\_\_\_\_
  - ¿Cómo determinaron la altura de cada figura? \_\_\_\_\_
  - ¿Cuáles son las características que se deben considerar para poder realizar la construcción de un cono y de un cilindro? \_\_\_\_\_



PRACTICALO



Actividad 2.3

Consigna 3 bloques de plastilina de diferentes colores y un hilo de material resistente, o bien, un objeto que les permita realizar cortes sobre la plastilina. Tomen cada uno de los bloques de plastilina, córtelos en 3 partes de diferentes tamaños y con ellos formen 3 cilindros, 3 conos y 3 esferas, todos con diferentes dimensiones.

- Cilindros.
  - Corten el primer cilindro a la mitad por el largo.
    - ¿Qué figura se obtiene al realizar el corte? \_\_\_\_\_
    - ¿Qué relación tiene esta figura con la superficie que forma el área de la base del cilindro? ¿Por qué? \_\_\_\_\_
  - Corten el segundo cilindro a la mitad, partiendo de alguna de sus caras circulares.
    - ¿Qué figura se obtiene al realizar el corte? \_\_\_\_\_
    - ¿Qué relación tienen las dimensiones de esta figura con las dimensiones del cilindro? \_\_\_\_\_
  - Corten el tercer cilindro de manera oblicua, a lo largo, sin tocar su base.
    - ¿Qué figura se formó al realizar el corte? \_\_\_\_\_
    - ¿Tiene esta figura alguna relación con el cilindro o el rectángulo que lo genera? \_\_\_\_\_
 Justifiquen su respuesta. \_\_\_\_\_
- Conos.
  - Realicen un corte en el primer cono de manera paralela a la superficie de la base, aproximadamente a la mitad de su altura.
    - ¿Qué figura se forma al realizar el corte? \_\_\_\_\_
    - ¿Se formará la misma figura si el corte se realiza a una altura mayor o menor a la que utilizaron? \_\_\_\_\_ ¿Por qué ocurre? \_\_\_\_\_
    - ¿Qué diferencia hay entre las figuras formadas en cortes a diferente altura? \_\_\_\_\_
  - Corten el segundo cono exactamente a la mitad sobre su altura.
    - ¿Qué figura se forma al realizar el corte? \_\_\_\_\_
    - ¿Qué relación tienen las dimensiones de esta figura con el cono? \_\_\_\_\_
  - Corten el tercer cono de manera oblicua, sin llegar a la base circular, y luego repitan este corte, pero ahora dividiendo también el área de la base.
    - Al realizar el primer corte, ¿qué figura se forma? \_\_\_\_\_
    - Al realizar el segundo corte, ¿qué figura se forma? \_\_\_\_\_
    - ¿Qué diferencia hay entre estas dos figuras? \_\_\_\_\_
    - ¿Tienen alguna relación estas figuras con el cono o el triángulo que lo genera? \_\_\_\_\_ ¿Por qué? \_\_\_\_\_
- Esferas.
  - Realicen un corte de la primera esfera exactamente a la mitad.
    - ¿Qué figura se forma al realizar el corte? \_\_\_\_\_
    - ¿Qué relación tienen las dimensiones de esta figura con las dimensiones de la esfera? \_\_\_\_\_
  - Realicen un corte en la segunda esfera que no la divida por la mitad.
    - ¿Se formó una figura distinta a la obtenida en el corte anterior? \_\_\_\_\_
    - ¿Por qué ocurre esto? \_\_\_\_\_

- c) Realicen en la tercera esfera un corte que tenga una forma distinta a las anteriores
  - ¿Fue posible realizar un corte distinto? \_\_\_\_\_
  - ¿Por qué ocurrió esto? \_\_\_\_\_
- 4. Contrasten sus respuestas con las de otros equipos cercanos y examinen las justificaciones que elaboraron, determinando: ¿qué sólidos se pueden formar si estas líneas se hacen girar sobre un eje? Anoten sus conclusiones en su cuaderno.



**PRACTÍCALO**



**Actividad 2.4**

En la vida cotidiana se pueden encontrar muchos objetos que tienen como base algún cuerpo de revolución, como la lámpara de mesa que Luis acaba de comprar y piensa poner a un lado su cama.

1. Analicen la imagen y respondan las preguntas.

- ¿Cuál es la figura plana que se debe girar para poder obtener la pantalla de la lámpara? \_\_\_\_\_
- Dibujen en su cuaderno, la imagen junto con el eje de revolución.
- ¿Es posible obtener esta figura a partir de un cono? \_\_\_\_\_  
Expliquen su respuesta. \_\_\_\_\_
- ¿Qué figura se debe hacer girar para obtener el soporte de la lámpara? \_\_\_\_\_
- ¿Qué figura se debe hacer girar para obtener la base? \_\_\_\_\_
- Dibujen en su cuaderno, las figuras que dan origen al soporte y a la base



**Glosario**

**Cono truncado.** Es un sólido que se forma al girar un trapecio rectángulo sobre el lado que tiene en sus extremos los ángulos rectos. Semeja el "corte" realizado en un cono de forma paralela a su base.

- ¿Cuál es la diferencia entre las figuras planas que forman el soporte y la base? \_\_\_\_\_

2. Comparen sus respuestas e identifiquen y analicen las características de un **cono truncado**. ¿Cuáles son las diferencias en las dimensiones del rectángulo y la ubicación en el eje de rotación para formar cilindros similares a la base y el soporte de la lámpara?



**PRACTÍCALO**



**Actividad 2.5**

Uno de los deportes más conocidos en el mundo es el fútbol, del cual existen dos tipos: el soccer y el americano.

1. Analiza los balones que utiliza cada uno de estos deportes, y responde las preguntas.
- ¿Consideras que el balón de soccer es una esfera? \_\_\_\_\_  
Justifica tu respuesta. \_\_\_\_\_
  - ¿Qué figura es necesario hacer girar para visualizar un balón de soccer? \_\_\_\_\_



- ¿Qué figuras forman la superficie del balón de soccer? \_\_\_\_\_
- ¿Qué figura habrá que hacer girar para visualizar un balón de americano? \_\_\_\_\_
- ¿Consideras que únicamente con una figura plana se puede obtener la forma del balón de americano o su forma se debe a una combinación de varias figuras planas? Argumenta tu respuesta. \_\_\_\_\_
- Dibuja en tu cuaderno, la o las figuras que se deben hacer girar para obtener la forma de un balón de americano.

2. En forma grupal determinen, ¿cómo influye que una esfera esté compuesta por pentágonos y hexágonos al tratar de formar una esfera? y ¿cómo son la o las figuras planas que generan un ovoide como el balón de americano?



**PRACTÍCALO**

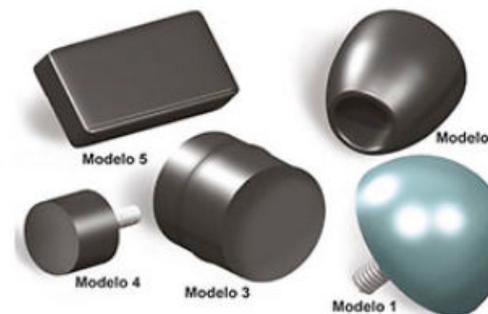


**Actividad 2.6**

Otro ejemplo del uso de las figuras de revolución en la vida cotidiana, es en una empresa donde fabrican toques para muebles.

1. Analicen los modelos de toques para muebles que se muestran en la imagen y respondan las preguntas.

- ¿Cuál es el modelo de toque que se puede obtener teniendo como base una sola figura de revolución? \_\_\_\_\_
- ¿Qué figura se utilizó como base para crear el modelo 3? \_\_\_\_\_
- ¿Cuántas figuras se necesitan para que, al girarlas sobre el eje de rotación, se forme el modelo 1? \_\_\_\_\_
- Dibujen en su cuaderno la forma base y el eje.
- ¿Cuántas figuras se necesitan para que al girarlas sobre el eje de rotación se forme el modelo 2? \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_ Dibujen la forma base y el eje.



2. Comenten al grupo, ¿qué ocurre al combinar dos o más figuras base cuando se genera un sólido de revolución? Anoten en su cuaderno sus conclusiones.

**Para leer más**

Cuando un cono se corta en varias secciones éstas siempre forman alguna curva cerrada o abierta; estas curvas reciben el nombre de cónicas y pueden formar una parábola, circunferencia, elipse o hipérbola.



Parábola



Circunferencia



Elipse



Hipérbola

**Para tener en cuenta**

Los poliedros y los cuerpos de revolución son cuerpos con volumen, sin embargo, son distintos entre sí, la principal diferencia es que un poliedro está constituido por caras planas y un sólido de revolución tiene una o varias caras curvas.



**LO QUE APRENDÍ**



El empleo de objetos que tienen alguna relación con los cuerpos de revolución nos permite su observación en varios contextos de la vida cotidiana.

1. Analiza las siguientes figuras, realiza tu propia clasificación y, sobre las líneas, anota el nombre del objeto y marca la opción "sí" o "no", dependiendo de si es un cuerpo de revolución perfecto, es decir, sin salientes ni asas.



Sí  No

Sí  No

Sí  No

Sí  No



Sí  No

Sí  No

Sí  No

Sí  No

a) ¿Alguno de los objetos mostrados son cuerpos de revolución perfectos? \_\_\_\_\_

- De ser así, anota cuáles son. \_\_\_\_\_
- ¿Qué objetos tienen como base al cono? \_\_\_\_\_
- ¿Qué objetos tienen como base un cilindro? \_\_\_\_\_
- ¿Qué objetos tienen como base una esfera? \_\_\_\_\_
- ¿Cuáles objetos presentan una combinación de figuras? \_\_\_\_\_

b) Traza en tu cuaderno el eje de rotación y la figura base que permite formar estos mismos objetos.

- ¿Qué estrategia utilizaste para determinar las figuras base? \_\_\_\_\_
- ¿Cómo determinaste la posición y la longitud del eje de rotación? \_\_\_\_\_
- ¿Cómo contrastaste la figura base para los sólidos que requieren dos o más formas básicas? \_\_\_\_\_

- ¿Es posible obtener estas figuras utilizando un procedimiento distinto? \_\_\_\_\_  
Justifica tu respuesta. \_\_\_\_\_
- Si tuvieras físicamente uno de estos sólidos, ¿cómo podrías trazar de manera real la figura base que le dio origen? \_\_\_\_\_

2. Compara tus resultados y tus trazos con los de tus compañeros y, con la ayuda del profesor, determina cuál es la utilidad de los sólidos de revolución en la vida cotidiana.

**Desarrolla tus habilidades**

En una fábrica de artículos de plástico están estudiando algunos objetos con la intención de elaborar nuevos diseños.

1. Reúnanse en equipos y analicen los nombres que contiene el recuadro mostrado. Establezcan su relación con los sólidos de revolución, determinando qué sólido o combinación de ellos dio su origen.

Vaso    Bandeja    Plato    Fuente

          Cazuela    Cubo

                  Botella

Lata    Cuchara    Sifón    Jarra    Tonel

- ¿Cuáles objetos tienen como base una figura pura como un triángulo, rectángulo o círculo? \_\_\_\_\_
  - ¿Cuáles objetos consideras están formados por una combinación de formas básicas? \_\_\_\_\_
  - ¿Qué objetos no pertenecen a una figura de revolución? \_\_\_\_\_
2. Contrasten sus respuestas con la de otros equipos y con la ayuda del profesor concluyan cuáles son las características de estos objetos que permiten determinar si son o no figuras de revolución.

**USA LAS TIC**



Visita la página <http://conteni2.educarex.es/mats/12002/contenido/> (Consultada el día 22 de enero de 2017, a las 17:18 horas), en la que encontrarás la posibilidad de estudiar, de manera interactiva, todo lo relacionado con los cuerpos de revolución. Durante tu visita contrasta lo que aprendiste en este contenido con la forma en que ahí se expone, utiliza las herramientas que aparecen para reafirmar tus conceptos e ideas acerca de este tema.

Eje temático	Forma, espacio y medida
Tema	Medida
Contenido 3	Análisis de las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente.

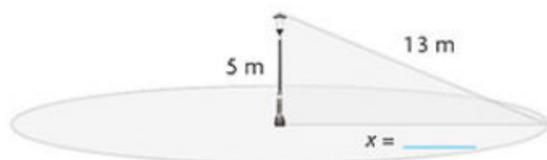


ACUÉRDATE DE...



1. Analicen y resuelvan la siguiente situación.

a) El papá de Juan Carlos es ingeniero y trabaja en alumbrado público; actualmente está colocando postes de luz en un parque y desea conocer la superficie que puede alumbrar con los nuevos postes que está instalando. Conoce la distancia de la proyección de la sombra a partir del foco y la altura del poste, ¿cómo puede conocer la superficie total que puede alumbrar? Analicen el esquema y respondan las preguntas.



- ¿Qué procedimiento puede utilizar el ingeniero para conocer la superficie total que podría iluminar con cada poste? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es el valor del cateto  $x$ ? \_\_\_\_\_
- ¿Qué valor tiene la hipotenusa del triángulo rectángulo? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es la expresión algebraica que modela esta situación? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es la condición que permite afirmar que la altura del poste es uno de los catetos del triángulo rectángulo? \_\_\_\_\_
- ¿Qué operación permite encontrar el área total que alumbrada cada poste? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es el área total iluminada? \_\_\_\_\_

2. Contrasten sus estrategias y procedimientos con los de otros equipos y con la asesoría del profesor determinen cuál estrategia es la más adecuada para solucionar este problema. Comenten si es que hay algún otro procedimiento que pudieran emplear, de ser así demuestren la conveniencia del que consideren mejor.



PRACTÍCALO



Actividad 3.1

1. Lean y contesten las preguntas con base en la situación dada.

a) El papá de Juan Carlos ahora está instalando postes en la plaza central del parque y necesita que éstos iluminen una superficie más pequeña con un radio de 10 m y sabe también que la luz, para que llegue de manera óptima, debe tener un ángulo de  $30^\circ$ , entonces, ¿cuál es la altura que deben tener los postes?



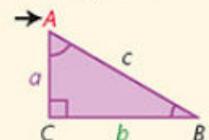
- Diseñen una estrategia para solucionar este problema y escribanla. \_\_\_\_\_
- ¿Es posible utilizar el teorema de Pitágoras? \_\_\_\_\_ Justifiquen su respuesta. \_\_\_\_\_
- ¿Consideran que los datos dados son los necesarios o hacen falta? \_\_\_\_\_ Justifiquen su respuesta. \_\_\_\_\_
- ¿Cuál consideran que es el valor de  $x$ ? \_\_\_\_\_
- ¿Cómo pueden comprobar que el resultado es correcto? \_\_\_\_\_

2. Examinen y contrasten sus procedimientos con los propuestos por alguna otra pareja y con la ayuda del profesor analicen algunos de ellas, los resultados obtenidos y comprueben sus hipótesis, planeamientos y soluciones.

Para tener en cuenta

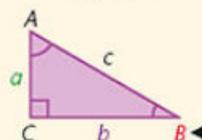
En un triángulo rectángulo los catetos se clasifican en opuestos y adyacentes, dependiendo del ángulo agudo que se tome como referencia. Si el cateto está formando el ángulo de referencia, entonces es adyacente; si el cateto no forma el ángulo de referencia, entonces es opuesto a él.

Figura 1



- $a$  Es el cateto adyacente del ángulo  $A$
- $b$  Es el cateto opuesto del ángulo  $A$

Figura 2



- $a$  Es el cateto opuesto del ángulo  $B$
- $b$  Es el cateto adyacente del ángulo  $B$



PRACTÍCALO



Actividad 3.2

1. Utilizando **trigonometría**, analicen la situación planteada y respondan las preguntas.

- Con la regla del juego de geometría, tomen las medidas de los lados de cada triángulo mostrado en la imagen y registrenlas sobre la línea que les corresponda.
- Con su transportador midan los ángulos y registren su amplitud en el lugar correspondiente a cada uno.

**Glosario**

**Trigonometría.** Es la parte de las matemáticas, dependiente de la geometría, que estudia los triángulos y se ocupa del cálculo de sus 6 elementos y las relaciones que se dan entre ellos (tres ángulos y tres lados); por lo tanto, resolver un triángulo significa conocer estas 6 magnitudes.

Figura 1

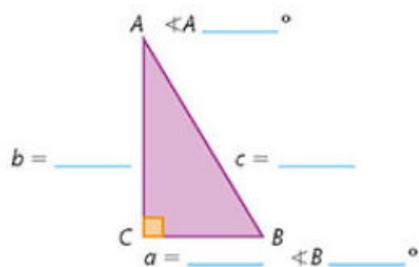


Figura 2

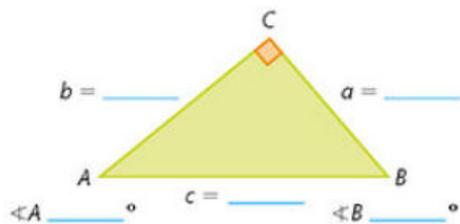
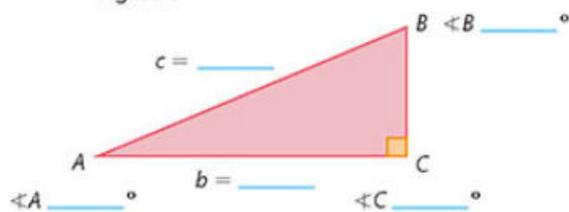


Figura 3



c) Completen la tabla con los datos que obtuvieron para cada triángulo.

Figura	Cateto adyacente (ca) al $\sphericalangle A$	Cateto opuesto (co) al $\sphericalangle A$	Hipotenusa (Hip)	Cateto adyacente (ca) al $\sphericalangle B$	Cateto opuesto (co) al $\sphericalangle B$	Hipotenusa (Hip)
1						
2						
3						

d) Con los datos de la tabla anterior, completen esta nueva tabla.

Figura	Para el ángulo A			Para el ángulo B		
	$\frac{co}{Hip}$	$\frac{ca}{Hip}$	$\frac{co}{ca}$	$\frac{co}{Hip}$	$\frac{ca}{Hip}$	$\frac{co}{ca}$
1						
2						
3						

• ¿Qué relación pueden encontrar entre las funciones trigonométricas que obtuvieron al comparar los resultados para ambos ángulos?

• De los resultados que obtuvieron expresados en forma decimal, ¿qué funciones dan como resultado un número menor que uno?

¿Por qué ocurre esto?

• ¿Cuál función da como resultado un número mayor que 1? ¿Por qué ocurre esto?

• Esta relación que encontraron entre los números decimales, ¿se observa igual para ambos ángulos? Justifiquen su respuesta.

2. Comparen sus resultados, y con su profesor diseñen una estrategia que les permita recordar fácilmente el nombre de las funciones y su equivalencia en relación con los catetos, por ejemplo: la función seno es igual al cociente obtenido al dividir el cateto opuesto sobre la hipotenusa.

Para leer más

Al cociente entre el cateto opuesto y la hipotenusa se le conoce como función seno y se abrevia *sen*.

Al cociente entre el cateto adyacente y la hipotenusa se le conoce como función coseno, y se abrevia *cos*.

Al cociente entre el cateto adyacente y el cateto opuesto se le conoce como función tangente y se abrevia *tan*. Éstas son las principales funciones de la trigonometría aplicadas a un triángulo rectángulo.



PRACTICALO



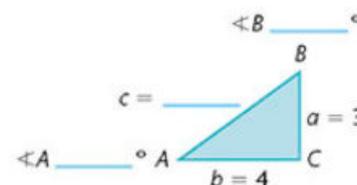
Actividad 3.3

1. Reflexiona sobre la situación planteada, analiza los triángulos dados y determina las funciones trigonométricas para los ángulos agudos.

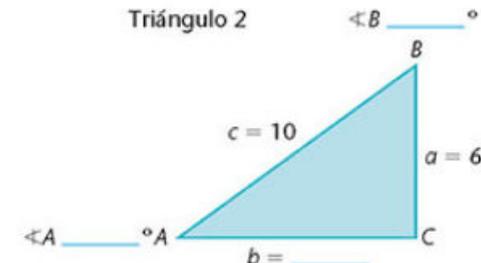
El profesor de matemáticas de Juan Carlos les pidió a sus alumnos que encontraran una manera de plantear las funciones trigonométricas de dos triángulos rectángulos, para ello trazó en el pizarrón las siguientes figuras.

a) Completa los datos que faltan y responde las preguntas que se plantean a continuación.

Triángulo 1



Triángulo 2



- ¿Cómo determinaste la medida de la hipotenusa del triángulo 1?
- ¿Cómo determinaste la medida del cateto *b* en el triángulo 2?
- ¿Cómo encontraste la medida de los ángulos agudos de ambos triángulos?

b) Con los datos anteriores como referencia, completa la tabla para las funciones trigonométricas de los ángulos agudos de ambos triángulos. Considera que se debe anotar siempre primero la función trigonométrica y el ángulo para obtener su equivalencia.

Triángulo	Seno		Coseno		Tangente	
1	senA =	senB =	cosA =	cosB =	tanA =	tanB =
2	senA =	senB =	cosA =	cosB =	tanA =	tanB =

- ¿Qué relación puedes determinar entre las medidas de los lados de ambos triángulos?
- ¿Esta relación se ve reflejada en los cocientes de las funciones trigonométricas que obtuviste en la tabla? ¿A qué se debe esto?
- ¿Puedes establecer alguna relación de equivalencia entre las funciones trigonométricas para los ángulos de cada triángulo? De ser así, ¿cuál es la relación?

2. Compara tus respuestas con las de tus compañeros y con la ayuda del profesor determinen: ¿qué relaciones de equivalencia hay entre las funciones trigonométricas de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo?, ¿qué relación hay entre las funciones trigonométricas si se comparan dos triángulos que son semejantes?

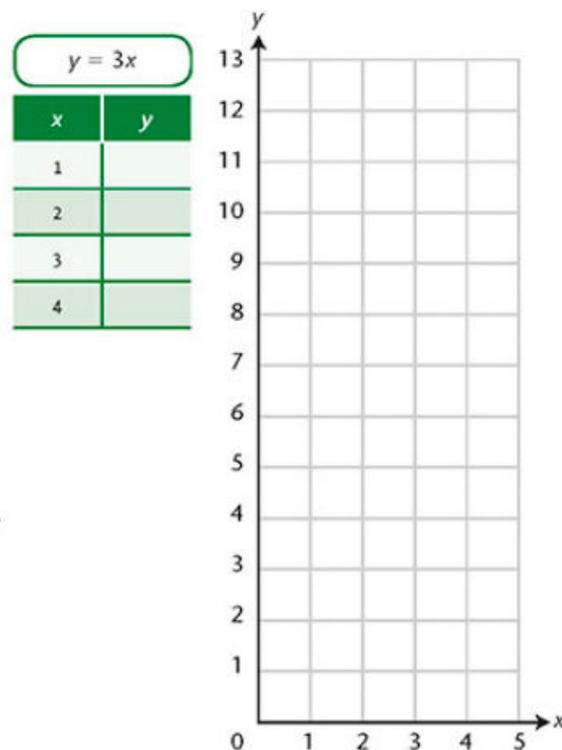
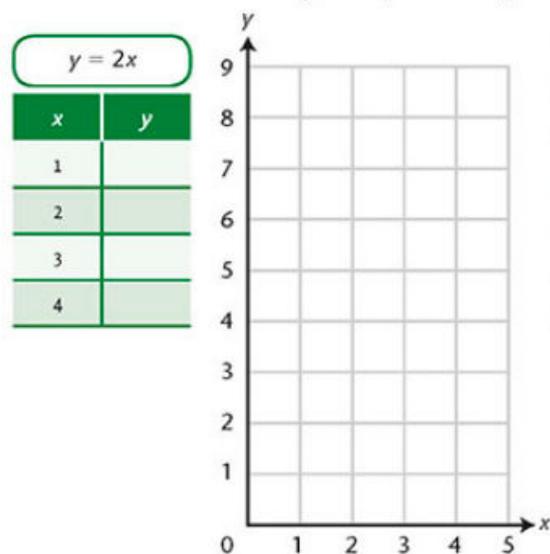


**PRACTICALO**



**Actividad 3.4**

1. Dentro del recuadro se encuentran dos funciones, obtengan los valores indicados en la tabla para y, y con estas coordenadas tracen la gráfica que le corresponde.



a) Tomen como punto de referencia la última coordenada, y con ella tracen una línea paralela al eje y hasta llegar al eje x para formar un triángulo rectángulo.

- ¿Cuánto mide la base del triángulo?
- ¿Cuánto mide la altura?
- Tomando como referencia el ángulo cuyo vértice es el origen, ¿qué representan la base, el cateto opuesto, el adyacente y la hipotenusa del triángulo?
- ¿Qué representa la altura?
- ¿Cuál es la razón tangente entre estas dos cantidades para la función  $y = 2x$ ?
- ¿Cuál es el cociente de esta división?
- ¿Qué relación tiene esta cantidad con la función dada?
- ¿Ocurre esta misma relación para la función  $y = 3x$ ? Expliquen por qué se presenta esto.

• En sus propias palabras, ¿cuál es la relación entre la función tangente con la función algebraica que representa la recta?

b) Planteen una función similar a éstas y comprueben que su conclusión es correcta.

2. Comparen sus resultados con los de otras parejas y con la ayuda del profesor elaboren en su cuaderno una definición formal para explicar la relación entre la tangente y la pendiente de una recta, comenten si consideran que es posible explicar esta relación de alguna manera distinta.



**PRACTICALO**



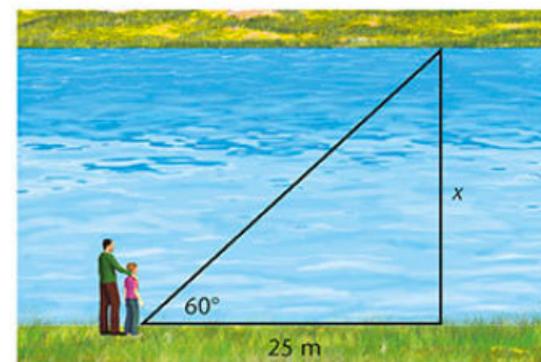
**Actividad 3.5**

En la vida cotidiana, conocer las funciones trigonométricas tiene muchas aplicaciones ya que ellas trabajan directamente en triángulos rectángulos cuando éstos no tienen todos los datos para aplicar directamente el teorema de Pitágoras.

1. Analicen la siguiente situación y respondan las preguntas.

a) El sábado pasado Diana acompañó a su papá al trabajo, él es ingeniero civil y está construyendo un puente sobre un río. Al ver este problema le preguntó a ella, ¿cómo puedo conocer el ancho del río si sólo puedo tomar las medidas desde uno de los lados?

- ¿Ustedes, qué hubieran contestado?



b) Desde un lado del río, el ingeniero pudo tomar dos medidas, una distancia de 25 m y el ángulo hasta una línea imaginaria perpendicular que representa el ancho del río (x).

- Si la tangente de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo, es igual al cociente entre el cateto opuesto y el cateto adyacente, ¿qué representa la x?
- Entonces, ¿qué representa el lado que mide 25 m? Por lo tanto, ¿cómo se debe expresar la función trigonométrica?

- ¿Cómo podemos plantear esta expresión para encontrar el valor de  $x$ ? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es la tangente de  $60^\circ$ ? Obtengan el resultado con ayuda de la calculadora. \_\_\_\_\_  
Entonces, ¿cuánto mide el ancho del río? \_\_\_\_\_
- Para resolver totalmente el triángulo rectángulo, ¿cuánto mide el otro ángulo agudo? \_\_\_\_\_  
¿Cómo calcularon este dato? \_\_\_\_\_
- ¿Cuánto mide la hipotenusa? \_\_\_\_\_ ¿Qué estrategia utilizaron? \_\_\_\_\_

2. Consensúen, de forma grupal, ¿cómo se realiza el planteamiento de una expresión trigonométrica cuando sólo se tienen como datos uno de los catetos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo, y el otro cateto representa una incógnita? Describan cuál es el algoritmo (incluyendo el uso de la calculadora) que se debe llevar a cabo cuando la incógnita está en el numerador de la razón.

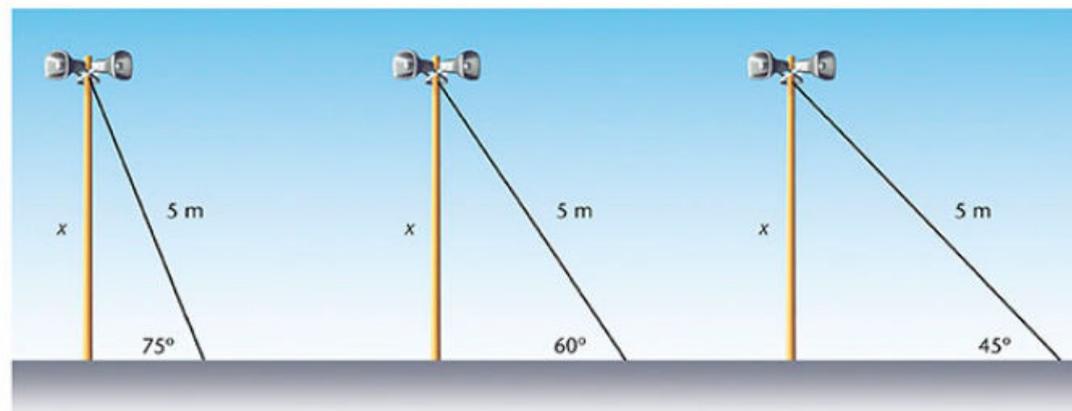


**PRACTICALO**



**Actividad 3.6**

- En un estadio de fútbol se están colocando bocinas en la parte alta de las gradas, los tensores que están utilizando para fijarlas tienen la misma longitud y es necesario investigar: ¿cuál es la altura que pueden tener los postes que soportarán las bocinas?
  - Analicen el esquema y, con base en los datos dados encuentren el valor de la altura para los 3 postes.



- ¿Qué representa la altura de cada poste, tomando como base el ángulo agudo conocido de cada triángulo, el cateto opuesto, el adyacente o la hipotenusa? \_\_\_\_\_
- ¿Qué representa el cable tensor de 5 m? \_\_\_\_\_
- Entonces, ¿qué función trigonométrica relaciona estas cantidades? \_\_\_\_\_
- ¿Cómo se expresa esta función para el ángulo de  $75^\circ$ ? \_\_\_\_\_
- ¿Cómo se expresa para el ángulo de  $60^\circ$ ? \_\_\_\_\_
- ¿Cómo se expresa para el de  $45^\circ$ ? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es el valor de la altura del primer poste? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es la altura del segundo poste? \_\_\_\_\_
- ¿Qué altura tiene el tercero? \_\_\_\_\_

- ¿Qué operaciones hay que realizar para encontrar el valor de cada  $x$ ? \_\_\_\_\_
- ¿Qué relación se puede establecer entre el ángulo dado y la altura de los postes? \_\_\_\_\_

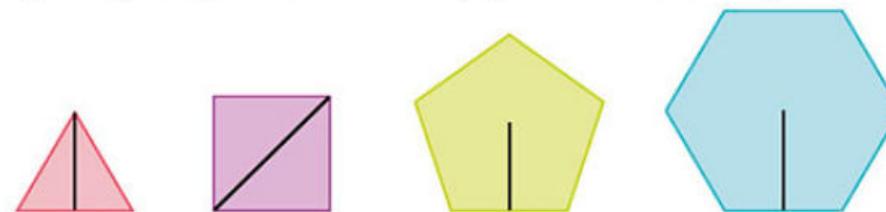
2. Comparen sus resultados y describan cuál es el procedimiento para plantear una expresión algebraica para la función seno, y cuál es el algoritmo (incluyendo el uso de la calculadora) para encontrar el valor de la incógnita cuando ésta se encuentra en el numerador.



**LO QUE APRENDÍ**



1. En los polígonos regulares que se muestran en la imagen, calcula su área sabiendo que cada lado mide 3 cm.



- Triángulo equilátero.
  - ¿Cuánto mide cada uno de sus ángulos internos? \_\_\_\_\_
  - ¿Cómo se plantea la expresión trigonométrica que permite conocer la altura? \_\_\_\_\_
  - ¿Cuál es el área? \_\_\_\_\_
  - Explica de forma breve cuál fue el procedimiento que tuviste que realizar para conocer el área del triángulo. \_\_\_\_\_
- Cuadrado.
  - ¿Cuánto mide el área? \_\_\_\_\_
  - ¿Qué estrategia utilizaste para encontrarla? \_\_\_\_\_
  - ¿Cuál es la forma más sencilla para encontrar la longitud de la diagonal? \_\_\_\_\_
  - ¿Es necesario utilizar funciones trigonométricas? \_\_\_\_\_  
Justifica tu respuesta. \_\_\_\_\_
  - De ser así, ¿cuál expresión trigonométrica te permite encontrar el valor de la diagonal? \_\_\_\_\_
- Pentágono y hexágono.
  - ¿Cuánto mide uno de los ángulos internos del pentágono? \_\_\_\_\_
  - ¿Y del hexágono? \_\_\_\_\_
  - ¿Qué estrategia utilizaste para investigar este dato? \_\_\_\_\_

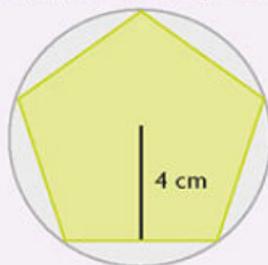
- ¿Cómo se puede plantear una función trigonométrica para encontrar el valor de la apotema?
- ¿Cuánto mide la apotema del pentágono?
- ¿Cuánto mide la apotema del hexágono?
- ¿Cuál es el área del pentágono?
- ¿Cuál es el área hexágono?
- Describe, ¿qué procedimiento debiste seguir para encontrar el área de estos polígonos regulares conociendo únicamente el valor de cada lado.

2. Contrasta tus respuestas con las de tus compañeros y analicen sus procedimientos. Con la ayuda del profesor determina: ¿cuál es la manera de plantear una función trigonométrica?, ¿cuál es el algoritmo que permite resolverla y cómo es posible verificar que el resultado es correcto.

**Desarrolla tus habilidades**

1. Reúnanse en equipos, analicen la situación planteada y respondan las preguntas.

- a) Un pentágono está inscrito en una circunferencia y sólo se conoce la media de su apotema de 4 cm, si se desea conocer el área de la superficie indicada en color gris, ¿qué estrategia es posible utilizar para encontrar cuánto mide?



- ¿Qué procedimientos auxiliares es necesario utilizar?

- ¿Cuánto mide el radio de la circunferencia?
- ¿Qué expresión trigonométrica utilizaron?

b) En su cuaderno, tracen el triángulo resuelto que les permitirá encontrar los datos para conocer la diferencia de superficies.

- ¿Cuánto mide la superficie sombreada de color gris?
- ¿Cómo se puede comprobar este dato?

2. Comparen sus resultados grupalmente y determinen cuál es la importancia de saber combinar los procedimientos trigonométricos con otros conocimientos algebraicos, geométricos y aritméticos, en la resolución de problemas complejos.

Eje temático	Forma, espacio y medida
Tema	Medida
Contenido 4	Análisis de las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo.

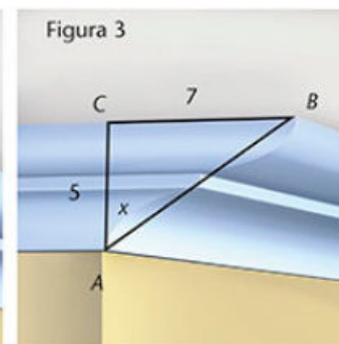
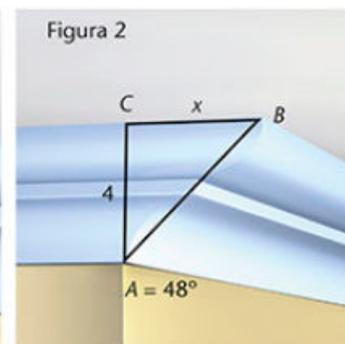
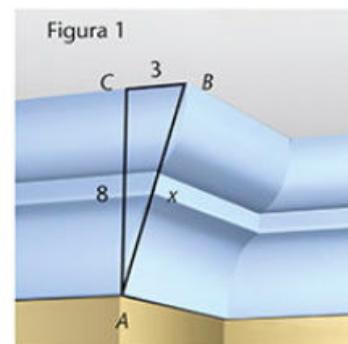


**ACUÉRDATE DE...**



1. Analicen la situación planteada y encuentren los datos que se solicitan.

- a) En una empresa de decoración hacen cenefas de muchos tipos, actualmente están diseñando las que se colocan entre la pared y el techo; éstas se crean a base de triángulos rectángulos, como se muestra en la imagen. Para decidir el nuevo diseño se están estudiando estas propuestas.



- ¿De qué manera se puede investigar el valor de  $x$  para la figura 1?
- ¿Cuánto mide la hipotenusa del triángulo de la figura 1?
- ¿Cómo es posible investigar el valor del  $\overline{CB}$ , es decir, el valor de  $x$  para la figura 2?
- ¿Cuál es el valor de  $x$  para la figura 2?
- ¿Qué estrategia proponen o de qué manera es posible conocer la medida del ángulo  $A$  para la figura 3?
- ¿Cuál es la medida del  $\sphericalangle A$ ?
- ¿Consideran que la medida que obtuvieron es precisa? Justifiquen su respuesta.
- ¿De qué manera es posible comprobar este último resultado?

2. Comparen sus respuestas y propuestas de solución con las de otros equipos y con la ayuda del profesor establezcan cuál es la diferencia en el procedimiento de solución para estas tres figuras: después definan qué nuevo reto contiene el triángulo de la figura 3.



**PRACTICALO**



**Actividad 4.1**

- Lean la siguiente situación y diseñen una estrategia que les permita realizar esta actividad.
  - Tracen en su cuaderno un triángulo rectángulo con las dimensiones que consideren más adecuadas.
  - Con su juego de geometría midan los lados y los ángulos agudos, registrenlos como datos del triángulo.
  - Escriban las funciones que se obtienen a partir de los cocientes de los lados para los dos ángulos agudos.
  - Obtengan la medida de los dos ángulos agudos por medio de una función.
    - ¿Hubo alguna diferencia entre la medida que tomaron con el transportador y la que calcularon con la función trigonométrica para los ángulos agudos? \_\_\_\_\_  
¿Por qué sucedió esto? \_\_\_\_\_
    - Si la suma de estos dos ángulos siempre es  $90^\circ$ , ¿cuál es el margen de error que se presentó? \_\_\_\_\_
- Formen un grupo de trabajo con otro equipo e intercambien sus triángulos, valoren las operaciones, procedimientos y resultados, comenten sus diferencias y con la ayuda del profesor verifiquen sus resultados.

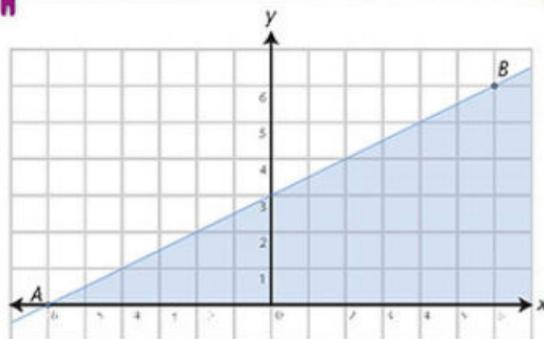


**PRACTICALO**



**Actividad 4.2**

- Analicen y resuelvan esta situación.
  - Diseñen una estrategia para trazar dentro de la zona sombreada con azul al menos 3 triángulos de diferente tamaño a intervalos regulares sobre el eje  $x$  que tengan como hipotenusa la  $AB$ .
  - Marquen el menor de los ángulos agudos.
  - Completen la tabla y contesten las preguntas.



Triángulo	Cateto 1	Cateto 2	Función	Cociente
1				
2				
3				

- ¿Qué estrategia utilizaron para trazar los tres triángulos? \_\_\_\_\_
- ¿Los triángulos son semejantes? \_\_\_\_\_
- ¿Por qué ocurrió esto? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es la razón que permite encontrar la relación entre los catetos de estos triángulos? \_\_\_\_\_
- Para el primer triángulo que trazaron escriban, ¿cuál es la función y la razón que representa el valor del ángulo agudo? \_\_\_\_\_

- ¿Cuál es la expresión para el segundo triángulo? \_\_\_\_\_
- ¿Y para el tercero? \_\_\_\_\_
- ¿Qué relación pueden observar entre los tres cocientes? \_\_\_\_\_
- ¿Por qué ocurre esto? \_\_\_\_\_

- De acuerdo con su punto de vista, ¿qué utilidad tiene conocer estas cantidades? \_\_\_\_\_
- Si calculan los cocientes basándose en el ángulo  $B$ , ¿qué relación observan entre las cantidades obtenidas? \_\_\_\_\_  
¿Cómo expresarían la relación que hay entre los cocientes obtenidos a partir de los catetos de un triángulo en relación a los ángulos agudos? \_\_\_\_\_
- Si la ecuación de esta recta es  $y = \frac{1}{2}x + 3$ , ¿qué relación tienen los resultados anteriores con el valor de la pendiente  $m = \frac{1}{2}$  tomado del coeficiente del término de primer grado? \_\_\_\_\_
- ¿Cómo explicarían con sus propias palabras cuál es la relación entre el cociente de los catetos, el ángulo de inclinación de una recta con respecto al eje  $x$  y el valor de la pendiente de la recta? \_\_\_\_\_

- Contrasten sus resultados con los de algunas parejas cercanas y con la ayuda del profesor elaboren en su cuaderno una hipótesis formal sobre cuál es la relación entre la pendiente, el ángulo y el cociente entre los catetos.

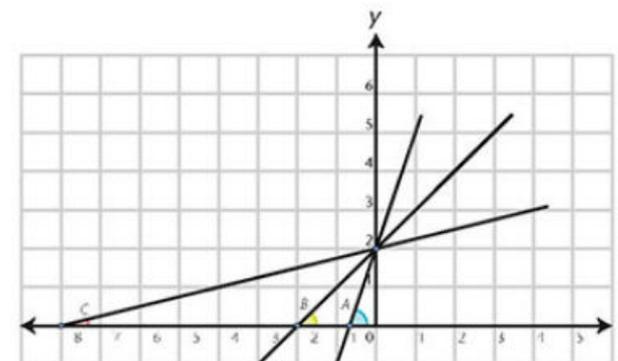


**PRACTICALO**



**Actividad 4.3**

- Lee y contesta las preguntas con base en la gráfica dada.
  - Las rectas mostradas en la gráfica, tienen la forma  $y = mx + b$ . Analiza cada una y completa los datos de la tabla.



Ángulo	Cateto 1	Cateto 2	Función	Cociente
A				
B				
C				

- ¿Cuál es la razón para calcular el ángulo  $A$ ? \_\_\_\_\_
- ¿Cómo determinaste esta función? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es la razón para calcular el ángulo  $B$ ? \_\_\_\_\_
- Y, ¿para el ángulo  $C$ ? \_\_\_\_\_
- ¿Utilizaste el mismo procedimiento? \_\_\_\_\_ Justifica tu respuesta. \_\_\_\_\_
- ¿Qué tienen en común estas tres razones? \_\_\_\_\_
- Entonces, ¿cuál es el valor de  $b$ ? \_\_\_\_\_
- Escribe la amplitud de cada ángulo  $\sphericalangle A =$  \_\_\_\_\_  $\sphericalangle B =$  \_\_\_\_\_  $\sphericalangle C =$  \_\_\_\_\_
- ¿Qué procedimiento te permitió calcular estos tres ángulos? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es la ecuación de la recta que forma el  $\sphericalangle A$ ? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es la ecuación para la recta que forma el  $\sphericalangle B$ ? \_\_\_\_\_
- Y ¿para la recta que forma el  $\sphericalangle C$ ? \_\_\_\_\_

2. Contrasta tus resultados con los de tus compañeros y con la ayuda de tu profesor determina cuál es la relación entre la medida del ángulo y el valor de la pendiente en rectas que tienen diferente pendiente.



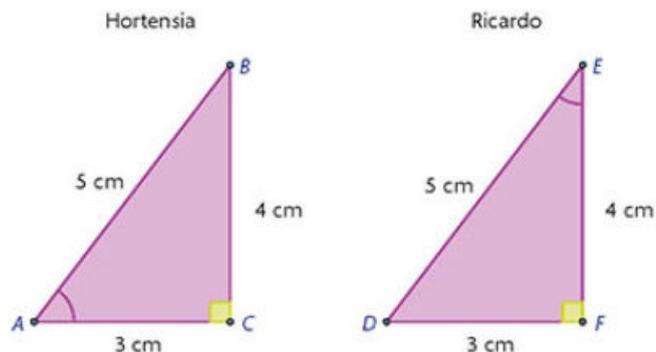
**PRACTICALO**



**Actividad 4.4**

1. El maestro de matemáticas de Hortensia y Ricardo, organizó un trabajo en parejas con la intención de que investigaran sobre la relación entre las funciones que se obtienen a partir de dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo. Para ello, cada integrante deberá trabajar con uno de los ángulos agudos. Hortensia tomó el ángulo agudo de mayor tamaño; y Ricardo, el menor.

Analicen la imagen y contesten las preguntas.



a) El triángulo de Hortensia.

- El cociente entre el cateto opuesto al ángulo  $A$  y la hipotenusa \_\_\_\_\_  
Entonces, ¿cuál es el valor del  $\sphericalangle A$ ? \_\_\_\_\_
- El cociente entre el cateto adyacente al ángulo  $A$  y la hipotenusa \_\_\_\_\_  
Entonces, ¿cuál es el valor del  $\sphericalangle A$ ? \_\_\_\_\_

b) El triángulo de Ricardo.

- El cociente entre el cateto opuesto al ángulo  $E$  y la hipotenusa \_\_\_\_\_  
Entonces, ¿cuál es el valor del  $\sphericalangle E$ ? \_\_\_\_\_
- El cociente entre el cateto adyacente al ángulo  $E$  y la hipotenusa \_\_\_\_\_
- El cociente entre el cateto opuesto de  $E$  y el cateto adyacente \_\_\_\_\_
- Entonces, ¿cuál es el valor del  $\sphericalangle E$ ? \_\_\_\_\_

c) ¿Qué tienen en común los ángulos que calculó Hortensia?

- ¿Por qué ocurrió esto? \_\_\_\_\_
- ¿Se presentó una situación similar con Ricardo o fue distinta? \_\_\_\_\_
- Justifiquen su respuesta. \_\_\_\_\_
- ¿Qué procedimiento emplearon para calcular el valor de los ángulos para estas funciones? \_\_\_\_\_

2. Comparen sus resultados con los de otros equipos y con la ayuda del profesor ofrezcan una explicación que indique por qué al calcular las funciones para un ángulo agudo conociendo el valor de los tres lados del triángulo da como resultado la misma medida angular.



**PRACTICALO**

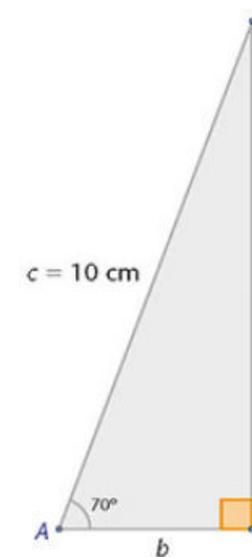


**Actividad 4.5**

1. El profesor de Hortensia y Ricardo les lanzó un reto al terminar la clase, mostró un triángulo rectángulo y dijo: "Analicen este triángulo y encuentren, ¿por qué es diferente éste a los que han visto hasta el momento?".

a) Contesten las preguntas.

- ¿Cuál es la expresión que permite calcular el valor del cateto  $a$ ? \_\_\_\_\_  
¿Cuánto mide el cateto  $a$ ? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es la expresión que permite calcular el valor del cateto  $b$ ? \_\_\_\_\_  
¿Cuánto mide el cateto  $b$ ? \_\_\_\_\_
- ¿Qué diferencia hay entre estas dos expresiones al compararlas con las que usaron en las secciones anteriores? \_\_\_\_\_



- ¿En qué se modifica el algoritmo para encontrar el valor de los catetos si la incógnita se encuentra en el dividendo y no en el divisor?

- ¿Consideran que es posible obtener estos resultados de alguna manera distinta?

- Justifiquen su respuesta.

2. Comparen sus resultados con los de otras parejas y con la ayuda del profesor determinen cuál es la diferencia en el algoritmo cuando una expresión, que es resultado de un cociente entre dos de los lados de un triángulo, tiene la incógnita en el dividendo de cuando la tiene en el divisor.

**Para leer más**

Los cocientes obtenidos al relacionar dos de los lados de un triángulo rectángulo se pueden utilizar para calcular el valor de alguno de los ángulos agudos, y se relacionan entre sí porque sus expresiones son recíprocas.

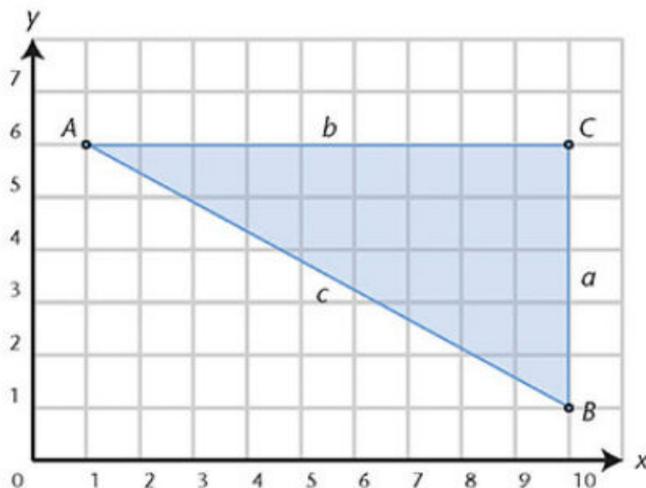


**LO QUE APRENDÍ**

1. Observa la gráfica y resuelve el triángulo rectángulo.

a) En el plano cartesiano se muestra un triángulo rectángulo que tiene indicados, por medio de letras, tanto sus lados como sus ángulos; analiza la imagen y responde las preguntas.

- ¿Cuál es la medida del  $\angle A$ ?
- ¿Cuál es la medida del  $\angle B$ ?
- ¿Cuánto mide  $a$ ?
- ¿Cuánto mide  $b$ ?
- ¿Cuánto mide  $c$ ?
- ¿Cuántas funciones fueron necesarias para resolver el triángulo?
- Escribe las expresiones que usaste.

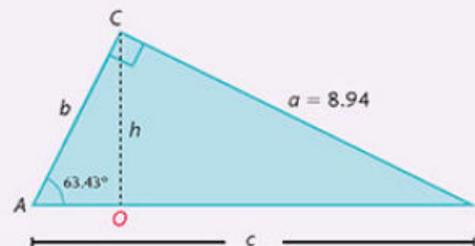


- Describe brevemente el procedimiento que empleaste.
- ¿Cómo es posible comprobar que tus resultados son correctos?

2. Contrasta tus resultados con los de tus compañeros y, con la ayuda del profesor, determina qué procedimiento se utiliza para encontrar el valor de algún lado o ángulo de un triángulo rectángulo cuando éste está dado con base en las coordenadas de un plano cartesiano.

**Desarrolla tus habilidades**

1. Reúnanse en equipos y analicen el triángulo que se muestra abajo. Diseñen una estrategia que consideren les permitirá encontrar los valores de las incógnitas.  
a) Resuelvan este triángulo rectángulo y determinen el valor de la altura ( $h$ ).



- ¿Cuánto mide la hipotenusa  $c$ ?
- ¿Cuánto mide el cateto  $b$ ?
- ¿Cuánto mide el  $\angle B$ ?
- Expliquen brevemente, ¿cuál fue el procedimiento para encontrar la altura del triángulo?
- En realidad, ¿cuántos triángulos se forman en el triángulo rectángulo al trazar la altura? De acuerdo con sus vértices, nombren los triángulos que se forman.
- ¿Cuántos ángulos rectos presenta la figura?
- ¿Es posible investigar el valor de  $h$  de alguna otra manera? Expliquen su respuesta.
- ¿Cómo es posible investigar el valor del  $\overline{OB}$ ?

2. Comparen sus respuestas con las de otro equipo y con la ayuda del profesor determinen cuál es la importancia de hacer un planteamiento adecuado para este tipo de situaciones, y qué repercusión tiene en el planteamiento del método de solución.

Eje temático	Forma, espacio y medida
Tema	Medida
Contenido 5	Explicitación y uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.

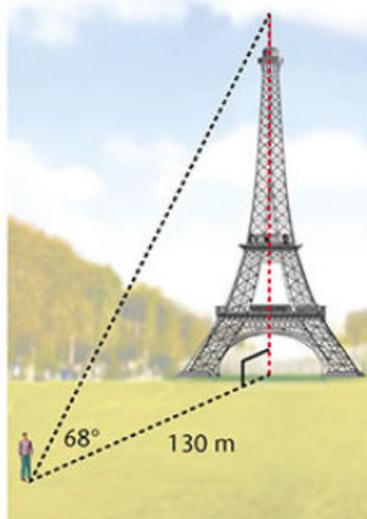
**ACUÉRDATE DE...**

1. Analicen y resuelvan la situación dada.

a) Antonio fue de viaje a Francia, al visitar la Torre Eiffel quiso saber cuál es su altura, pero sólo pudo obtener dos medidas: la distancia de donde él se encuentra al centro de la base de la torre y el ángulo de elevación hasta la punta de la torre.

Ayuden a Antonio a encontrar la altura de la Torre Eiffel.

- ¿Cuánto mide la altura? \_\_\_\_\_
- ¿Qué estrategia utilizaron para encontrar el resultado? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es la expresión trigonométrica que modela esta situación? \_\_\_\_\_
- ¿A qué distancia se encuentra Antonio de la cúspide de la Torre Eiffel? \_\_\_\_\_
- ¿Utilizaron el mismo procedimiento para encontrar el resultado? \_\_\_\_\_
- Expliquen su respuesta. \_\_\_\_\_
- ¿Es posible encontrar la cúspide de la torre utilizando algún otro procedimiento? \_\_\_\_\_  
¿Por qué ocurre esto? \_\_\_\_\_



2. Comparen sus resultados con los de otras parejas y con la ayuda del profesor verifiquen que sus planteamientos y resultados sean correctos.

**PRACTÍCALO**

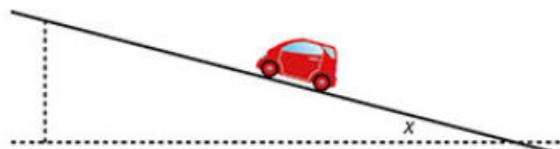
**Actividad 5.1**

1. Para construir una nueva carretera hacia una montaña los ingenieros decidieron que por cada 1500 m que recorran los autos deben ascender 300 m.

a) ¿Cuántos grados de elevación debe tener la carretera para cumplir con la distancia recorrida y los metros ascendidos? \_\_\_\_\_

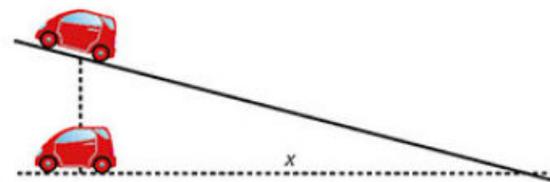
• ¿De qué manera encontraron el valor del ángulo? \_\_\_\_\_

• ¿Cuál es la expresión trigonométrica que modela esta situación? \_\_\_\_\_



b) Si un vehículo hubiera hecho el recorrido de manera horizontal, ¿qué distancia habría recorrido cuando el auto que va sobre la nueva carretera llegue a los primeros 1500 m? \_\_\_\_\_

- ¿Qué estrategia utilizaron para encontrar este resultado? \_\_\_\_\_
- ¿Qué función trigonométrica se puede utilizar para modelar esta situación? \_\_\_\_\_



2. Comparen sus resultados con los de los otros equipos y con la ayuda del profesor determinen qué funciones son las más adecuadas para resolver estas situaciones y cuáles son los datos que se deben observar para poder definirla.

**Para tener en cuenta**

Las relaciones entre las funciones trigonométricas de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo muestran equivalencias entre sí.

	$\text{sen } A = \frac{a}{c}$	$\text{sen } B = \frac{b}{c}$
	$\text{cos } A = \frac{b}{c}$	$\text{cos } B = \frac{a}{c}$
	$\text{tan } A = \frac{a}{b}$	$\text{tan } B = \frac{b}{a}$

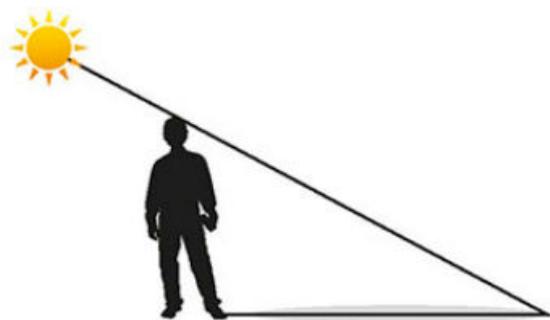
**PRACTÍCALO**

**Actividad 5.2**

1. Analicen la siguiente situación y resuelvan la actividad.

Luis mide 1.85 m de estatura, al estar de pie en cierto momento del día proyectó una sombra de 2.3 m.

- ¿Con qué ángulo están llegando los rayos del Sol a la superficie del suelo? \_\_\_\_\_
- ¿Qué estrategia utilizaron para encontrar este resultado? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es la función trigonométrica que modela esta situación? \_\_\_\_\_
- ¿Cómo pueden comprobar que su resultado es correcto? \_\_\_\_\_
- ¿Existe la posibilidad de encontrar el ángulo con otro procedimiento? \_\_\_\_\_
- Si Luis hubiera tenido una estatura de 1.70 m, ¿qué longitud hubiera tenido la sombra que proyecta? \_\_\_\_\_
- ¿Qué expresión modela esta situación? \_\_\_\_\_



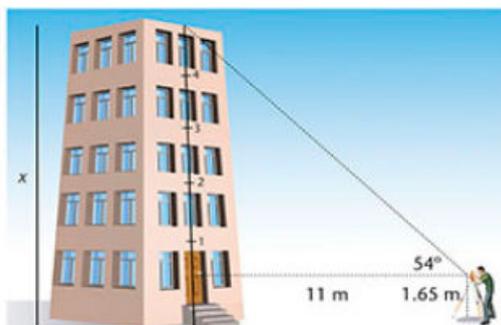
2. Analicen y contrasten sus respuestas con las de otra pareja y, con la ayuda del profesor, verifiquen que sus resultados sean correctos.

**PRACTICALO**

**Actividad 5.3**

1. Javier es topógrafo y está tomando las medidas de un edificio, el aparato que utiliza toma las medidas de 1.65 m de altura. Tomando como base los datos que muestra la imagen contesta lo que se te indica.

- ¿Cuál es la altura del edificio? \_\_\_\_\_
- ¿Qué estrategia utilizaste para calcularla? \_\_\_\_\_



a) Si Javier sabe que los pisos del edificio tienen la misma altura, ¿a qué altura se encuentra cada piso? Completa la tabla.

Piso	1	2	3	4	5
Altura					

- ¿Cuál es el ángulo de elevación que Javier medirá hasta el cuarto piso? \_\_\_\_\_
- ¿De qué manera determinaste este dato? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es el ángulo que medirá Javier hasta el tercer piso? \_\_\_\_\_
- ¿Qué expresión trigonométrica te permite encontrar esos ángulos? \_\_\_\_\_
- Si Javier coloca su instrumento de medición a nivel del piso, ¿qué ángulo medirá hasta la parte más alta del edificio? \_\_\_\_\_ ¿Cómo determinaste este resultado? \_\_\_\_\_

2. Comparte tus procedimientos y resultados con algunos de tus compañeros, analiza y comenta los que ellos realizaron, y con la ayuda del profesor determina de qué manera se pueden emplear las funciones trigonométricas cuando hay que resolver un problema que presenta operaciones recurrentes.

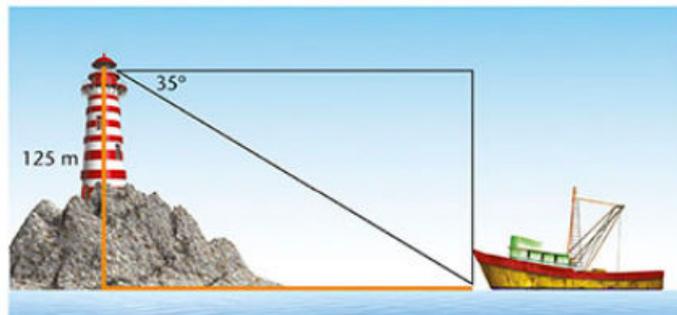
**Para tener en cuenta**

Para calcular el ángulo agudo de un triángulo rectángulo con base en dos de sus lados se utiliza la función trigonométrica elevada a la potencia  $-1$ , es decir,  $\text{sen}^{-1}$ ,  $\text{cos}^{-1}$  y  $\text{tan}^{-1}$ . Regularmente, estas funciones se encuentran como *segunda función* en las calculadoras científicas.

**PRACTICALO**

**Actividad 5.4**

1. Analicen las imágenes mostradas y determinen el valor del lado o ángulo indicado con la letra x.



a) Desde lo alto de un faro se observa un barco con un **ángulo de depresión** de  $35^\circ$ , si la altura del faro es de 125 m, ¿cuál es la distancia entre el faro y el barco? \_\_\_\_\_

• Expliquen, ¿cuál es la estrategia que permite encontrar la distancia? \_\_\_\_\_

• ¿Cuál es la expresión trigonométrica que permite encontrar la distancia? \_\_\_\_\_ Justifiquen su respuesta. \_\_\_\_\_

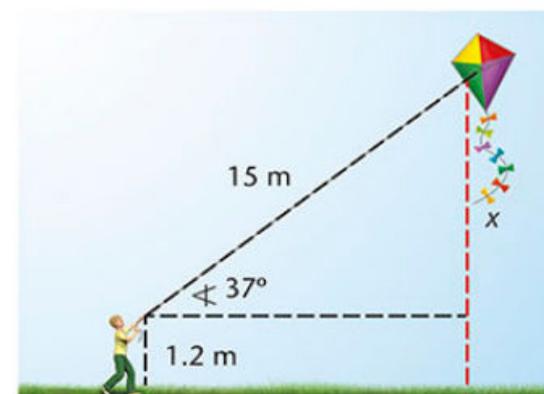
b) Un niño desea conocer la altura a la que vuela su papalote, para ello realizó marcas a un metro de distancia sobre el hilo que utilizaría y midió el ángulo de elevación. Contó 15 m de hilo y midió un ángulo aproximado de  $37^\circ$ .

• Expliquen, ¿cuál es la estrategia para encontrar la altura a la que el papalote vuela? \_\_\_\_\_

• ¿Qué función trigonométrica permite encontrar el valor de x? \_\_\_\_\_

Justifiquen su respuesta. \_\_\_\_\_

**Glosario**  
**Ángulo de depresión.** Es el que se forma por debajo de la línea paralela al horizonte que se toma como referencia.



• ¿Cuál es el la altura del papalote? \_\_\_\_\_

c) Una escalera de 3.5 m de longitud es colocada en una pared. Se sabe que la distancia de la pared a la base de la escalera es 1.2 m, ¿cuál es la altura que alcanza la escalera y el ángulo de elevación con respecto al piso? \_\_\_\_\_

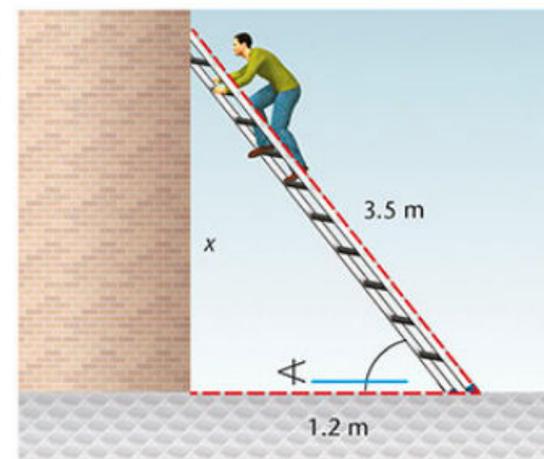
• ¿Qué estrategia permite encontrar el ángulo que forma la escalera con respecto al piso? \_\_\_\_\_

• ¿Cuál es la expresión algebraica que modela esta situación? \_\_\_\_\_

• ¿Cuál expresión trigonométrica permite encontrar el valor de la altura x? \_\_\_\_\_

• ¿Es posible encontrar el valor de x mediante algún otro procedimiento? \_\_\_\_\_

Justifiquen su respuesta. \_\_\_\_\_



2. Contrasten sus resultados con los de otras parejas y con la ayuda del profesor verifiquen sus planteamientos y justifiquen que sean correctos; determinen si utilizaron el procedimiento más adecuado.

**Para leer más**

Determinar la función trigonométrica que modela una situación se hace siempre con base en dos dimensiones conocidas, ya sea un ángulo y un lado o bien dos lados del triángulo e identificando el o los catetos y la hipotenusa con base en el ángulo dado.

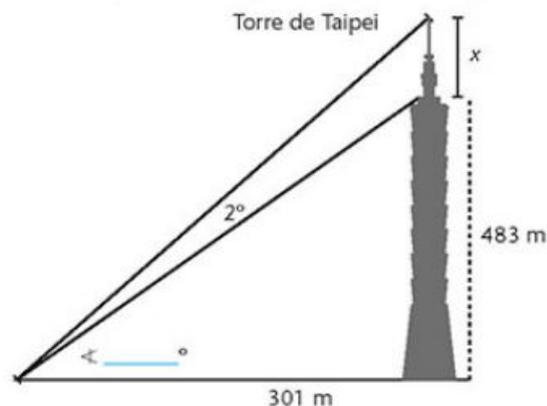
En un triángulo rectángulo la función *seno* de uno de sus ángulos agudos equivale a la función *coseno* del otro ángulo agudo y la comparación entre la razón de la función *tangente* de cada ángulo agudo es el inverso multiplicativo o recíproco.



**LO QUE APRENDÍ**



1. La Torre de Taipei es considerada uno de los edificios más altos del mundo, tan sólo la zona de pisos tiene una altura de 483 m; con este dato, una persona se alejó 301 m para investigar la altura total de la torre.



- ¿Cuánto mide el ángulo de elevación hasta donde termina la zona de pisos? \_\_\_\_\_
- ¿Qué estrategia utilizaste para investigar esta medida? \_\_\_\_\_
- ¿Qué función trigonométrica permite calcular este ángulo? \_\_\_\_\_

Justifica tu respuesta.

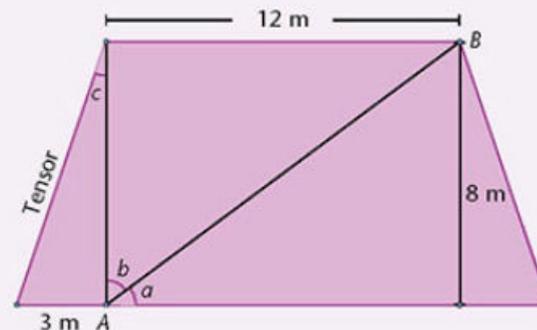
- ¿Cuánto mide en su totalidad la Torre de Taipei? \_\_\_\_\_
- ¿Cómo encontraste este resultado? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es la altura de la punta de la torre marcada con la letra *x*? \_\_\_\_\_
- ¿De qué manera determinaste este resultado? \_\_\_\_\_

2. Compara tus respuestas con las de algunos de tus compañeros, y con la ayuda del profesor determina cuál es la importancia y el procedimiento para realizar un planteamiento adecuado para resolver situaciones que requieren el uso recurrente de funciones trigonométricas.

**Desarrolla tus habilidades**

1. Reúnanse en equipos y resuelvan el siguiente problema.

Para sujetar las luces en la parte frontal de un escenario se utilizaron dos postes y dos cables tensores. Analicen la figura y contesten las preguntas.



- ¿Cuánto mide el ángulo *c*? \_\_\_\_\_
- ¿Qué estrategia utilizaron para calcular este ángulo? \_\_\_\_\_
- ¿Qué expresión trigonométrica modela esta situación? \_\_\_\_\_
- ¿Cuánto mide el ángulo *b*? \_\_\_\_\_
- ¿Cuánto mide el ángulo *a*? \_\_\_\_\_
- ¿Qué procedimiento utilizaron para calcular estos dos ángulos? \_\_\_\_\_

- ¿Cuánto mide la superficie del trapecio? \_\_\_\_\_
- ¿Cuánto mide cada tensor? \_\_\_\_\_
- ¿Qué función trigonométrica modela esta situación? \_\_\_\_\_

Justifiquen su respuesta.

- ¿Cuánto mide la diagonal formada entre los puntos *A* y *B*? \_\_\_\_\_
- ¿Qué expresión modela esta situación? \_\_\_\_\_

2. Contrasten sus respuestas con las de otros equipos y con la ayuda del profesor elaboren una conclusión sobre cuál es la forma que consideran más conveniente para resolver situaciones como ésta. Comenten en grupo si es que hay algún otro procedimiento que permita encontrar otras soluciones a estos planteamientos.

**USA LAS TIC**



Visita la página <http://www.vadenumeros.es/actividades/resolucion-de-triangulos.htm> (5 de diciembre de 2016, a las 16:13 horas), en la que encontrarás un programa que te permite resolver triángulos, puedes colocar los datos de cualquiera de los casos vistos en este contenido. Inventa casos propios y después de tu visita comenta con tu profesor tu experiencia y determinen, ¿cuál es la aplicación en la vida real que puede tener este tipo de recursos?

Eje temático	Manejo de la información
Tema	Proporcionalidad y funciones
Contenido 6	Cálculo y análisis de la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identificación de la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa.



ACUÉRDATE DE...



1. Gabriel quiere llevar a su familia al museo de cera, pero todavía no sabe cuántos de ellos pueden asistir, por lo que decidió preguntar a cada uno. En su casa viven 6 adultos y 4 niños, y en el museo la entrada cuesta \$75 adultos y \$60 niños.

- Si Gabriel va al museo únicamente con su hijo, ¿cuánto dinero gastará? \_\_\_\_\_
- Si fueran solamente los adultos, ¿cuánto pagarían? \_\_\_\_\_
- Si sólo fuera Gabriel y los 4 niños, ¿cuánto tendría que pagar? \_\_\_\_\_
- ¿Cuánto pagaría si fuera toda la familia? \_\_\_\_\_
- Si Gabriel fue con toda su familia y también llevaron a la familia de su vecino, compuesta por 4 personas (dos adultos y dos niños), ¿cuánto pagaron en total? \_\_\_\_\_

Justifiquen su respuesta. \_\_\_\_\_

- ¿Qué estrategia utilizaron para encontrar estas cantidades? \_\_\_\_\_

a) Tomando las respuestas anteriores como base, completen la tabla y tracen en su cuaderno la gráfica correspondiente.

Número de personas	Precio por adulto	Precio por niño
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

- ¿Qué tipo de líneas se forman? \_\_\_\_\_
- ¿Qué indica que sean de este tipo? \_\_\_\_\_
- ¿Cómo pueden explicar la relación que hay entre el precio por persona y el número de personas? \_\_\_\_\_

- Si Gabriel tuviera disponibles \$400 y quisiera invitar a la misma cantidad de niños y adultos, ¿cuántos de cada uno puede invitar? \_\_\_\_\_
- ¿Qué estrategia utilizaron para calcular este resultado? \_\_\_\_\_

2. Contrasten sus respuestas con las de sus compañeros y con la asesoría del profesor determinen cuál es la correlación entre una gráfica lineal, una relación proporcional entre dos cantidades y la inclinación que tienen las rectas trazadas.



PRACTICALO



Actividad 6.1

1. La señora Beatriz quiere pedirle prestada cierta cantidad de dinero a la señora Consuelo; para darle a conocer los intereses que debe pagar, la señora Consuelo le mandó una gráfica que contempla un plazo de 6 meses con un interés del 6% mensual.

a) Analicen la gráfica y respondan las preguntas.

- ¿Qué cantidad de dinero tendría que pagar la señora Beatriz de interés por cada mes? \_\_\_\_\_
- ¿Cómo determinaron esta cantidad? \_\_\_\_\_

- Calculen cuál es la diferencia entre el interés que paga entre los meses 4 y 3, y compárenla con el interés que tiene que pagar entre los meses 6 y 5. ¿Es la misma cantidad? \_\_\_\_\_

¿Por qué ocurre esto? \_\_\_\_\_

- ¿Qué cantidad de dinero quiere pedir la señora Beatriz? \_\_\_\_\_

- ¿Qué estrategia utilizaron para calcular esta cantidad? \_\_\_\_\_

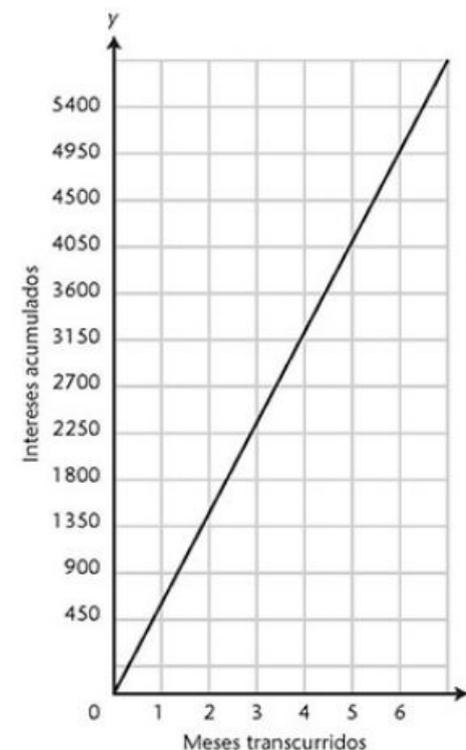
- ¿Consideran que la relación entre los meses transcurridos y los intereses acumulados es proporcional? \_\_\_\_\_

Justifiquen su respuesta. \_\_\_\_\_

Hay otras dos personas que prestan dinero, Marlene y doña Juana, ¿qué diferencias habría en la gráfica si Marlene cobra el 10% de interés mensual con la de la señora Consuelo?

- ¿Por qué ocurre esto? \_\_\_\_\_

- Si doña Juana sólo cobra 4%, ¿cómo sería la gráfica de los intereses en comparación con la de la señora Consuelo? \_\_\_\_\_



- ¿Consideran que las tres señoras utilizan una relación proporcional para el cobro de sus intereses? Justifiquen su respuesta.
- ¿Cuál de las tres gráficas tiene una mayor inclinación?
- ¿A qué se debe esto?
- Entonces, ¿qué relación hay entre la inclinación de la recta y el ángulo que forma con el eje  $x$ ?
- ¿Qué expresión algebraica representa los intereses mensuales que le cobraría la señora Consuelo a la señora Beatriz?  
¿Cómo determinaron esta expresión?
- ¿Qué relación hay entre la expresión algebraica anterior y la pendiente de la recta?

2. Contrasten sus resultados con los de sus compañeros y con la ayuda del profesor determinen la relación que hay entre el interés de un préstamo, la línea que representa y el ángulo de inclinación que forma con el eje  $x$ .



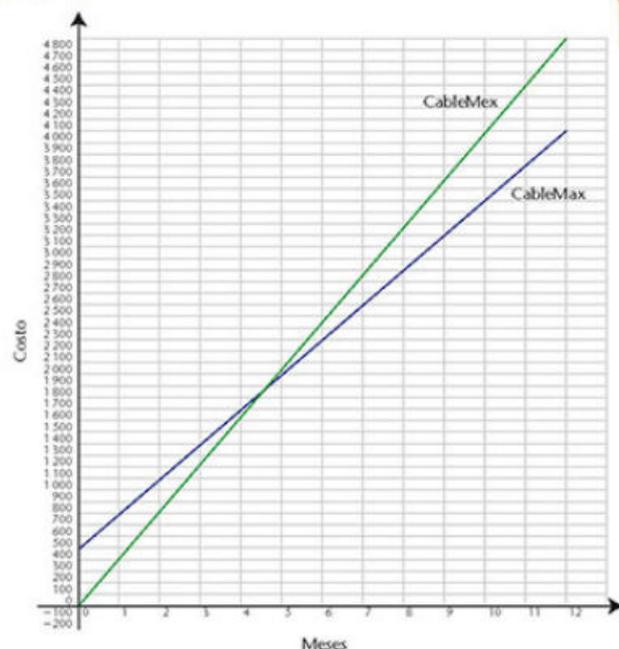
**PRACTICALO**



**Actividad 6.2**

1. Francisco y Angélica están recién casados y quieren contratar el servicio de televisión por cable. En la zona donde viven hay dos compañías que proveen este servicio, CableMex y CableMax. En CableMex cobran una inscripción de \$400 y la renta mensual por los canales básicos es de \$300, en CableMax no cobran inscripción, y su renta mensual es de \$400 por los canales básicos. Analicen la gráfica mostrada y contesten las preguntas.

- ¿En qué compañía les conviene más contratar el servicio por un año?
- ¿Cómo determinaron esto?
- ¿En qué altera la gráfica que en CableMex cobren inscripción?
- ¿Qué indica el punto donde las rectas se intersecan?
- ¿Cuál es la razón de cambio mensual para CableMax?
- ¿Qué representa esto en relación con la inclinación de la recta?
- ¿Ocurre una situación similar para CableMex? Justifiquen su respuesta.



- ¿Qué expresión algebraica representa la línea azul?  
¿Y la verde?
  - La pendiente de la recta de CableMax es:  
y la de CableMex es:
2. Comparen sus respuestas con las de algunos de sus compañeros y con la ayuda del profesor elaboren en su cuaderno una explicación breve acerca de la relación entre la razón de cambio y la pendiente de una recta.



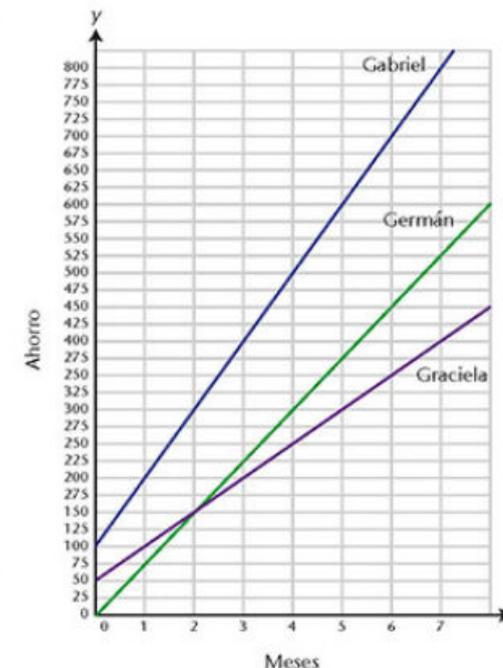
**PRACTICALO**



**Actividad 6.3**

1. Gabriel, Germán y Graciela son hijos del señor Gerardo; para enseñarlos a ahorrar, su papá les dijo que guardarán parte del dinero que reciben por lo menos durante 7 semanas. Para comparar el ahorro de cada uno de los mostró la siguiente tabla.

- ¿Con cuánto dinero inició el ahorro Gabriel?
- ¿Cuánto ahorra Gabriel por semana?
- ¿Cómo determinaron este dato?
- ¿Con qué cantidad inició su ahorro Germán?
- ¿Con cuánto dinero inició Graciela?
- ¿Qué indica el punto donde se intersecan las rectas verde y rosa?
- Si se calcula la razón de cambio entre las semanas 2 y 1 para Graciela y Germán, ¿qué diferencia se puede notar?
- Si comparan las semanas 2 y 3, ¿qué se observa?



- Entonces, ¿qué ocurrió con la razón de cambio de cada uno?
- ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el ahorro de Gabriel?
- ¿Cuál es la expresión algebraica para el ahorro de Germán?
- ¿Cuál es la expresión para la recta de Graciela?
- Las pendientes de cada recta son: Gabriel \_\_\_\_\_ Germán \_\_\_\_\_  
Graciela \_\_\_\_\_
- El señor Gerardo les preguntó en la semana 5 cuánto habían ahorrado. Gabriel contestó \_\_\_\_\_  
Germán dijo \_\_\_\_\_ Graciela respondió \_\_\_\_\_

2. Contrasten sus resultados con los de sus compañeros y con la ayuda de su profesor obtengan conclusiones.

**Para leer más**

De manera gráfica se puede comparar y analizar fácilmente la relación entre dos conjuntos de números o cantidades, y si se trata de una recta, la razón de cambio siempre es constante, es decir, no va a variar entre cada intervalo.

Al analizar la gráfica lineal obtenida a partir de una relación directamente proporcional es posible determinar la expresión algebraica que la representa, y de esta misma obtener la medida de la pendiente o inclinación de la recta.

**Para tener en cuenta**

Se le llama *razón de cambio* al cociente que se obtiene al dividir el incremento que sufre una cantidad entre la cantidad inmediata anterior. La relación entre cantidades muestra un incremento de una en relación a la otra de una manera proporcional, por lo mismo, se pueden comparar y con ello establecer la razón de cambio entre cada uno de sus intervalos.



**LO QUE APRENDÍ**



Durante la clase de matemáticas el profesor dijo a sus alumnos que para comprender la relación entre la pendiente, la razón de cambio y la expresión algebraica que representa la recta deberían comparar algunas expresiones. Observa las expresiones dadas por el profesor y contesta las preguntas.

- Una recta tiene la forma  $y = mx + b$ , la pendiente está representada por la letra  $m$  y la ordenada al origen, es decir, el punto donde la recta corta al eje de las  $y$ , está representada por la letra  $b$ .
  - Analicen las siguientes expresiones y luego construyan una tabla para cada una con al menos 3 valores, y luego las que cambian en la pendiente  $m$ , trácenlas sobre un mismo plano, después realicen esta misma acción para las rectas que cambian en la ordenada al origen.

<b>Cambiando <math>m</math></b>	$20x$	$20x + 10$	$20x + 20$
<b>Cambiando <math>b</math></b>	$10x + 5$	$15x + 5$	$20x + 5$

20x		20x + 10		20x + 20	
x	y	x	y	x	y
10x + 5		15x + 5		20x + 5	
x	y	x	y	x	y

b) Construye en tu cuaderno la gráfica para las rectas donde se modificó el valor de la pendiente  $m$ .

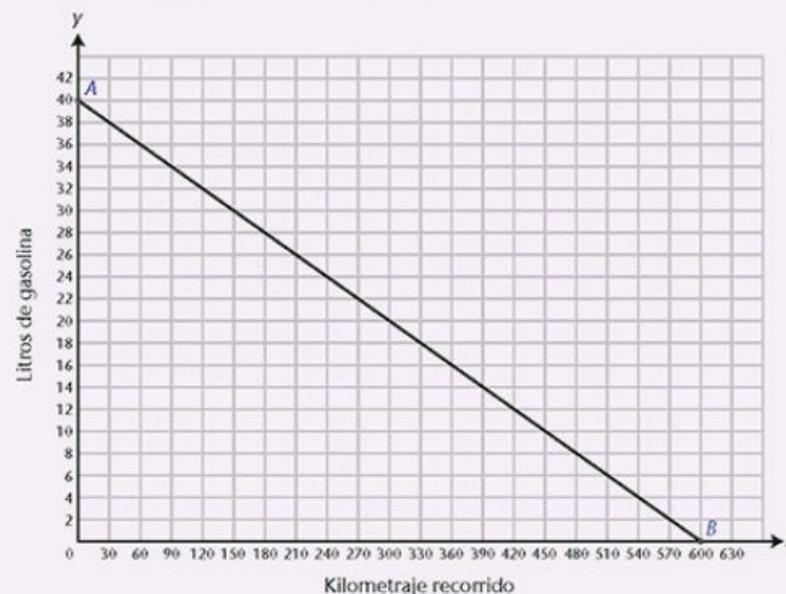
- ¿Qué estrategia utilizaste para determinar el tamaño y la graduación de los planos cartesianos? \_\_\_\_\_
- ¿En qué se modifica la razón de cambio para las rectas donde se varía el parámetro  $m$  (pendiente)? \_\_\_\_\_
- ¿Ocurre lo mismo para las gráficas donde se modifica  $b$ , es decir, la ordenada al origen? \_\_\_\_\_
- ¿Por qué ocurre esto? \_\_\_\_\_
- Si se selecciona un intervalo sobre el eje  $x$  y se calcula la razón de cambio en ese intervalo para las rectas de ambas gráficas, ¿qué diferencia se puede observar? \_\_\_\_\_
- Entonces, ¿cuál de los dos parámetros está directamente relacionado con la pendiente de la recta? \_\_\_\_\_

2. Contrasten sus resultados con los de sus compañeros y con la ayuda del profesor elaboren en su cuaderno una definición formal para los parámetros  $m$  y  $b$ , para las rectas de la forma  $y = mx + b$ , y expliquen cuál es su función.

**Desarrolla tus habilidades**

1. Reúnanse en equipos, analicen la situación planteada y respondan las preguntas.

En la gráfica mostrada se encuentra representado el consumo de gasolina de un vehículo y los kilómetros recorridos.



**USA LAS TIC**



Visita la página <http://www.educaplus.org/games/browse?order=publish-date-newest&search=recta> (Consultada el día 5 de diciembre de 2016, a las 11:55 horas), en ella encontrarás una sencilla aplicación que te permitirá mover libremente una recta sobre el plano cartesiano y podrás analizar con detalle la inclinación de la recta, así como la relación con los valores de los ejes. También podrás ver el cambio en el ángulo de inclinación de la recta con el eje  $x$ . Después de tu visita elabora un comentario que responda: ¿cuál es la utilidad de contar con este tipo de recursos?, y bajo la coordinación del profesor, elaboren una lluvia de ideas para encontrar la mejor definición para la pendiente de la recta y la relación que tiene con la razón de cambio entre los intervalos de una gráfica.

- ¿Qué capacidad total tiene el tanque de gasolina? \_\_\_\_\_
  - ¿Cuántos kilómetros puede recorrer sin recargar combustible? \_\_\_\_\_
  - ¿Cuántos kilómetros recorre el vehículo por litro? \_\_\_\_\_
  - Entonces, después de haber gastado los primeros 3 litros de combustible, ¿cuántos kilómetros habrá recorrido? \_\_\_\_\_
  - Si consideramos el consumo por litro de gasolina, ¿cuál es la razón de cambio del consumo por litro? \_\_\_\_\_
  - ¿Cómo determinaron esta cantidad? \_\_\_\_\_
  - La relación entre los litros de gasolina consumidos y el kilometraje recorrido, ¿es directa o inversa? \_\_\_\_\_
  - ¿Esto qué significa? \_\_\_\_\_
  - Gráficamente, ¿cuál es la diferencia entre esta recta y las que trabajaron anteriormente en este contenido? \_\_\_\_\_
  - ¿En qué afecta esto a la inclinación de la recta? \_\_\_\_\_
  - Entonces, ¿qué signo debe tener la expresión algebraica que modela esta situación? \_\_\_\_\_
  - ¿Cómo definen con sus propias palabras el efecto que tiene el signo negativo en la gráfica de una expresión algebraica? \_\_\_\_\_
  - ¿Afecta esto la inclinación o pendiente de la recta? Justifiquen su respuesta. \_\_\_\_\_
2. Contrasten sus resultados con los de sus compañeros y con la ayuda del profesor elaboren una explicación que aclare: la relación que hay entre el signo negativo de una expresión algebraica lineal, la pendiente que la representa y la razón de cambio de la gráfica.

Eje temático	Manejo de la información
Tema	Análisis y representación de datos
Contenido 7	Medición de la dispersión de un conjunto de datos mediante el promedio de las distancias de cada dato a la media (desviación media). Análisis de las diferencias de la “desviación media” con el “rango” como medidas de la dispersión.



**ACUÉRDATE DE...**



1. Diego y Andrea son hermanos, para llevar un mejor control de sus calificaciones en Matemáticas, decidieron registrar los resultados de los exámenes de control que les aplica su profesor, dos por cada bimestre. Al final del cuarto bimestre ya tienen 8 resultados cada uno.

a) Observen los resultados en la tabla y contesten las preguntas.

Número de examen	1	2	3	4	5	6	7	8
Andrea	6.5	7.5	10	7	9	5	10	5
Diego	8	7.5	7	8	8	7	7.5	7

- Considerando estos resultados, ¿creen que es posible hacer un pronóstico de la calificación del siguiente examen para ambos hermanos? Expliquen su respuesta. \_\_\_\_\_
- ¿Cuál de los dos hermanos consideran que tiene un mejor desempeño académico? Justifiquen su respuesta. \_\_\_\_\_
- ¿Para cuál de los dos hermanos consideran que es más sencillo hacer un pronóstico de su próxima calificación? Justifiquen su respuesta. \_\_\_\_\_
- Analizando los datos, ¿de qué manera se puede calcular la media aritmética para ambos? \_\_\_\_\_
- ¿Estos datos permiten realizar el pronóstico de la siguiente calificación? ¿Por qué? \_\_\_\_\_
- A partir de cuál de los grupos de calificaciones consideran que se presenta mayor diferencia, la de Andrea o la de Diego, con respecto a su media aritmética. \_\_\_\_\_
- Elaboren una hipótesis acerca de lo que consideren que representa una mayor o menor diferencia con respecto a la media, es decir, al comparar cada uno de los datos con el promedio de todos ellos. \_\_\_\_\_

2. Comparen sus resultados con los de sus compañeros y con la asesoría del profesor analicen algunas de las hipótesis planteadas por los equipos e interpreten cada una para comprender la idea que cada una aporta, registren sus observaciones y conclusiones en su cuaderno.



**PRACTÍCALO**



**Actividad 7.1**

- Lee la situación planteada, analízala según tu criterio y responde.
  - En la tabla registra, de menor a mayor, las calificaciones de Andrea y Diego.

Andrea								
Diego								

- ¿Cuál es la media aritmética para Andrea? \_\_\_\_\_
  - Escribe la operación que permite conocer este resultado. \_\_\_\_\_
  - ¿Cuál es la media aritmética para Diego? \_\_\_\_\_
  - Escribe la operación que permite conocer este resultado. \_\_\_\_\_
- Grafica en tu cuaderno las calificaciones de la tabla de la sección "Acuérdate de...", tal como aparecen en la tabla.
  - Ubica sobre el eje de las ordenadas el punto correspondiente a la media aritmética y traza una línea paralela al eje  $x$ .
    - ¿En cuál de las gráficas observas que los datos están más dispersos con respecto a la media? \_\_\_\_\_
    - ¿Por qué ocurre esto? \_\_\_\_\_
  - Al ver las gráficas, ¿cómo puedes determinar cuál de los dos hermanos logra tener menos variación en sus calificaciones? \_\_\_\_\_
  - Entonces, ¿qué consideras que significa que las calificaciones son más dispersas entre sí? \_\_\_\_\_
  - ¿Analizar estas gráficas y conocer la media aritmética es suficiente para poder hacer un pronóstico de su siguiente evaluación? \_\_\_\_\_ Justifica tu respuesta. \_\_\_\_\_
- Lee nuevamente la hipótesis que hiciste en la sección anterior y analiza si cambió tu definición al ver estas representaciones gráficas. Registra una conclusión acerca de esto. \_\_\_\_\_
- Compara tus resultados con los de tus compañeros y, con la ayuda del profesor respondan, ¿qué estrategia pueden usar o de qué manera es posible medir esta dispersión de datos?



**PRACTÍCALO**



**Actividad 7.2**

- Con base en las actividades anteriores, respondan las preguntas.
  - ¿Cuál es la calificación más alta de Andrea? \_\_\_\_\_ ¿Cuál es su calificación más baja? \_\_\_\_\_
  - ¿Cuál es la diferencia entre estas calificaciones? \_\_\_\_\_
  - ¿Cuál es la calificación más alta de Diego? \_\_\_\_\_ ¿Cuál es su calificación más baja? \_\_\_\_\_
  - ¿Cuál es la diferencia entre estas calificaciones? \_\_\_\_\_

- ¿Cuál de los dos tiene un menor **rango**, o diferencia entre el dato mayor y el menor? \_\_\_\_\_
- ¿Consideran que el rango da información suficiente para conocer si los datos presentan alguna regularidad que tan dispersos están entre ellos con respecto a su promedio? \_\_\_\_\_



**Glosario**

**Rango.** Es la diferencia entre el dato mayor y el dato menor en una serie de datos.

- Justifiquen su respuesta. \_\_\_\_\_
- ¿Cuál consideran que es la utilidad de conocer el rango de una serie de datos al momento de valorar si éstos son más regulares o dispersos? \_\_\_\_\_
- Comparen sus respuestas con las de sus compañeros y con la asesoría del profesor elaboren una conclusión que explique, de forma breve, cuál es la función del rango y definan su propósito principal.



**PRACTÍCALO**



**Actividad 7.3**

- Al llegar a casa, Diego y Andrea fueron a hablar con su papá, él quería darse una idea de la posible calificación que obtendrían sus hijos en el siguiente examen y pensó que si analizaba los resultados que ya tenían podría hacer una predicción. Se le ocurrió que si encontraba la diferencia entre cada calificación y su promedio se podría dar una mejor idea.

Número de examen	1	2	3	4	5	6	7	8
Andrea	6.5	7.5	10	7	9	5	10	5
Diego	8	7.5	7	8	8	7	7.5	7

- Completen la tabla que diseñó el papá de Andrea y Diego, y contesten las preguntas.

Andrea		Diego	
Calificación	Desviación (Calificación-promedio)	Calificación	Desviación (Calificación-promedio)
6.5	$6.5 - 7.5 = -1$	8	$8 - 7.5 = 0.5$
7.5		7.5	
10		7	
7		8	
9		8	
5		7	
10		7.5	
5		7	
Total		Total	

- ¿Cuánto suman las desviaciones para cada caso? \_\_\_\_\_
- ¿Por qué consideran que ocurre? \_\_\_\_\_
- Si solamente se suman las cantidades positivas de Andrea, ¿cuál es el total? \_\_\_\_\_

- ¿Qué resultado se obtiene si se suman sólo las cantidades de Andrea que tienen signo negativo? \_\_\_\_\_
- ¿Esta misma situación ocurre para Diego? \_\_\_\_\_
- ¿Por qué se presenta esto? \_\_\_\_\_
- ¿Con estos resultados es posible hacer una predicción sobre la siguiente calificación? \_\_\_\_\_
- Expliquen su respuesta. \_\_\_\_\_
- Entonces, ¿de qué manera consideran que es posible aprovechar las cantidades que se obtienen al calcular la desviación de cada dato? \_\_\_\_\_

2. En equipos, analicen sus resultados y escriban una conclusión acerca de qué manera es posible aprovechar las desviaciones de cada dato para conocer la dispersión de la serie de datos.



**PRACTÍCALO**



**Actividad 7.4**

1. El papá de Andrea y Diego, para resolver su duda, fue a hablar con el profesor de matemáticas, le comentó del análisis que hizo de las calificaciones de sus hijos y el profesor le sugirió que hiciera nuevamente este cálculo, pero ahora utilizando los valores absolutos de la desviación de cada dato.

a) Completen las tablas y respondan las preguntas.

Andrea		Diego	
Calificación	Desviación (Calificación-promedio)	Calificación	Desviación (Calificación-promedio)
6.5	$ 6.5 - 7.5  = 1$	8	$ 8 - 7.5  = 0.5$
7.5		7.5	
10		7	
7		8	
9		8	
5		7	
10		7.5	
5		7	
Total		Total	

- ¿Los resultados fueron iguales o distintos a las tablas hechas en la actividad anterior? \_\_\_\_\_
- ¿Por qué ocurrió esto? \_\_\_\_\_
- ¿Qué representan estos nuevos resultados? \_\_\_\_\_
- ¿Cuánto suman las desviaciones para Andrea? \_\_\_\_\_
- En el caso de Diego, ¿cuánto suman las desviaciones? \_\_\_\_\_
- Entonces, ¿cuál es el promedio de las desviaciones para Andrea? \_\_\_\_\_

- ¿Cuál es el promedio de las desviaciones para Diego? \_\_\_\_\_
- b) Reflexionen sobre el significado de las respuestas anteriores y respondan.
- ¿Qué significa que la desviación media tenga una diferencia menor en comparación con la media aritmética? \_\_\_\_\_
  - ¿Por qué razón la desviación media presenta una diferencia mayor en comparación con la media aritmética? \_\_\_\_\_

2. Contrasten sus respuestas con las de sus compañeros y con la ayuda del profesor elaboren una explicación breve que indique por qué la desviación media es una medida que proporciona una información más adecuada que el rango para conocer la dispersión de una serie de datos.



**PRACTÍCALO**



**Actividad 7.5**

1. En una empresa van a contratar nuevo personal, para ello dedicaron una hora en la entrevista de cada aspirante, sin embargo para agilizar las entrevistas quieren determinar el tiempo ideal para cada una y optimizar los tiempos; en el primer día entrevistaron 10 personas, sus tiempos en minutos fueron los siguientes:

64, 18, 40, 23, 37, 30, 28, 43, 26, 20

- ¿Cuál es la media aritmética? \_\_\_\_\_
  - Escriban la operación que llevaron a cabo. \_\_\_\_\_
- a) Con base en estos datos, completen la tabla.

Número de entrevista	Tiempo en minutos	Tiempo-media aritmética	Valor absoluto de la diferencia
1	64		
2	18		
3	40		
4	23		
5	37		
6	30		
7	28		
8	43		
9	26		
10	20		
Total			

- ¿Cuál es la desviación media para esta serie de datos? \_\_\_\_\_
- Escriban la operación que realizaron. \_\_\_\_\_
- Si lo que se quiere es definir un tiempo adecuado para las entrevistas, ¿cómo se puede utilizar el dato que da la desviación media? \_\_\_\_\_
- Por lo tanto, ¿cuál es el tiempo de duración más adecuado para que programen las nuevas entrevistas de trabajo? \_\_\_\_\_

- ¿Cómo determinaron el tiempo de duración de cada entrevista? \_\_\_\_\_
- Entonces, ¿cuál es la manera de aplicar la desviación media de una serie de datos al momento de tomar decisiones sobre los resultados? \_\_\_\_\_

2. Contrasten sus resultados con algunos de sus compañeros y con la asesoría del profesor elaboren una definición formal del significado práctico del uso de la desviación media en relación con el número mayor y menor con respecto a la media.

**Para leer más**

Para calcular la desviación media de una cierta cantidad de datos  $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n$ , cuya desviación media de cada uno de los datos es  $m$  se utiliza la fórmula:

$$DM = \frac{(|x_1 - x| + |x_2 - x| + |x_3 - x| + |x_4 - x| + \dots + |x_n - x|)}{n}$$

La desviación media la podemos definir como la media aritmética de todos los valores absolutos obtenidos de las desviaciones de cada dato respecto a la media.



**LO QUE APRENDÍ**



1. En una empresa textil están pensando en renovar algunas máquinas que por el tiempo de uso, su reparación es muy tardada, lo que provoca pérdidas en la producción. Para decidir cuáles máquinas van a reemplazar, el supervisor tomó los tiempos que cada máquina se detenía por causas de reparación.

Máquina	1	2	3	4	5
Máquina 1	45	74	76	48	59
Máquina 2	82	62	72	78	55
Máquina 3	26	41	38	35	44
Máquina 4	33	45	53	68	77
Máquina 5	51	60	76	54	64

a) Registra en la tabla la media aritmética del tiempo de reparación de cada máquina.

Máquina	1	2	3	4	5
Media					

b) Construye en tu cuaderno las tablas para encontrar el valor de la desviación media de cada máquina y regístralas en la tabla.

Máquina	1	2	3	4	5
Desviación media					

- Si en primer lugar se van a cambiar sólo 3 máquinas, ¿cuáles son las que se tienen que cambiar primero? \_\_\_\_\_
- De las máquinas restantes, ¿cuál es la siguiente para ser reemplazada? \_\_\_\_\_

2. Contrasta tus tablas y tus respuestas con las de tus compañeros y con la ayuda de tu profesor concluye cuál es la manera más adecuada de resolver una situación que maneja una gran cantidad de datos, o si hay alguna otra manera de resolverla.

**Desarrolla tus habilidades**

1. Lee la situación indicada, diseña una estrategia para resolverla y contesta las preguntas.

a) Lleva a cabo el registro de tus calificaciones de los tres primeros bimestres en todas las asignaturas y elabora en tu cuaderno una tabla para presentarlas de manera ordenada, por ejemplo.

Asignatura	Calificaciones		
	Bimestre 1	Bimestre 2	Bimestre 3
Matemáticas			
Ciencias 3, Química			

• ¿Cuál es el promedio de cada bimestre? 1° \_\_\_\_\_ 2° \_\_\_\_\_ 3° \_\_\_\_\_

b) Calcula la desviación media de cada bimestre y elabora en tu cuaderno una tabla donde registres la desviación de cada dato, por ejemplo:

Asignatura	Desviación		
	Bimestre 1	Bimestre 2	Bimestre 3
Matemáticas			
Ciencias 3, Química			

• ¿En cuál de los tres bimestres obtuviste mejores calificaciones? \_\_\_\_\_

• ¿En cuál de los bimestres observaste una mayor dispersión entre tus evaluaciones? \_\_\_\_\_

• ¿Qué conclusión puedes obtener a partir de estos datos? \_\_\_\_\_

• ¿Si tuvieras que tomar alguna decisión con base en este estudio estadístico para valorar tu desempeño, qué harías? \_\_\_\_\_

2. Compara tus resultados con los de tus compañeros y con la asesoría de tu profesor determina, ¿cuál es la aplicación y utilidad en la vida cotidiana que tiene el poder calcular la desviación media de una serie de datos?

**USALAS TIC**



Visita la página <https://www.easycalculation.com/es/statistics/standard-deviation.php> (Consultada el día 22 de enero de 2017, a las 17:26 horas), en ella encontrarás una calculadora estadística que te permitirá calcular la desviación estándar de los datos agrupados que ingreses, además da otras cantidades que en estudios posteriores te serán de utilidad. Después de tu visita comenta con tu profesor, ¿cuál es la utilidad práctica que tiene el contar con recursos como éste y cómo puedes aplicarlos en la vida cotidiana?

Evaluación tipo PISA

1. En un laboratorio, al hacer observaciones en el crecimiento de algunos microorganismos, se dieron cuenta de que al elaborar el registro diario se podía representar por la siguiente sucesión: 9, 18, 31, 48, 69, 94 ... n  
 ¿Cuál será la población de este microorganismo después de 50 días?  
 a) 4953                      b) 5154                      c) 5359                      d) 5568

Explica:

- ¿Cuál es el procedimiento para encontrar la expresión algebraica que representa el crecimiento del microorganismo? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el crecimiento? \_\_\_\_\_

2. Analiza las siguientes afirmaciones y determina cuál de ellas expresa correctamente la definición de un sólido de revolución. Selecciona "Sí" o "No", según corresponda.

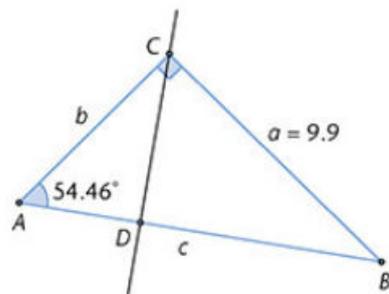
a) Todos los sólidos de revolución se forman sólo cuando se gira un triángulo, un rectángulo o una circunferencia, por cualquiera de sus lados.	Sí	No
b) Un sólido de revolución se forma cuando una figura plana se gira sobre un eje, las principales son el triángulo, el rectángulo y la circunferencia que forman, respectivamente, el cono, el cilindro y la esfera.	Sí	No
c) Un sólido de revolución es una forma de crear objetos, como botellas, jarras, cazuelas, vasos, etcétera, por eso es muy útil en la vida cotidiana.	Sí	No
d) Un sólido de revolución es una figura que tiene volumen y se puede descomponer en una superficie plana y que tiene al menos una cara plana y una cara curva.	Sí	No

3. Observa la imagen y responde las siguientes preguntas.

- a) ¿Cuál es la pendiente o inclinación del brazo de la grúa?  
 a) 3                              b) 1  
 c) 2                              d) 4
- b) ¿Cuál es la función trigonométrica que permite calcular el ángulo A?  
 \_\_\_\_\_
- c) ¿Cuál es la amplitud?  
 a) 71.5°                      b) 69.4°  
 c) 78.2°                      d) 80.1°



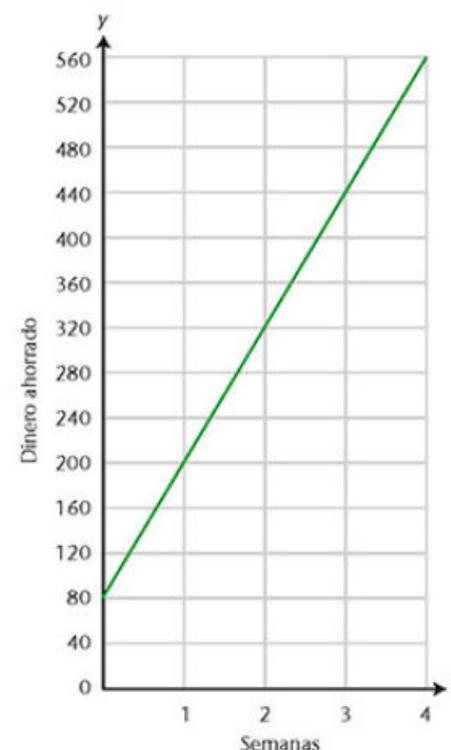
4. Observa la siguiente figura y responde: ¿cuáles son los valores del  $\overline{CD}$ , el lado  $b$  y el lado  $c$ , respectivamente?



a) $\overline{CD} = 4.35$	$b = 8.04$	$c = 11.21$
b) $\overline{CD} = 6.14$	$b = 9.08$	$c = 13.27$
c) $\overline{CD} = 5.75$	$b = 7.07$	$c = 12.17$
d) $\overline{CD} = 7.25$	$b = 6.03$	$c = 14.25$

Evaluación tipo PISA

5. Julián está ahorrando, para ello junta todas las monedas que le sobran de la semana y las guarda. La gráfica muestra el ahorro durante todo el mes.



- ¿Con cuánto dinero inició su ahorro? \_\_\_\_\_
- ¿Cuánto dinero ahorró a partir de la primera semana?  
 a) \$100                      b) \$80                      c) \$150                      d) \$120
- ¿Cuál fue la cantidad total de dinero que Julián logró ahorrar al final del mes? \_\_\_\_\_

6. Ana y Osvaldo compran tarjetas de deportistas y las intercambian para ganar puntos con los que pueden obtener un álbum de deportes. Ana ha conseguido 4, 7, 8, 14 y 17 puntos en sus intercambios y Osvaldo ha conseguido 3, 4, 7, 9 y 12. ¿Cuál de ellos presenta una menor dispersión entre los puntos que ha ganado?

- |   |
|---|
| a) Los puntos de Paris, porque su media es 7 y la media de la serie dos es 10.                    |
| b) Los puntos de Osvaldo, porque la desviación media es 4.4 y la desviación de la serie dos es 2. |
| c) Los puntos de Paris, porque la desviación media es 2 y la desviación de la serie dos es 4.4    |
| d) Los puntos de Paris, porque la media es 10 y la media de la serie dos es 7.                    |

# Bloque 5

## Aprendizajes esperados:

- Resuelve y plantea problemas que involucran ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones y ecuaciones de segundo grado.
- Resuelve problemas que implican calcular el volumen de cilindros y conos o cualquiera de las variables que intervienen en las fórmulas que se utilicen. Anticipa cómo cambia el volumen al aumentar o disminuir alguna de las dimensiones.
- Lee y representa, gráfica y algebraicamente, relaciones lineales y cuadráticas.
- Resuelve problemas que implican calcular la probabilidad de eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.

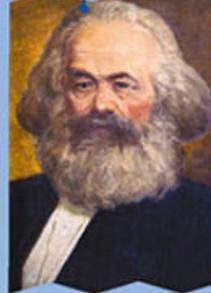
La superficie de un cono se forma al girar la hipotenusa de un triángulo rectángulo sobre uno de sus catetos.

## Contexto histórico

1810  
Inicia la Independencia de México.



1848  
Carlos Marx escribe el Manifiesto del Partido Comunista.



1910  
Inicia la Revolución Mexicana.



1914  
Inicia la Primera Guerra Mundial.



1980  
La sonda espacial Voyager 2 fotografía al planeta Saturno.



## Hechos matemáticos

1805  
Pierre-Simon Laplace desarrolla estudios sobre cálculo integral y ecuaciones diferenciales en ecuaciones parciales.

1880  
Georg Ferdinand publicó trabajos sobre la teoría de conjuntos. Demostró que todos los conjuntos infinitos tienen el mismo tamaño.

1916  
Albert Einstein desarrolló la teoría de la relatividad general, basando sus cálculos en un espacio-tiempo de cuatro dimensiones (tres espaciales y una temporal).

1994  
Andrew Wiles demostró el último teorema de Fermat.

Eje temático	Sentido numérico y pensamiento algebraico
Tema	Patrones y ecuaciones
Contenido 1	Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones. Formulación de problemas a partir de una ecuación dada.



**ACUÉRDATE DE...**



1. Analicen la situación planteada y contesten las preguntas.

a) Aidé y Beatriz compraron una tira de tela de 17 m de largo, al repartirla, Beatriz se quedó con una que mide 3 m más que la de Aidé. Planteen la ecuación que les permita conocer el número de metros de tela que tiene cada una.

- Elaboren un esquema que represente esta situación.

- ¿Cómo representaron la incógnita? \_\_\_\_\_
- ¿Qué estrategia utilizaron para resolver el problema? \_\_\_\_\_

- ¿Cuál es la expresión algebraica que modela esta situación? \_\_\_\_\_
- Escriban el algoritmo completo que utilizaron.

- ¿Cuál es el valor de la incógnita? \_\_\_\_\_
- La incógnita, ¿representa el segmento de tela más corto o el más largo? \_\_\_\_\_  
¿Por qué ocurre esto? \_\_\_\_\_

- Entonces, ¿cuántos metros de tela tiene Beatriz? \_\_\_\_\_  
¿Cuántos metros tiene Aidé? \_\_\_\_\_
- ¿Cómo pueden comprobar que sus resultados son correctos? \_\_\_\_\_

- ¿Consideran que es posible encontrar la solución a este problema utilizando algún otro procedimiento? \_\_\_\_\_  
Expliquen su respuesta. \_\_\_\_\_

2. Contrasten sus resultados y estrategias con los de sus compañeros y con la ayuda del profesor determinen cómo es posible verificar que un planteamiento es correcto y cumple con las condiciones indicadas en un problema.



**PRACTICALO**



**Actividad 1.1**

1. Para adomar un periódico mural, Juan cortó algunas figuras geométricas, entre ellas, un triángulo cuyos lados fueran 3 números consecutivos; cuando midió el perímetro de su triángulo el resultado fue 33 cm.

a) Analicen la situación y propongan una estrategia que les permita conocer las medidas de los lados del triángulo que hizo Juan.

- Elaboren en su cuaderno un esquema que represente esta situación.
- ¿Qué estrategia utilizaron para representar las medidas de los lados del triángulo? \_\_\_\_\_

- Escriban en su cuaderno el algoritmo con operaciones completas que realizaron para solucionar este problema.
- ¿De qué manera definieron algebraicamente la(s) incógnita(s)? \_\_\_\_\_

- ¿Cuál es la expresión algebraica que modela esta situación? \_\_\_\_\_

- Entonces, ¿cuál es la medida de cada lado? \_\_\_\_\_
- ¿Cómo pueden comprobar que su resultado es correcto y cumple con los términos que indica la situación original? \_\_\_\_\_

2. Contrasten sus resultados con los de algunos de sus compañeros, y con la asesoría del profesor determinen cuál es el planteamiento más adecuado que permite resolver esta situación de una forma práctica.



**PRACTICALO**



**Actividad 1.2**

1. Víctor y Jazmín se turnan para cuidar el jardín de su casa; cuando lo poda Víctor, se tarda 4 horas, y cuando lo hace Jazmín, se tarda 6; pero el próximo fin de semana podrán podarlo juntos.

- a) Diseñen una estrategia que les permita conocer el tiempo que tardarán en terminar el trabajo entre los dos.
- Elaboren un esquema que represente esta situación.

- Expliquen qué estrategia emplearon para encontrar el tiempo. \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es la expresión algebraica que modela esta situación? \_\_\_\_\_
- ¿Cómo plantearon la incógnita en este problema? \_\_\_\_\_

- Realicen el algoritmo que les permitió encontrar el resultado.

- Entonces, ¿cuánto tiempo tardan en podar su jardín si lo hacen juntos? \_\_\_\_\_
- ¿De qué manera se puede comprobar este resultado? \_\_\_\_\_
- ¿Cómo representaron el resultado, con un decimal, con una fracción o con algún otro número? \_\_\_\_\_  
Justifiquen su respuesta. \_\_\_\_\_

2. Contrasten sus respuestas con las de sus compañeros, y con la ayuda del profesor determinen cuál es la importancia de ubicar y definir adecuadamente la incógnita en una expresión algebraica que modela una situación.



**PRACTICALO**



**Actividad 1.3**

1. El papá de Hugo y Alberto les dio dinero para que se compraran pantalones y playeras. Hugo compró 3 pantalones y 5 playeras, por lo que pagó \$1 450; Alberto compró 2 pantalones y 7 playeras, y pagó \$1 260.

- a) Diseñen una estrategia que les permita conocer el precio unitario de cada artículo.
- En su cuaderno hagan un esquema que represente esta situación.
  - ¿Qué operación plantearon para modelar este problema? \_\_\_\_\_
  - ¿Por qué consideran que es la opción más adecuada para encontrar el valor unitario de cada prenda? \_\_\_\_\_
  - Escriban en su cuaderno el desarrollo de las operaciones que llevaron a cabo.
  - ¿Cuál es el costo de cada pantalón? \_\_\_\_\_
  - ¿Cuál es el costo de cada playera? \_\_\_\_\_
  - ¿Cómo se puede demostrar que estas cantidades son correctas? \_\_\_\_\_
  - ¿Qué otros métodos permiten encontrar la solución a esta situación? \_\_\_\_\_

2. Contrasten sus resultados con los de otras parejas, y con la ayuda del profesor determinen: ¿cuál de los procedimientos que usaron consideran el más adecuado para resolver esta situación?, ¿cuántos métodos de solución hay?, ¿cuál es la mejor manera de comprobar los resultados?



**PRACTICALO**



**Actividad 1.4**

1. Tomando como base las conclusiones de la actividad anterior, planteen un problema para cada inciso donde sea posible aplicar como modelo de solución el sistema de ecuaciones dado.

- a)  $5x - 3y = 15$   
 $4x + 2y = 100$
- Escriban en el recuadro el problema que puede modelarse con la ecuación anterior y sus operaciones.

- ¿Qué procedimiento usaron para diseñar la situación? \_\_\_\_\_
  - ¿Cómo se puede comprobar el resultado? \_\_\_\_\_
- b)  $2x + y = 6$   
 $x + 4y = 17$
- Escriban el problema que puede modelarse con la ecuación anterior. \_\_\_\_\_
  - Escriban en su cuaderno las operaciones realizadas.
  - ¿Qué procedimiento utilizaron para plantear la situación? \_\_\_\_\_
  - ¿Cómo se puede comprobar el resultado? \_\_\_\_\_

2. Contrasten sus resultados con los de otros equipos, y con la ayuda del profesor analicen las estrategias que utilizaron para plantear cada situación y determinen: ¿cuál fue la base que les permitió realizar cada planteamiento, ¿y es posible solucionar por otros métodos los problemas que plantearon?



**PRACTICALO**



**Actividad 1.5**

1. Pedro compró un terreno pequeño y tiene la intención de construir un invernadero, para ello debe dividirlo en 9 partes iguales, al hacer algunas operaciones concluyó que lo ideal es que en cada sector el largo debe ser 4 metros más grande que el ancho y cada uno queda con una área de  $77 \text{ m}^2$ .
- a) Diseñen en su cuaderno una estrategia que les permita conocer las medidas del largo y el ancho de cada sector y escriban las operaciones que consideren necesarias.
- Realicen en su cuaderno un esquema que modele la situación planteada
  - ¿Qué estrategia decidieron utilizar para resolver esta situación? \_\_\_\_\_
  - ¿Por qué consideran que su procedimiento es el más adecuado? \_\_\_\_\_
  - ¿Qué expresión algebraica modelaron para poder encontrar la solución del problema? \_\_\_\_\_
  - ¿Qué características tiene esta expresión algebraica? \_\_\_\_\_
  - Registren, en su cuaderno, las operaciones que realizaron para conocer las dimensiones de cada sector.
  - ¿Cuánto mide de largo de cada sector? \_\_\_\_\_
  - ¿Cuánto mide de ancho? \_\_\_\_\_
  - ¿De qué manera es posible comprobar que estos resultados son correctos? \_\_\_\_\_

2. Contrasten sus procedimientos y resultados con algunos de sus compañeros y, con la ayuda de su profesor, determinen cuál es la expresión algebraica más adecuada para modelar la situación dada y cuál es el procedimiento de solución pertinente.



**PRACTICALO**



**Actividad 1.6**

1. Tomando como base las conclusiones de la actividad anterior, planteen para cada expresión cuadrática una situación que modele cada una y resuélvanlas.

- a)  $21x^2 = 7x$
- Escriban la situación que se puede modelar con esta expresión. \_\_\_\_\_
  - ¿Qué estrategia utilizaron para adaptar la expresión algebraica a la situación que crearon? \_\_\_\_\_
  - ¿Qué tipo de expresión algebraica es? \_\_\_\_\_
  - ¿Qué procedimiento permite encontrar la raíz o solución? \_\_\_\_\_
  - En el siguiente espacio, registren las operaciones que realizaron.

- ¿Cuál es el valor de  $x$ ? \_\_\_\_\_
- ¿Cómo se puede demostrar que esta respuesta es correcta? \_\_\_\_\_
- ¿Consideran que hay alguna otra manera de solucionar esta situación? Expliquen su respuesta. \_\_\_\_\_

- b)  $3y^2 = 300$
- Escriban la situación que se puede modelar con esta expresión. \_\_\_\_\_
  - ¿Qué estrategia utilizaron para adaptar la expresión algebraica a la situación que crearon? \_\_\_\_\_
  - ¿Qué tipo de expresión algebraica es? \_\_\_\_\_
  - ¿Qué procedimiento permite encontrar la raíz o solución? \_\_\_\_\_
  - En el siguiente espacio, registren las operaciones que realizaron

- ¿Cuál es el valor de  $y$ ? \_\_\_\_\_
- ¿Cómo se puede demostrar que esta respuesta es correcta? \_\_\_\_\_
- ¿Consideran que hay alguna otra manera de solucionar esta situación? \_\_\_\_\_  
Expliquen su respuesta.

c)  $x^2 - 9x = 18$

- Escriban la situación que se puede modelar con esta expresión. \_\_\_\_\_
- ¿Qué estrategia utilizaron para adaptar la expresión algebraica a la situación que crearon? \_\_\_\_\_
- ¿Qué tipo de expresión algebraica es? \_\_\_\_\_
- ¿Qué procedimiento permite encontrar la raíz o solución? \_\_\_\_\_
- En el siguiente espacio registren las operaciones que realizaron.

- ¿Cuál es el valor de  $x$ ? \_\_\_\_\_
- ¿Cómo se puede demostrar que esta respuesta es correcta? \_\_\_\_\_
- ¿Consideran que hay alguna otra manera de solucionar esta situación? \_\_\_\_\_  
Expliquen su respuesta.

2. Contrasten sus planteamientos y respuestas con los de sus compañeros, y con la ayuda del profesor determinen: ¿qué características de las expresiones cuadráticas les permitieron modelar cada situación?, ¿cuál es la manera que consideran más adecuada para resolver cada una?, y ¿qué procedimiento permite verificar los resultados obtenidos?

**Para leer más**

Una manera de diseñar un problema es pensar primero en los números y las operaciones que los relacionan y transformarlos en una pregunta, por ejemplo:  $x + \frac{1}{2}x = 340$  podría ser, ¿a qué número hay que sumarle la mitad de sí mismo para que el resultado sea trescientos cuarenta?, y a partir de esta pregunta elaborar algún contexto, por ejemplo:

El papá de Luis le dijo que del dinero que ahorrara durante una semana le daría la mitad más para ayudarlo, si en total ahora tiene \$340, ¿cuánto dinero ahorró en la semana y cuánto le dio su papá?

**Para tener en cuenta**

Al resolver una situación matemática es conveniente que tengas en cuenta estos 5 aspectos:

1. *Leer y entender* la situación, esto significa que debes ser capaz de explicarla con tus propias palabras.
2. *Identificar datos*, todos los que sean útiles y diferenciarlos de preguntas o información adicional.
3. *Identificar preguntas*, esto significa que debes ser capaz de decir claramente qué es lo que estás tratando de responder.
4. *Realizar un planteamiento*, decidir de qué manera vas a resolver la situación, qué operaciones vas a utilizar y por qué lo decidiste así.
5. *Resolver y comprobar*, en esta etapa realizas las operaciones o algoritmos necesarios para encontrar la solución del problema y comprobar los resultados.



**LO QUE APRENDÍ**



1. Analiza la situación dada y responde las preguntas.

- a) Un cuaderno profesional de hojas blancas tiene  $520 \text{ cm}^2$  de área y se sabe que su largo es 6 cm mayor que su ancho. Con estos datos diseñen una estrategia que les permita conocer las dimensiones del cuaderno.
- Elabora un esquema que represente esta situación.

- ¿Cuál fue la estrategia que diseñaste? Descríbela. \_\_\_\_\_
- ¿Qué expresión algebraica te permite encontrar la solución? \_\_\_\_\_
- ¿De qué tipo es esta expresión algebraica? \_\_\_\_\_
- Anota las operaciones que realizaste.

- ¿Cuántas soluciones hacen verdadera la expresión algebraica que planteaste? \_\_\_\_\_  
¿Por qué ocurre esto? \_\_\_\_\_
- ¿Cómo puedes comprobar que tu resultado es correcto? \_\_\_\_\_
- ¿Consideras que es posible encontrar la solución utilizando algún otro procedimiento? \_\_\_\_\_  
Argumenta tu respuesta. \_\_\_\_\_

2. Contrasta tus procedimientos y resultados con los de tus compañeros y, con la ayuda del profesor determina cuál es la importancia de saber plantear ecuaciones y seleccionar el método más conveniente de solución para resolver una situación como ésta.

**USA LAS TIC**



Para reafirmar los algoritmos al resolver ecuaciones te recomendamos visitar la página <http://www.thatquiz.org/es-0/matematicas/algebra/> (Consultada el día 5 de diciembre de 2016, a las 12:22 horas), selecciona la opción "resolver" (x) y soluciona los ejercicios subiendo el nivel de manera gradual. Después de tu visita comenta tus impresiones con tu profesor y concluye, ¿qué ventajas tiene utilizar un recurso como éste al momento de trabajar con problemas?

**Desarrolla tus habilidades**

1. Reúnanse en equipo, analicen la siguiente situación y respondan las preguntas.

a) Un triángulo rectángulo tiene un área de  $105 \text{ cm}^2$ , y se sabe que las medidas de su base y su altura son números consecutivos. Diseñen una estrategia que les permita conocer sus dimensiones.

- ¿Cuál de las dimensiones tomaron como base para diseñar su estrategia? \_\_\_\_\_  
¿Por qué? \_\_\_\_\_
- ¿Con qué letra representaron esta dimensión? \_\_\_\_\_
- ¿Qué expresión algebraica modela esta situación? \_\_\_\_\_
- ¿De qué tipo de ecuación se trata? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es el procedimiento de solución que consideran más adecuado? \_\_\_\_\_
- ¿Por qué lo consideran así? \_\_\_\_\_
- ¿Cuáles son las dimensiones de la base y la altura? Base: \_\_\_\_\_  
Altura: \_\_\_\_\_
- ¿Consideran que existe algún otro procedimiento para encontrar la solución a esta situación? \_\_\_\_\_ Justifiquen su respuesta.
- ¿De qué manera pueden comprobar que su resultado es correcto? \_\_\_\_\_

2. Contrasten sus resultados con los de otros equipos y con la ayuda del profesor determinen cuál es la importancia de saber combinar procedimientos aritméticos, algebraicos y geométricos al resolver una situación como la que se plantea.

Eje temático	Forma, espacio y medida
Tema	Medida
Contenido 2	Análisis de las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto. Cálculo de las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto.



**ACUÉRDATE DE...**



- Para empezar, es necesario que tengan a la mano algún material que puedan cortar y de preferencia modelar, como plastilina, arcilla o barro.
  - Construyan 5 cilindros y 5 conos de un tamaño que consideren adecuado. También pueden adquirir estas figuras hechas de unicel.
  - Realicen un corte recto en cada cuerpo, procurando que cada uno forme una figura geométrica distinta.
    - Tracen las figuras geométricas que obtuvieron al cortar los cilindros.



- En su cuaderno, tracen todas las figuras obtenidas a partir del corte de los conos.
- c) Respondan las siguientes preguntas.
  - ¿Qué estrategia utilizaron para que los cortes en los cilindros no fueran iguales? \_\_\_\_\_
  - ¿Utilizaron la misma estrategia para cortar los conos o una distinta? \_\_\_\_\_
  - ¿Hay figuras geométricas similares para el cono y para el cilindro? \_\_\_\_\_  
¿Por qué ocurre esto? \_\_\_\_\_
  - ¿Conocen el nombre de todas las figuras geométricas que se formaron? \_\_\_\_\_  
Registren los nombres. \_\_\_\_\_
  - ¿Qué objetos de la vida cotidiana consideran que fueron realizados a partir de alguna de estas figuras? \_\_\_\_\_

2. Contrasten sus resultados con los de sus compañeros, y con la ayuda del profesor determinen cuántas figuras geométricas distintas es posible obtener a partir de la realización de cortes rectos en un cono y en un cilindro, y elaboren una hipótesis acerca de cuál consideran que es su aplicación en la vida cotidiana.



**PRACTICALO**



**Actividad 2.1**

1. Observen las imágenes, analicen los cortes realizados a un cilindro por medio de un plano, completen la tabla y contesten las preguntas.

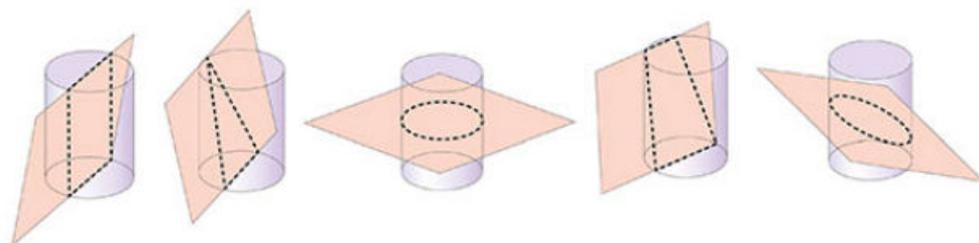


Figura 1    Figura 2    Figura 3    Figura 4    Figura 5

a) Completen la tabla registrando la figura que se obtiene de cada corte y la descripción de la forma en que se elaboró cada uno de ellos.

Figura	Figura obtenida al hacer el corte	Forma en que se hizo el corte
1		
2		
3		
4		
5		

b) Bajo la supervisión del profesor, hagan los cortes que acaban de analizar y utilicen los materiales sugeridos en la sección "Acuérdate de..." (plastilina, unicel, barro, arcilla).

• ¿Consideran que es posible realizar algún corte distinto a los mostrados en la imagen? Expliquen su respuesta.

• ¿En qué objetos de la vida cotidiana se utilizan este tipo de cortes? Den algunos ejemplos.



Figura 1    Figura 2    Figura 3    Figura 4    Figura 5

2. Analicen los objetos mostrados en la siguiente imagen y contesten las preguntas.

• La figura 1 es una teja de las que se utilizan para decorar las fachadas de las casas, ¿a partir de qué corte se obtiene esta forma?

• La figura 2 muestra filtros para aspiradoras y la figura 4 es un codo para tubería, ¿a partir de qué figura se pueden obtener estos cortes?

• La figura 3 es una pala dispensadora, ¿cómo consideran que se realizó el corte para formarla?

• La figura 5 es un asador sencillo, ¿cómo se realizó el corte del cilindro para poder hacerlo?

3. Contrasten sus respuestas con las de de sus compañeros, y con la ayuda del profesor definan de manera concreta qué figuras geométricas se pueden obtener al realizar cortes por medio de un plano en un cilindro, y cuál es su aplicación práctica en la vida cotidiana.



**PRACTICALO**



**Actividad 2.2**

1. Analiza los cortes realizados a un cono por medio de un plano, completa la tabla y contesta las preguntas.

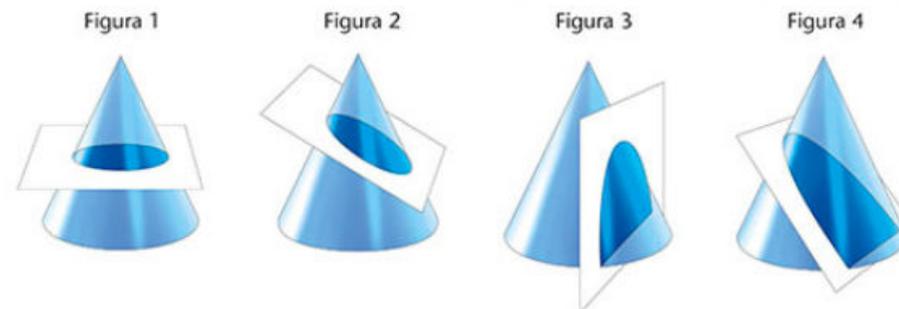


Figura 1    Figura 2    Figura 3    Figura 4

a) Completa la tabla indicando la figura que se busca en cada corte y la forma en que se realizó cada uno.

Figura	Figura obtenida al hacer el corte	Forma en que se hizo el corte
1		
2		
3		
4		

• El cono es una figura de revolución, es decir, se forma a partir de la rotación, ¿qué figura se utiliza como base para crear un cono?

• ¿Qué objetos de la vida cotidiana conoces que estén formados a partir de los cortes realizados a un cono?

• ¿Consideras que es posible realizar algún corte distinto que permita obtener otra figura? Justifica tu respuesta.

2. Contrasta tus respuestas con las de compañeros, y con la asesoría del profesor define cuáles son las principales características de las figuras cónicas. Formula una hipótesis que explique la utilidad que tienen en la vida cotidiana.



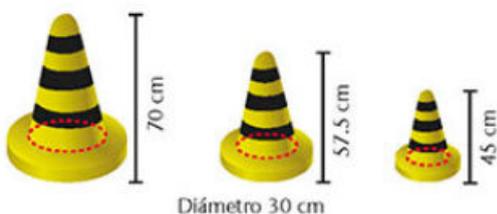
**PRACTICALO**



**Actividad 2.3**

1. Nicolás es policía de tránsito, hoy recibió algunos conos viales porque debe prepararlos para ponerles luz ya que se van a utilizar por la noche.

Sabe que todos los conos tienen la misma forma, sin embargo tienen diferentes alturas. Conoce la medida del diámetro y la altura del primero, pero necesita conocer el radio del cono mediano y del pequeño para poder hacer las bases de los focos que les va a colocar.



a) Diseñen una estrategia que les permita conocer el radio de los tres conos y de esta manera poder investigar la superficie de cada círculo. Regístrenla.

- ¿Cuánto mide el radio del cono mediano?
- ¿Qué operación realizaron para obtener este resultado?
- ¿Es posible llegar a este mismo resultado usando algún otro procedimiento? Justifiquen su respuesta.
- ¿Cuánto mide el radio del cono pequeño? ¿Usaron nuevamente la misma estrategia? ¿Por qué?
- ¿De qué manera es posible comprobar que estos dos resultados son correctos?
- Si hubiera una medida intermedia entre el cono grande y el mediano, ¿cuál sería la longitud de su radio?

2. Contrasten sus procedimientos y resultados con los obtenidos por otros equipos, y con la ayuda del profesor determinen qué alternativas de solución tiene Nicolás para resolver su problema y cuál es la que consideran más adecuada, argumenten sus razones.



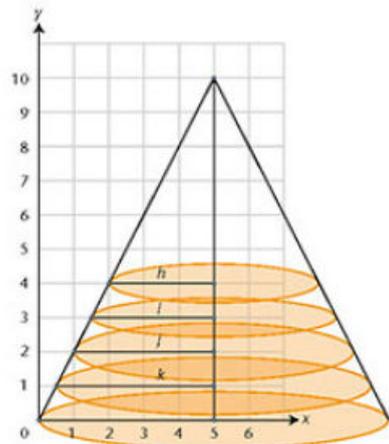
**PRACTICALO**



**Actividad 2.4**

1. Nicolás se preguntó: ¿qué ocurre con la longitud del radio cuando se realizan cortes planos paralelos a la base circular de un cono? Analiza la siguiente imagen.

- ¿Cuánto mide el diámetro del cono original?
- ¿Cuánto mide la altura?
- ¿Qué expresión permite conocer la medida de  $k$ , es decir, de la medida del radio después del primer corte?
- ¿Qué tipo de expresión es?
- ¿Qué operación es necesario plantear para encontrar el valor de  $j$ ?



• ¿Se utiliza una expresión similar para encontrar los valores de  $h$  e  $i$ ?  
¿Por qué ocurre esto?

• ¿De qué otra manera es posible encontrar la reducción del radio al realizar cortes paralelos a la base de un cono?

a) Tomando como base los resultados que obtuviste, completa la tabla con los valores que relacionan el radio y la altura.

Altura	10									
Radio	5									

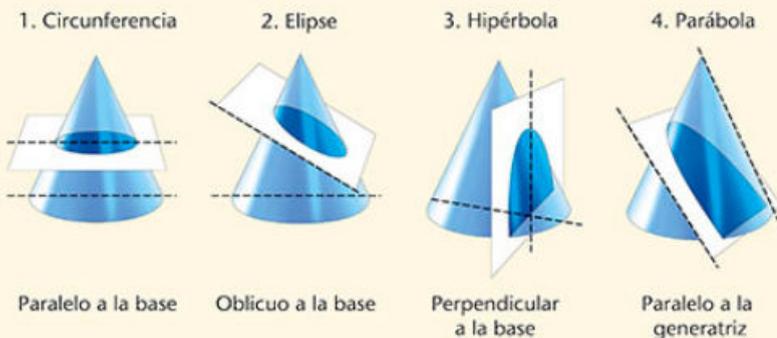
- En tus propias palabras, ¿cuál es la relación que hay entre la altura y el radio de un cono si se realiza algún corte sobre éste?
- ¿Qué estrategia consideras adecuada si se quisiera conocer la medida de los siguientes cortes hasta tener a la unidad como altura?

2. Contrasta tus resultados con los de tus compañeros y con la ayuda del profesor analiza los procedimientos algebraicos y trigonométricos de solución a esta situación y determina cuál es la conveniencia de utilizar cada uno.

3. Redacta en tu cuaderno una conclusión breve que explique cuál es la relación entre la altura y el radio de un cono al realizar algún corte paralelo a la base.

**Para leer más**

1. Las figuras obtenidas al cortar un cono son:



**Para tener en cuenta**

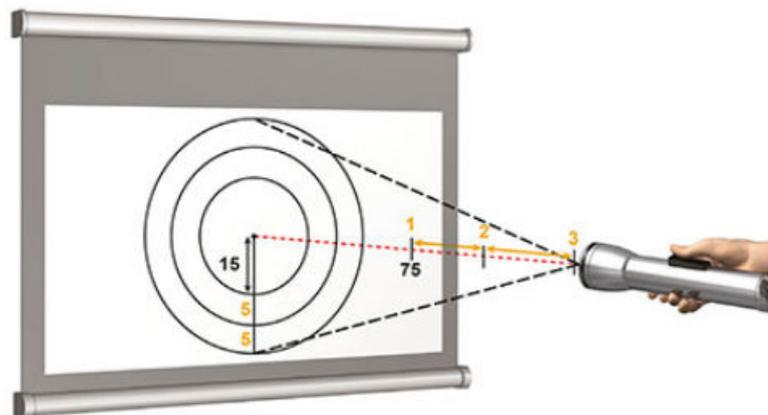
La hipotenusa de un triángulo rectángulo, al girarse sobre uno de sus catetos, forma la superficie del cono, a ésta se le llama *generatriz*.



LO QUE APRENDÍ



1. Ernesto está probando el haz de luz de su nueva lámpara, en la primera toma pudo medir un radio de 15 cm a una distancia de 75 m y luego realizó dos tomas más aumentando el radio en 5 cm cada una.



a) Diseña una estrategia que te permita conocer las distancias a las que tuvo que colocar la lámpara para realizar estas dos últimas tomas.

- ¿A qué distancia realizó la segunda toma? \_\_\_\_\_
- ¿A qué distancia se realizó la tercera toma? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál fue la estrategia que decidiste utilizar para encontrar estos valores? \_\_\_\_\_
- ¿Qué expresión planteaste para encontrar la distancia de la segunda toma? \_\_\_\_\_
- ¿Fue necesario utilizar una expresión similar para encontrar la distancia de la tercera toma o usaste una distinta? \_\_\_\_\_ Justifica tu respuesta. \_\_\_\_\_

2. Contrasta tu estrategia y tus resultados con algunos de tus compañeros y con la ayuda del profesor realicen un foro en el salón donde se opine acerca de la importancia del cono en la vida diaria, por ejemplo: en los fenómenos de óptica, en la repostería, en la construcción, en la industria metalúrgica, etcétera.



Glosario

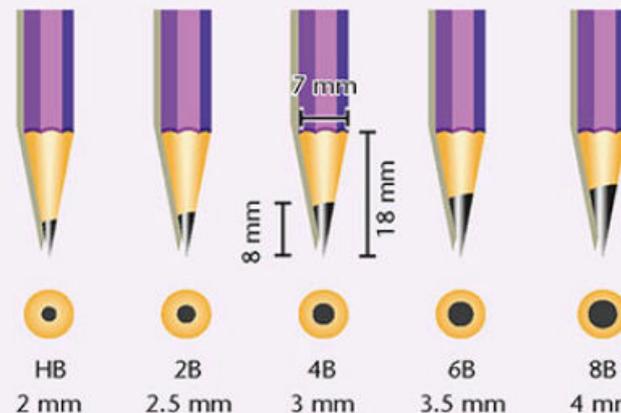
**Grafito.** Es una de las formas que puede tener el carbono. El grafito al mezclarse con una pasta se usa para hacer las minas (o cilindros) que contiene un lápiz; tiene la característica de que es de color negro y se exfolia con facilidad.

Desarrolla tus habilidades

1. Reúnanse en equipos y resuelvan el siguiente problema.

Muchos lápices tienen forma de prisma hexagonal, pero otros están hechos a base de cilindros, dentro de cada uno se encuentra un cilindro (o mina) de **grafito** y al sacarles punta se forma un cono; dependiendo del grueso que sea el cilindro de grafito será el grosor con el que éstos puedan marcar.

a) Analicen la imagen y diseñen una estrategia que les permita conocer la altura visible del cono que forma el grafito.



- ¿Cuánto mide la altura del cono de grafito del lápiz HB? \_\_\_\_\_
- ¿Qué estrategia utilizaron para encontrar esta medida? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es la medida del cono de grafito para el lápiz 2B? \_\_\_\_\_
- ¿Qué datos les permitieron calcular esta cantidad? \_\_\_\_\_
- ¿Cuánto mide la altura del cono de grafito para los lápices 6B y 8B? \_\_\_\_\_
- ¿Fue necesario realizar las mismas operaciones que en las ocasiones anteriores? \_\_\_\_\_ ¿Por qué ocurrió esto? \_\_\_\_\_

2. Contrasten sus procedimientos y resultados con algunos de sus compañeros y con la supervisión de su profesor determinen cuál es la utilidad práctica de poder conocer las dimensiones del radio y la altura de un cono.

USAS LAS TIC



Visita la página [https://www.ecured.cu/Cuerpos\\_de\\_revoluti%C3%B3n](https://www.ecured.cu/Cuerpos_de_revoluti%C3%B3n) (Consultada el día 22 de enero de 2017, a las 18:38 horas). En ella encontrarás información sintetizada e ilustraciones sencillas acerca de los sólidos de revolución, te permitirá contrastar y validar tus conocimientos, durante tu visita registra tus comentarios y observaciones. Después de visitar la página es conveniente que tu profesor, por medio de una lluvia de ideas, comparta las experiencias de algunos de tus compañeros y obtengan una conclusión que explique, ¿cuál consideran que es la utilidad de conocer el desarrollo plano de un cilindro truncado?

Eje temático	Forma, espacio y medida
Tema	Medida
Contenido 3	Construcción de las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos, tomando como referencia las fórmulas de prismas y pirámides.

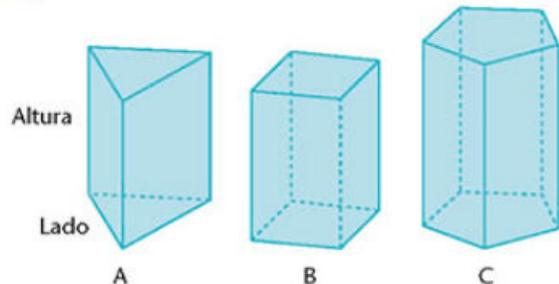
**ACUÉRDATE DE...**



1. Analicen los prismas mostrados en la imagen, todos miden 5 cm por lado y tienen una altura de 10 cm.

a) Diseñen una estrategia que les permita conocer el volumen de cada uno y respondan las preguntas.

- En estudios anteriores ya han calculado el volumen de los prismas. Expliquen con sus propias palabras, cuál es el procedimiento para calcular el volumen.



- ¿De qué tipo de prisma es la figura A?
- ¿Cuál es su volumen?
- ¿Qué procedimiento hay que seguir para encontrar el área de la base?
- ¿Qué expresión algebraica plantearon para encontrar el volumen? Regístrala en su cuaderno, junto con el algoritmo que hicieron.
- ¿Fue necesario encontrar el valor de la altura para calcular el área de la base? ¿Por qué lo consideran así?
- ¿Cuánto mide el volumen del prisma B?
- ¿Qué estrategia siguieron para encontrar el volumen?
- ¿De qué tipo de prisma se trata?
- ¿Qué expresión algebraica plantearon para encontrar el volumen? Regístrala en su cuaderno con el desarrollo del procedimiento.
- ¿Cuáles son las diferencias y las coincidencias que presentan los cálculos y las estrategias para calcular el volumen de la prisma B con respecto a prisma A?
- ¿Cuál es el volumen del prisma C?
- ¿Cuál es la expresión algebraica que permite encontrar el volumen? Regístrala en su cuaderno con el desarrollo del procedimiento.
- ¿Qué estrategia utilizaron para encontrar la medida de la apotema?

- ¿Qué diferencias y qué similitudes pueden observar en la estrategia o en las operaciones con respecto a los otros dos prismas?
- ¿Cómo se puede expresar de manera general cuál es el procedimiento para calcular el volumen de cualquier prisma recto?
- ¿Qué ocurrirá si se incrementa de manera considerable el número de lados de la base del prisma?

2. Contrasten sus resultados con algunos equipos cercanos y con la ayuda del profesor determinen de manera formal cuál es la forma de calcular el volumen de un prisma. Elaboren una hipótesis acerca de lo que consideran que influye en que el prisma tenga un número considerable de lados.

**PRACTÍCALO**



**Actividad 3.1**

1. Con base en sus conclusiones de la actividad anterior diseñen una estrategia para encontrar el volumen de los prismas mostrados en la imagen, considerando que la medida de cada lado y de la altura siguen siendo las mismas.



a) Respondan las preguntas.

- ¿Cuál es el volumen de los prismas? Hexagonal \_\_\_\_\_ Octagonal \_\_\_\_\_ Icosagonal \_\_\_\_\_
- ¿De qué manera calcularon la apotema de cada uno de ellos?
- Al comparar el prisma de 20 lados con los dos anteriores, ¿consideran que esto influye de alguna manera en el cálculo del volumen? Justifiquen su respuesta.
- ¿A qué figura geométrica se parece el prisma icosagonal?
- ¿Qué ocurrirá si se incrementa a 50 el número de lados?

2. Contrasten sus respuestas con otras parejas y con la asesoría del profesor elaboren una hipótesis que explique cuál es la manera en la que se calcula el volumen de un cilindro si tomamos como referencia la forma en la que se calcula el volumen de los prismas.

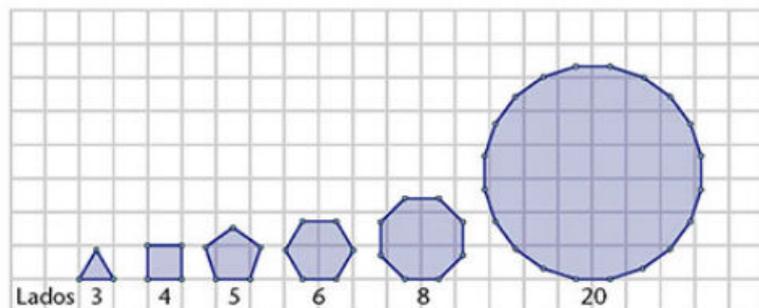


**PRACTICALO**



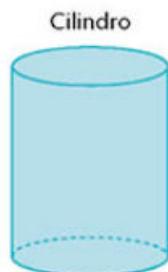
**Actividad 3.2**

1. Las bases de los polígonos utilizados en las secciones anteriores están representadas en la imagen.



a) Analízala y contesta las preguntas.

- ¿En qué polígonos el procedimiento para calcular su área es el mismo? \_\_\_\_\_
- ¿Por qué ocurre esto? \_\_\_\_\_
- Si cada uno de ellos se inscribiera en una misma circunferencia, ¿qué ocurriría con la diferencia de áreas entre ambas figuras? \_\_\_\_\_
- ¿Qué figura se forma si se incrementa una cantidad  $n$  de lados? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es la fórmula para calcular la superficie de un círculo? \_\_\_\_\_
- Entonces, si una circunferencia es el área de la base de un cilindro, así como un polígono regular es la base de un prisma recto, ¿cuál es el procedimiento para calcular el volumen de un cilindro? \_\_\_\_\_
- En el siguiente esquema coloca las medidas necesarias y la fórmula que permite calcular el volumen de un cilindro.



Fórmula \_\_\_\_\_

2. Contrasta tus resultados con los de tus compañeros cercanos y, con la ayuda del profesor, determina la fórmula que permite encontrar el volumen de un cilindro y cuál es el procedimiento para desarrollar correctamente el algoritmo que representa.



**PRACTICALO**

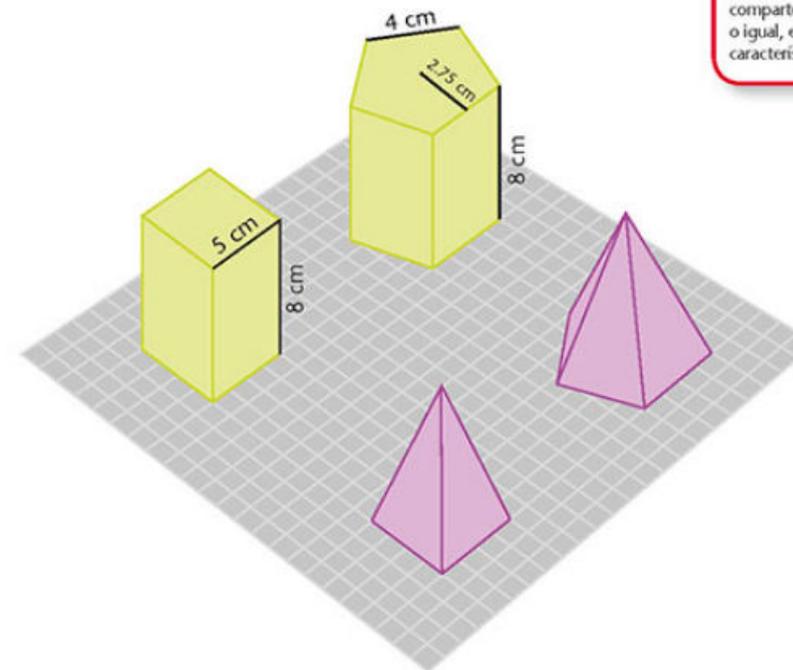


**Actividad 3.3**

1. En temas anteriores ya han calculado el volumen de pirámides regulares, ahora analicen los prismas y pirámides mostrados en la imagen y determinen una estrategia que les permita encontrar el volumen de cada pirámide, si se sabe que las **bases homólogas** son iguales y las alturas de las 4 figuras es la misma.



**Glosario**  
**Bases homólogas.** Se refiere a dos sólidos que tienen distinta forma, pero que comparten una base semejante o igual, es decir, que poseen características en común.



- ¿Cuál es el volumen del prisma cuadrangular? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es el volumen de la pirámide cuadrangular? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es el volumen del prisma pentagonal? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es el volumen de la pirámide pentagonal? \_\_\_\_\_
- ¿Qué procedimiento emplearon para encontrar estas medidas? \_\_\_\_\_
- ¿Cómo se calcula el volumen de una pirámide que tiene como base un polígono regular? \_\_\_\_\_
- Escriban una expresión algebraica que de manera general represente el volumen para cualquier pirámide. \_\_\_\_\_

2. Contrasten sus resultados y respuestas con los de los otros equipos, y con la ayuda del profesor elaboren una definición formal que explique la relación entre el volumen de un prisma y una pirámide con bases y alturas congruentes.

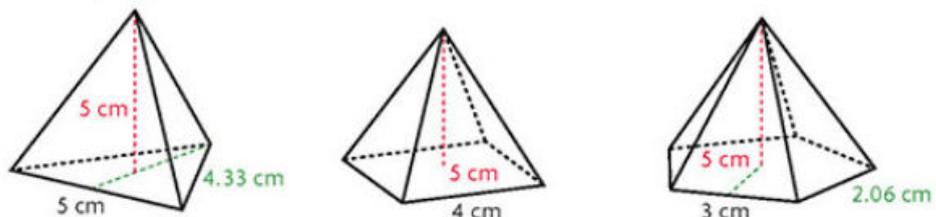


**PRACTICALO**



**Actividad 3.4**

1. Tomando en cuenta las conclusiones de la actividad anterior, calculen el volumen de las siguientes pirámides y respondan las preguntas.



- ¿Cuánto mide el volumen de la pirámide triangular? \_\_\_\_\_
- ¿Qué procedimiento emplearon para calcular el volumen de esta pirámide? \_\_\_\_\_
- ¿Qué expresión algebraica tuvieron que plantear para encontrar el resultado? \_\_\_\_\_
- ¿Cuánto mide el volumen de la pirámide cuadrangular? \_\_\_\_\_
- ¿Qué procedimiento emplearon para calcular el volumen de esta pirámide? \_\_\_\_\_
- ¿Qué expresión algebraica plantearon para poder encontrar el resultado? \_\_\_\_\_
- ¿En qué se diferencian las operaciones anteriores? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es el volumen de la pirámide pentagonal? \_\_\_\_\_
- ¿Qué expresión algebraica plantearon para encontrar el resultado? \_\_\_\_\_
- ¿Qué es lo que tienen en común estas tres expresiones? \_\_\_\_\_
- ¿Se puede observar lo mismo si se tienen más lados en la base de la pirámide? \_\_\_\_\_  
¿Por qué ocurre esto? \_\_\_\_\_

2. Comparen sus respuestas con las de sus compañeros, y con la ayuda del profesor planteen una hipótesis que indique: ¿qué ocurre con el volumen de una pirámide si se incrementa el número de lados de base a pesar de conservar la misma altura?



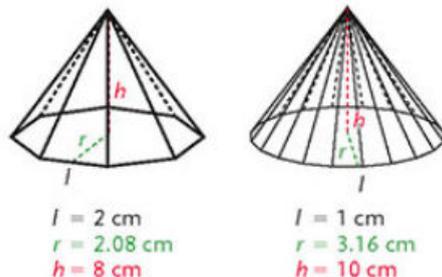
**PRACTICALO**



**Actividad 3.5**

1. Analicen las siguientes pirámides y calculen el volumen de cada una, después contesten las preguntas.

- ¿Cuál es el volumen de la pirámide octagonal? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es el volumen de la pirámide icosaogonal? \_\_\_\_\_
- ¿Qué procedimiento utilizaron para encontrar ambos volúmenes? \_\_\_\_\_



- ¿Qué expresiones algebraicas tuvieron que plantear para encontrar los resultados? \_\_\_\_\_
- ¿Qué ocurrirá si se aumenta  $n$  veces el número de lados de la base de una pirámide? \_\_\_\_\_
- ¿De qué manera consideran que es posible calcular el volumen de un cono? \_\_\_\_\_

2. Contrasten sus resultados con los de los otros equipos, y con la asesoría del profesor elaboren una hipótesis breve que explique qué similitud tiene la forma de encontrar el volumen de una pirámide regular con el procedimiento para encontrar el volumen de un cono.

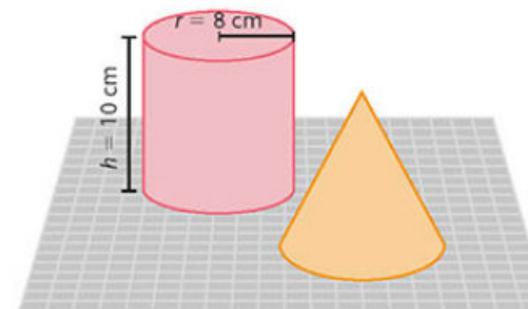


**PRACTICALO**



**Actividad 3.6**

1. Analicen la imagen mostrada y calculen el volumen del cilindro y, a partir de éste, encuentren el volumen del cono sabiendo que ambos sólidos tienen la misma altura y base.



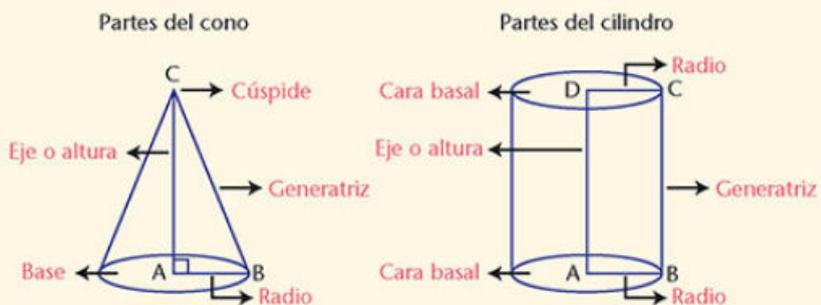
- ¿Cuánto mide el volumen del cilindro? \_\_\_\_\_
- ¿Qué expresión algebraica permite encontrar esta cantidad? \_\_\_\_\_
- Describan la secuencia de operaciones que realizaron. \_\_\_\_\_

- ¿Cuánto mide el volumen del cono? \_\_\_\_\_
- Analizando estos resultados, ¿qué expresión algebraica se puede plantear para encontrar directamente el volumen del cono? \_\_\_\_\_
- Por lo tanto, ¿qué expresión algebraica permite encontrar el volumen de cualquier cono? \_\_\_\_\_

- ¿Cómo se lee en lenguaje común esta expresión? \_\_\_\_\_
- ¿De qué manera se puede comprobar que esta expresión es correcta? \_\_\_\_\_

2. Comparen sus resultados con los de sus compañeros, y con la ayuda del profesor determinen cuál es la importancia de saber leer correctamente las fórmulas para calcular el volumen del cilindro y del cono al momento de desarrollar el algoritmo que permite encontrar el volumen de cada uno.

**Para leer más**



**Para tener en cuenta**

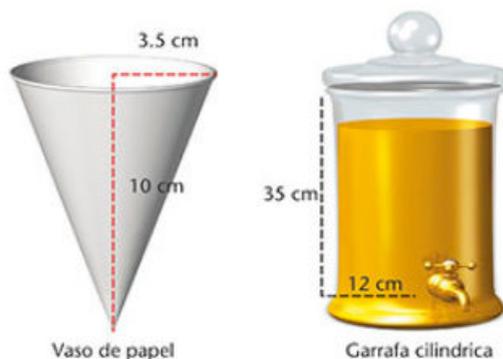
Cuando se quiere conocer el volumen de un cilindro se lleva a cabo el mismo procedimiento que se usa en un prisma, se calcula el área de la base y se multiplica por la altura, la diferencia es que para obtener el área de un círculo se utiliza la fórmula:  $A = \pi r^2$  y al multiplicar por la altura queda  $A = \pi r^2 h$

Cuando se quiere conocer el volumen de un cono se utiliza la fórmula:  $A = \frac{1}{3} \pi r^2 h$  ya que, al igual que una pirámide tiene la tercera parte del volumen de un prisma, un cono tiene la tercera parte del volumen de un cilindro.

**LO QUE APRENDÍ**

1. Analiza las siguientes situaciones y contesta las preguntas.

a) En la oficina de Gabriela y Mariana les gusta tener una garrafa para jugos y vasos de papel, compran paquetes de vasos en forma de cono y tienen una garrafa de cristal. Analiza las imágenes y contesta las preguntas.

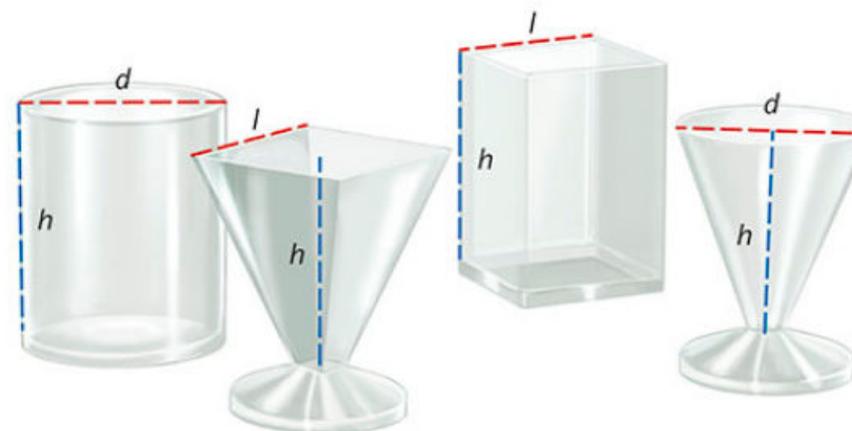


- ¿Cuál es el volumen de los vasos de papel? \_\_\_\_\_
- ¿Qué expresión algebraica permite encontrar esta cantidad? \_\_\_\_\_

- ¿Cuál es el volumen de la garrafa para el jugo? \_\_\_\_\_
- ¿Qué expresión algebraica planteaste para encontrar esta cantidad? \_\_\_\_\_
- Aproximadamente, ¿cuántos vasos se pueden llenar si la garrafa estuviera llena en su totalidad? \_\_\_\_\_
- ¿De qué manera llegaste a este resultado? \_\_\_\_\_

b) Viviana es mamá de María y acaba de comprar moldes para hacer velas de cera, todos los moldes tienen 12 cm de altura y el diámetro de los que tienen una base circular y los lados de los que tienen una base cuadrada es de 6 cm. Analiza la imagen y contesta las preguntas.

- ¿Qué volumen tiene el molde cilíndrico? \_\_\_\_\_



- ¿Cuál es el volumen del molde en forma de prisma cuadrangular? \_\_\_\_\_
- ¿Qué volumen tiene el molde en forma de pirámide cuadrangular? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es el volumen del molde cónico? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál fue la estrategia que usaste para calcular la capacidad de cada molde? \_\_\_\_\_

• ¿De qué manera es posible comprobar que los resultados son correctos? \_\_\_\_\_

• ¿Es posible comprobar la relación que hay entre el volumen de la pirámide y del prisma con la que hay entre el cono y el cilindro? \_\_\_\_\_  
Explica tu respuesta. \_\_\_\_\_

2. Contrasta tus resultados con los de tus compañeros, y con la ayuda del profesor elabora una conclusión acerca de este contenido que sintetice cuál es el procedimiento que consideras más adecuado para calcular el volumen de un cilindro y una pirámide.

**USA LAS TIC**



Visita la página [http://es.onlinemath.com/math/assistance/figures\\_area\\_1/cylinder/](http://es.onlinemath.com/math/assistance/figures_area_1/cylinder/) (Consultada el 5 de diciembre de 2016, a las 16:40 horas), para conocer una calculadora de medidas de un cilindro, y [http://es.onlinemath.com/math/assistance/figures\\_area\\_1/cone/](http://es.onlinemath.com/math/assistance/figures_area_1/cone/) (Consultada el 5 de diciembre de 2016, a las 16:42 horas) para conocer una calculadora de medidas de un cono.

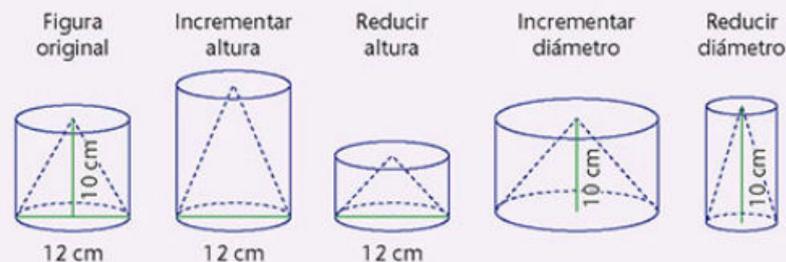
Las puedes utilizar para comprobar tus resultados, analizar tus hipótesis y resolver tus dudas. Después de tu visita, comenta con tu profesor, ¿cuál es la utilidad práctica en la vida cotidiana de una herramienta electrónica como ésta?

Nota: las unidades que usa son pulgadas, pero puedes cambiarla fácilmente a centímetros, toma en cuenta esta recomendación.

**Desarrolla tus habilidades**

1. Reúnanse en equipos, analicen la siguiente imagen y lleven a cabo el reto matemático planteado.

El propósito de este reto es comparar cuál es la relación entre el volumen del cono y del cilindro cuando se incrementa o reduce alguna de sus dimensiones.



a) Tomen como referencia las indicaciones de cada imagen, aumenten o reduzcan la cantidad que consideren adecuada para poder investigar la forma en que afecta al volumen de cada figura, luego respondan las preguntas.

- ¿Qué ocurre con el volumen del cilindro cuando alguna de las dimensiones aumenta?
- ¿Y para el cono?
- Para el cilindro, ¿ocurre lo mismo si disminuye? ¿Por qué ocurre esto?
- ¿Qué ocurre si se reduce para el cono?
- Si se incrementa una unidad a la altura del cilindro, ¿el incremento en el volumen es igual que si se incrementa una unidad en el diámetro de la base?
- ¿Pasa lo mismo con el cono? Expliquen su respuesta.

2. Comparen sus resultados con los de sus compañeros, y con la ayuda del profesor determinen, tanto para el cilindro como para el cono, ¿cuál es la relación que hay entre el incremento o reducción de alguna de sus dimensiones con el volumen que contienen?

Eje temático	Forma, espacio y medida
Tema	Medida
Contenido 4	Estimación y cálculo del volumen de cilindros y conos o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas.



**ACUÉRDATE DE...**



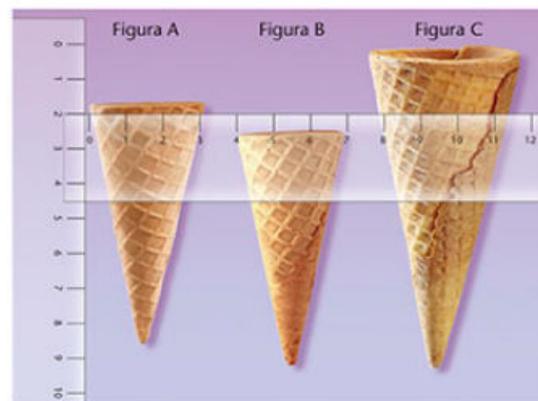
1. Lean con atención las siguientes situaciones y respondan las preguntas que se plantean.

a) Ana tiene un negocio de aceites naturales, para envasarlos utiliza distintos tipos de frascos, analicen la imagen mostrada y diseñen una estrategia que les permita estimar el volumen aproximado de cada uno de los envases mostrados.



- ¿Cuál es la capacidad del envase A? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es la capacidad del envase B? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es la capacidad del envase C? \_\_\_\_\_
- ¿En qué unidades expresaron los resultados? \_\_\_\_\_
- Si recibe el aceite en contenedores de 5 litros aproximadamente, ¿cuántos frascos del tipo A puede llenar? \_\_\_\_\_ ¿Cuántos del tipo B? \_\_\_\_\_ ¿Cuántos del tipo C? \_\_\_\_\_
- ¿Hubo una diferencia significativa entre estas cantidades? \_\_\_\_\_ ¿Por qué ocurrió esto? \_\_\_\_\_

b) El tío de Juan vende helados de frutas, diseñen una estrategia para encontrar el volumen de los conos.



- Escriban el volumen de los conos:  
A = \_\_\_\_\_  
B = \_\_\_\_\_  
C = \_\_\_\_\_
- ¿Qué estrategia utilizaron para encontrar estas medidas? \_\_\_\_\_
- ¿En qué unidades expresaron los resultados? \_\_\_\_\_

2. Contrasten sus resultados con los de equipos, y con la asesoría del profesor determinen la importancia de la observación y del cálculo mental al momento de realizar una estimación de valores.



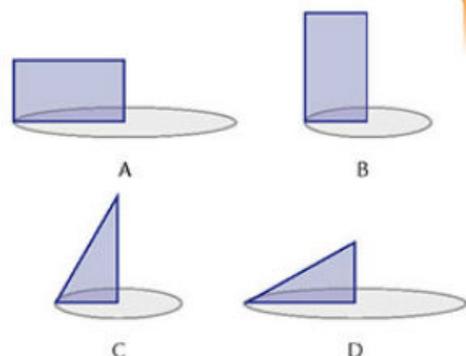
**PRACTICALO**



**Actividad 4.1**

1. Analicen la imagen mostrada y contesten las preguntas.

- a) En la figura A se tomó como eje el ancho del rectángulo.
- b) En la figura B se tomó como eje el largo para crear dos cilindros.
- c) Para el triángulo C se tomó como eje el cateto mayor.
- d) Para el triángulo D se tomó como eje el cateto menor.



• ¿Cuál de los dos cilindros formados consideran que su base tiene mayor superficie?

Justifiquen su respuesta.

• En cuanto a los triángulos, ¿cuál de los conos formados tiene mayor superficie su base?

¿Por qué ocurre esto?

• Si al ancho del rectángulo le asignan una medida de 5 cm y a su largo de 8 cm, ¿cuál es el volumen del cilindro de la figura A? ¿Cuál es el volumen del cilindro de la figura B?

• ¿Qué conclusión pueden obtener con base en estos cálculos?

• Si ahora asignamos el valor de 5 cm al cateto menor del triángulo y 8 cm al cateto mayor, ¿cuál es el volumen del cono de la figura C? ¿Cuál es el volumen del cono de la figura D?

• ¿Qué conclusión pueden obtener con base en estos resultados?

• Suponiendo que uno de los cilindros tiene un volumen de  $785.7 \text{ cm}^3$  y su altura mide 5 cm, ¿cuánto debe medir de altura?

• ¿Qué estrategia utilizaron para encontrar este resultado?

• ¿Qué operación plantearon para encontrar el resultado?

• ¿Cómo pueden comprobar que su resultado es correcto?

• Entonces, ¿de qué cilindro de la ilustración se trata, del A o del B?

• Suponiendo que un cono mide  $261.9 \text{ cm}^3$  y su radio mide 5 cm, ¿cuál es la altura del cono?

• ¿Qué estrategia utilizaron para encontrar este resultado?

• ¿Qué operación plantearon para encontrar este resultado?

• ¿Cómo pueden saber que su respuesta es correcta?

2. Comparen sus resultados, operaciones y estrategias con los de sus compañeros, y con la ayuda del profesor establezcan una hipótesis que explique de qué manera se calcula alguna de las dimensiones del cono y del cilindro cuando ya se conoce su volumen.



**PRACTICALO**



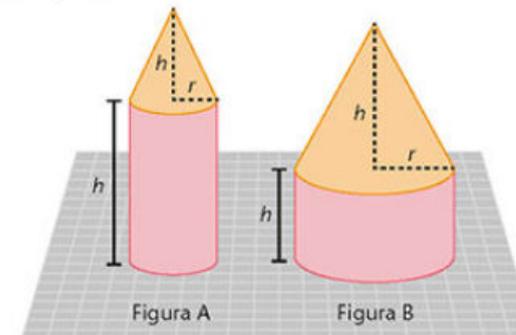
**Actividad 4.2**

1. Lee la situación planteada, analiza la imagen y contesta las preguntas.

- a) En la imagen se pueden ver dos figuras compuestas; la altura del cilindro de la figura A es igual a la altura del cono de la figura B, y la altura del cono de la figura A es igual a la altura del cilindro de la figura B.

• ¿Cómo son los radios entre A y B, iguales o distintos?

Justifica tu respuesta.



• ¿Cuál de las dos figuras compuestas consideras que tiene mayor volumen?

¿Por qué?

• Si la altura del cilindro de la figura A es de 8 cm, la altura de su cono es de 3 cm y el radio común es de 1.5 cm, ¿cuál es el volumen total de la figura A?

• ¿De qué manera encontraste este resultado?

• ¿Qué operaciones tuviste que realizar para encontrar el resultado?

• Si el radio de la figura B mide 6 cm, ¿cuál es el volumen total?

• ¿Qué estrategia empleaste para encontrar el resultado?

• ¿Qué operaciones tuviste que hacer para encontrar el resultado?

• Si en la figura A la altura del cilindro y del cono se conservan igual, pero se desea que el volumen total sea  $707.14 \text{ cm}^3$ , ¿cuánto debe medir el radio?

• ¿Qué estrategia empleaste para resolver esta situación?

• ¿Qué operación planteaste para encontrar el resultado?

• ¿Cómo puedes comprobar que tu resultado es correcto?

• Si en la figura B se conserva el radio común y la altura del cilindro, ¿cuánto debe medir la altura del cono para que el volumen total sea de  $791.99 \text{ cm}^3$ ?

• ¿Qué estrategia utilizaste para encontrar esta medida?

• ¿Qué operación tuviste que plantear?

• ¿Cómo puedes comprobar que este resultado es correcto?

2. Compara tus resultados con los de tus compañeros, y con la ayuda del profesor determina la forma correcta de encontrar una de las dimensiones de un cono y un cilindro en una figura compuesta.



**PRACTICALO**



**Actividad 4.3**

- Analicen las siguientes situaciones y realicen lo que se indica.
  - En casa de Ramiro van a hacer una fiesta y prepararon dos garrafas de 20 litros, una con agua de horchata y otra con agua de Jamaica. Si una persona desea agua puede tomar un cono de papel; éstos miden 4 cm de radio y 9 cm de altura. Diseñen una estrategia que les permita saber la cantidad de vasos que pueden llenar con esa cantidad de agua.
    - Elaboren en su cuaderno un esquema de esta situación.
    - ¿Cuántos vasos se pueden llenar?
    - ¿Qué estrategia emplearon para encontrar este resultado?
    - ¿Qué operación tuvieron que plantear para resolver esta situación?
    - ¿Cómo pueden comprobar que su resultado es correcto?
  - En la unidad habitacional donde vive Marco se quedaron sin servicio de agua, y algunos vecinos contrataron una pipa con 8000 litros para repartirla entre ellos. Se sabe que los tinacos de las casas son iguales y miden 1.43 m de diámetro y 1.05 m de altura. Diseñen una estrategia que permita conocer cuántas casas podrán llenar su tinaco con el contenido de una pipa.
    - Realicen en su cuaderno un esquema de esta situación.
    - ¿Cuántas casas recibirán agua?
    - ¿Qué estrategia emplearon para encontrar este resultado?
    - ¿Qué operación tuvieron que plantear para resolver esta situación?
    - ¿Cómo pueden comprobar que su resultado es correcto?
- Contrasten sus resultados y estrategias con los de sus compañeros y con la asesoría del profesor determinen el procedimiento para encontrar el volumen de un cono y un cilindro cuando hay que hacer una conversión de unidades.



**PRACTICALO**



**Actividad 4.4**

- A continuación se mencionarán tres condiciones; con base en cada una, elaboren un problema que se pueda modelar, según los datos dados y respondan las preguntas.
  - El radio de un cono y un cilindro miden 7 cm y la altura de ambos mide 12 cm.
    - Escriban la situación.
    - Registren la operación que modela esta situación.

- ¿Cuál es el valor del volumen del cilindro?
- ¿Cuál es el valor del volumen del cono?
- ¿Cómo pueden comprobar que su resultado es correcto?

- El volumen de un cilindro es de  $4.78 \text{ m}^3$  y su radio mide 1.3 m.
  - Escriban la situación.
  - Registren la operación que modela esta situación.
  - ¿Cuál es el valor de la altura del cilindro?
  - ¿Cómo pueden comprobar que su resultado es correcto?
- El volumen de un cono es  $6.36 \text{ m}^3$  y su altura mide 2.7 m.
  - Escriban la situación.
  - Registren la operación que modela esta situación.
  - ¿Cuál es el valor del radio del cono?
  - ¿Cómo pueden comprobar que su resultado es correcto?

2. Contrasten sus respuestas con las de sus compañeros, y con la ayuda del profesor determinen en qué influye el contexto de una situación que involucra trabajo con cilindros y conos al momento de resolverla, y de qué manera pueden comprobar que cada situación planteada contiene todos los elementos necesarios para resolverla de manera correcta.



**PRACTICALO**



**Actividad 4.5**

Analicen la situación planteada, completen las tablas y contesten las preguntas que les ayudarán a formalizar algebraicamente el cálculo del volumen de un cilindro y un cono, así como a establecer la relación que tiene con respecto al radio y la altura.

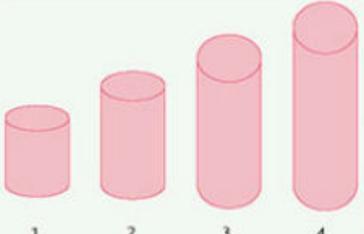
a)

Figura	Radio	Altura	Volumen	Relación entre la altura y el volumen
				
				
				
				
Conclusión				

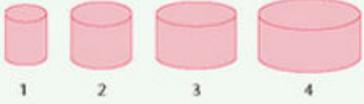
b)

Figura	Radio	Altura	Volumen	Relación entre la altura y el volumen
				
<b>Conclusión</b>				

c)

Figura	Radio	Altura	Volumen	Relación entre la altura y el volumen
				
<b>Conclusión</b>				

d)

Figura	Radio	Altura	Volumen	Relación entre la altura y el volumen
				
<b>Conclusión</b>				

- ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el volumen de un cono al cambiar su altura con base en el cono del inciso a?
- ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el volumen de un cono al cambiar su radio con base en el cono del inciso b?
- ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el volumen de un cilindro al cambiar la altura del inciso c?

2. Contrasten sus resultados y conclusiones con los de sus compañeros y con la supervisión del profesor elaboren una conclusión que explique de manera breve si son proporcionales el crecimiento del volumen con el del radio o la altura para estos dos sólidos de revolución.

**Para tener en cuenta**

Cuando se incrementa la altura en un cono o un cilindro, pero el área de su base permanece igual, el incremento de su volumen es proporcional y no lo es cuando se incrementa el radio de la base y la altura permanece constante; en este caso, la variación es cuadrática.

Es importante saber que un decímetro cúbico ( $\text{dm}^3$ ) equivale a un litro (l); a partir de este dato es posible calcular cualquier equivalencia entre unidades.



**LO QUE APRENDÍ**



1. Diseña una estrategia para calcular el volumen de estas piezas, sabiendo que los sólidos que tienen las mismas letras son idénticos. El diámetro de A y B es 2.5 cm, y su altura es de 3.2 cm, el sólido E tiene sus dimensiones exactamente al doble de A.

Figura 1

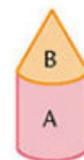


Figura 2



Figura 3

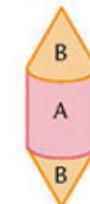
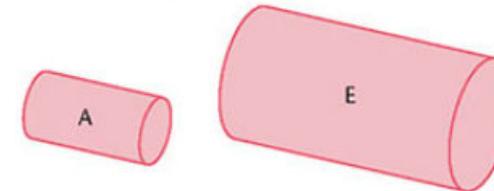


Figura 4



a) Completa la tabla con los valores que obtuviste.

Figura	Volumen total
1	
2	
3	
4	

- Describe la estrategia que utilizaste para encontrar estos valores.
- ¿Cuántas operaciones tuviste que efectuar para encontrar todos los resultados?
- ¿Consideras que realizaste sólo las operaciones necesarias? Explica tu respuesta.
- ¿El volumen del cilindro E tuvo el doble del volumen del cilindro A? ¿Por qué ocurrió esto?

2. Contrasta tus resultados con los obtenidos por tus compañeros y con la asesoría del profesor determina, ¿qué elementos necesitas dominar para tener la seguridad de que puedes resolver cualquier situación que tenga que ver con el cálculo del volumen de un cono o un cilindro?

**Desarrolla tus habilidades**

1. Reúnanse en equipos y juntos desarrollen una situación en la que utilicen un cono y un cilindro, la condición es que primero determinen el volumen de cada uno, sin calcular antes las medidas del radio o la altura.

- Escriban la situación que plantearon.
- Elaboren un esquema que modele la situación.

- ¿Cómo resolvieron la situación al asignar los valores del radio y la altura?
- ¿Qué operaciones plantearon?
- ¿De qué manera pueden comprobar que sus planteamientos y operaciones son congruentes entre sí y están bien desarrollados?

2. Comparen sus resultados con los de sus compañeros, y con la asesoría del profesor determinen los conocimientos y habilidades que se necesitan para poder plantear y resolver con coherencia una situación que involucre el cálculo del volumen o de cualquier componente de las fórmulas de un cono o cilindro.

**USALAS TIC**

Visita la página <http://www.thatquiz.org/es-4/matemáticas/geometría/> (Consultada el día 5 de diciembre de 2016, a las 12:52 horas), donde encontrarás la posibilidad de practicar tus algoritmos para reafirmar tus procedimientos, únicamente debes seleccionar las opciones "cono y cilindro", además, puedes cambiar el nivel de dificultad para que el reto sea aún mayor. Registra tus opiniones y comentarios para que después de visitar la página, junto con algunos de tus compañeros, puedan comentar en clase acerca de este recurso, y con la ayuda del profesor determinar la ventaja de contar con este tipo de herramientas en la vida cotidiana.

Eje temático	Manejo de la información
Tema	Proporcionalidad y funciones
Contenido 5	Análisis de situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades.



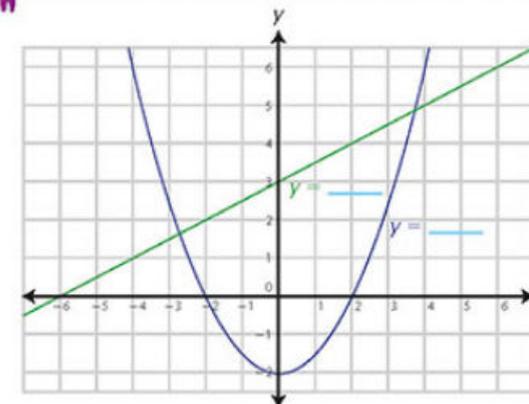
**ACUÉRDATE DE...**



1. En la gráfica mostrada se encuentran representadas dos líneas, ¿recuerdan cómo encontrar la expresión algebraica que modela estas líneas?

a) Diseñen una estrategia que les permita encontrar la expresión de cada línea.

- ¿Qué expresión algebraica representa la línea verde?
- ¿Qué expresión algebraica representa la línea azul?
- ¿Qué nombre recibe este tipo de líneas?



- ¿Cuál estrategia decidieron utilizar para encontrar la expresión de la línea verde?
- ¿Y para hallar la de la línea azul?
- ¿Cómo pueden comprobar que la expresión que plantearon para cada una es correcta?

b) Con base en la información de la gráfica, completen la tabla.

Recta	x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
	y									
Curva	x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
	y									

- ¿Qué diferencia se observa entre los valores de y para cada línea?
- Escriban en su cuaderno las operaciones que realizaron para encontrar la expresión algebraica de la recta.
- Escriban en su cuaderno las operaciones que realizaron para encontrar la expresión algebraica de la curva.
- Expliquen, ¿de qué manera se relacionan la expresión algebraica, la tabla y la gráfica?

2. Contrasten sus respuestas con las de sus compañeros, y con la asesoría del profesor determinen para cada caso, ¿cómo se obtiene una expresión algebraica a partir de la gráfica que la representa?



**PRACTICALO**



**Actividad 5.1**

1. Con base en las conclusiones de la actividad anterior, analicen las situaciones planteadas y respondan las preguntas.

a) En su trabajo, Ramiro entrega reportes cada 4 días, y cada 5 días entrega un informe; el último reporte lo entregó el día 7 de este mes, junto con su primer informe.

- ¿Cuál es la secuencia de días en los que entregará sus siguientes reportes hasta el nuevo informe? \_\_\_\_\_
- ¿Qué expresión algebraica modela la secuencia de días en los que Ramiro entrega sus informes? \_\_\_\_\_
- ¿De qué tipo de expresión se trata? \_\_\_\_\_
- ¿De qué manera determinaron esta expresión? \_\_\_\_\_

• ¿Cómo pueden comprobar que la expresión corresponde a las secuencias de los días de entrega? \_\_\_\_\_

b) Roberto tiene un negocio de lonas impresas, esta semana están en promoción las lonas que miden 1, 4, 9, 16, 25... metros cuadrados.

- Si todas son semejantes, ¿qué forma tienen? \_\_\_\_\_
- ¿Qué expresión algebraica representa la secuencia de las dimensiones de las lonas? \_\_\_\_\_
- ¿De qué manera determinaron esta expresión? \_\_\_\_\_
- ¿De qué tipo de expresión se trata? \_\_\_\_\_
- Escriban la operación que plantearon para modelar y resolver esta situación. \_\_\_\_\_
- ¿Cómo pueden comprobar que la expresión corresponde a la secuencia? \_\_\_\_\_

2. Comparen sus resultados con los de sus compañeros y con la ayuda del profesor determinen: ¿cómo se relacionan los conjuntos de datos entre sí?



**PRACTICALO**



**Actividad 5.2**

1. Analicen cada situación planteada y contesten las preguntas.

a) En la clase de física, el profesor le pidió a Luis que tomara una pelota y que subiera hasta la parte más alta del edificio escolar y lo dejara caer libremente; se sabe que la gravedad tiene una aceleración de  $9.8 \frac{m}{seg^2}$  y que la altura a la que está Luis es de 18 m.

- ¿Cuánto tiempo tardará en llegar la pelota al suelo? \_\_\_\_\_
- ¿Qué estrategia utilizaron para encontrar el resultado? \_\_\_\_\_
- ¿Qué expresión algebraica modela esta situación? \_\_\_\_\_
- ¿De qué tipo de expresión se trata? \_\_\_\_\_
- Construyan una tabla en su cuaderno, que represente el tiempo y la distancia que recorrió la pelota al caer.
- En su cuaderno elaboren una gráfica con base en la tabla que construyeron.

- ¿De qué manera pueden comprobar que los resultados, la tabla y la gráfica son correctos y coinciden? \_\_\_\_\_

b) Lucía tiene 5 años y hoy nació su hermana. Diseñen una estrategia que les permita encontrar una expresión algebraica que represente la relación entre las edades de ambas al paso de los años.

- ¿Cuál es la expresión algebraica que relaciona ambas edades? \_\_\_\_\_
- ¿Qué estrategia utilizaron para encontrar esta expresión? \_\_\_\_\_
- ¿De qué tipo de expresión se trata? \_\_\_\_\_
- Con esta información construyan en su cuaderno una tabla que muestre la relación entre ambas edades en los primeros 5 años.
- Elaboren en su cuaderno una gráfica en la que se muestre la relación entre las edades de Lucía y su hermana.
- ¿De qué manera pueden comprobar que sus resultados, la tabla y la gráfica son correctos y coinciden? \_\_\_\_\_

2. Comparen sus resultados con los de sus compañeros, y con la asesoría del profesor expliquen cómo se debe analizar una situación de manera que permita identificar los datos necesarios para poder establecer una relación entre ellos.



**PRACTICALO**



**Actividad 5.3**

1. Analiza las siguientes situaciones y con base en lo que has aprendido hasta este momento en los contenidos anteriores, resuelve cada una a partir de sus instrucciones.

a) El señor Ramón trabaja repartiendo agua potable en una pipa. Todos los días sale con 9000 litros de agua, y cuando abre la llave, la manguera libera 75 litros por minuto.

Suponiendo que dejara abierta la llave, ¿cuánto tiempo tardaría en vaciarse la pipa? \_\_\_\_\_

- ¿De qué manera determinaste este resultado? \_\_\_\_\_
- Si consideras los primeros minutos de descarga, construye una gráfica que relacione el tiempo con la cantidad de litros de agua liberada.

- ¿Qué tipo de línea obtuviste? \_\_\_\_\_  
¿Por qué ocurrió esto? \_\_\_\_\_

- Con base en tu gráfica, construye una tabla en la que se muestre la relación entre estas cantidades.

- ¿Cuál es la expresión algebraica que representa la relación entre los minutos y la cantidad de litros? \_\_\_\_\_
- ¿Cómo determinaste esta expresión? \_\_\_\_\_
- ¿De qué manera puedes demostrar que la expresión es correcta y corresponde a esta situación? \_\_\_\_\_

b) Jorge y su primo Vicente van a visitar a una de sus tías al estado de Hidalgo. Durante el camino hay un tramo de carretera que está en línea recta, en este tramo la velocidad es constante y si se toma el tiempo en relación con la distancia se puede crear una tabla como la siguiente.

Tiempo en horas	1	2	3
Distancia en km	90	180	270

- ¿A qué velocidad están viajando? \_\_\_\_\_
- ¿Cuántos kilómetros habrán recorrido si tuvieran que viajar 5 horas? \_\_\_\_\_
- ¿Cómo determinaste este resultado? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es la expresión algebraica que representa la relación entre esas cantidades? \_\_\_\_\_
- ¿Qué procedimiento empleaste para encontrarla? \_\_\_\_\_
- Construye en tu cuaderno una gráfica que represente el avance durante las primeras 5 horas.
- Si en total, el viaje durara 8 horas, ¿a cuántos kilómetros de distancia estaría su punto de partida? \_\_\_\_\_
- ¿De qué manera puedes comprobar que la expresión algebraica corresponde a la situación modelada? \_\_\_\_\_

2. Plantea una situación que pueda ser modelada para cada una de las siguientes expresiones algebraicas.

a)  $y = 5x + 5$

- Escribe la situación que diseñaste. \_\_\_\_\_

- Construye en tu cuaderno una tabla y una gráfica que representen esta situación, según tus datos.

b)  $y = x^2 - 2x$

- Escribe la situación que diseñaste. \_\_\_\_\_

- En tu cuaderno, elabora una tabla y una gráfica que representen esta situación, según tus datos.

c) ¿De qué manera puedes comprobar que las situaciones anteriores corresponden a las expresiones algebraicas dadas? \_\_\_\_\_

3. Contrasta tus respuestas con las de tus compañeros, y con la asesoría del profesor determina la forma más adecuada de analizar alguna situación matemática cuando se asocia con algún tipo de fenómeno, ya sea físico, biológico, económico u otro.

#### Para leer más

Ten presente que los procedimientos para encontrar una expresión algebraica dependen del tipo de datos que estés usando. Hasta ahora conoces ya 3 procedimientos que pueden ayudarte con este contenido.

#### Para tener en cuenta

Ten presentes los siguientes datos:

La forma de una expresión lineal puede variar dependiendo de sus elementos, por ejemplo:  $y = x + b$ , o bien,  $y = mx + b$ .

Tanto en una expresión lineal como en una cuadrática el signo negativo hace que la gráfica cambie de sentido.

Una expresión de segundo grado puede tener varias formas, como son:

$$y = ax^2 \qquad y = ax^2 + bx \qquad y = ax^2 + bx + c$$

Gráficamente, es muy notoria la diferencia entre una expresión de primer grado y una de segundo grado; en una expresión de primer grado se obtiene una recta y en una de segundo grado una parábola.

En cuanto a la comparación de los grupos de magnitudes que las representan también es sencillo identificarlas por el método de diferencias; en una expresión de primer grado, al calcular sus diferencias inmediatamente se obtiene una constante, y en una expresión de segundo grado, al calcular sus diferencias se obtiene un nuevo grupo de magnitudes y si nuevamente se obtienen las diferencias del grupo obtenido es entonces cuando se obtiene una constante.



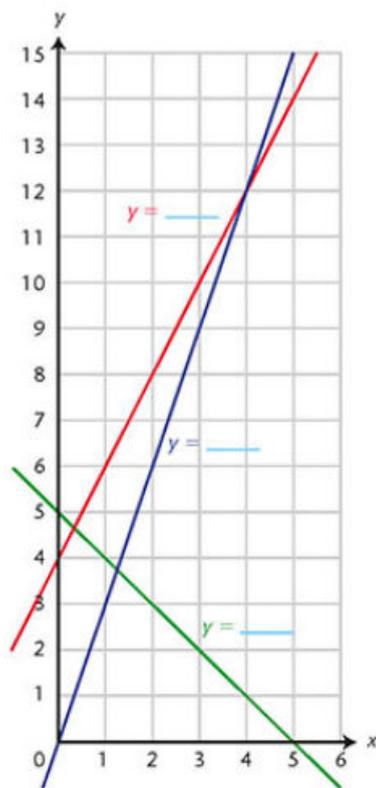
**LO QUE APRENDÍ**



Analiza las líneas que se muestran en la gráfica y encuentra la expresión algebraica que representa la relación entre los ejes.

**1. Lineales.**

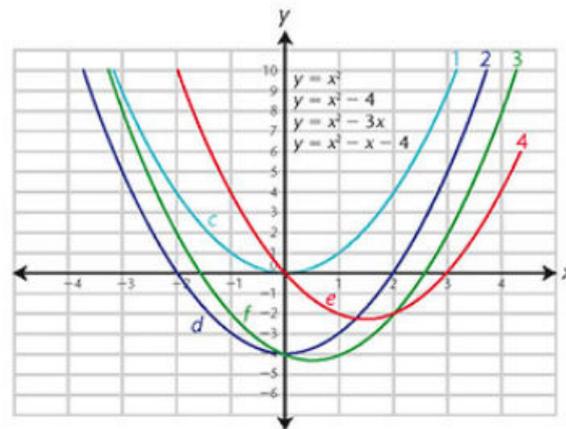
- ¿Qué expresión algebraica representa la línea azul? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es la expresión algebraica que representa la línea roja? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es la expresión algebraica para la línea verde? \_\_\_\_\_
- ¿Qué estrategia utilizaste para encontrar estas expresiones? \_\_\_\_\_
- ¿Fue necesario que realizaras una tabla para encontrar la expresión algebraica? Justifica tu respuesta. \_\_\_\_\_
- ¿Fue necesario construir una secuencia numérica con los valores de  $y$  para encontrar la expresión algebraica? Explica por qué. \_\_\_\_\_
- ¿Cómo se puede demostrar que las expresiones corresponden efectivamente a cada línea? \_\_\_\_\_



**2. Parábolas.**

Diseña una estrategia que te permita poder relacionar las parábolas mostradas en la gráfica con su respectiva expresión algebraica.

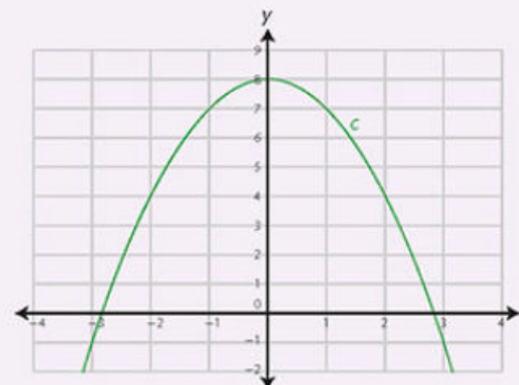
- ¿Cuál es la expresión algebraica que representa la línea 1? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es la expresión algebraica que representa la línea 2? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es la expresión algebraica para la línea 3? \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es la expresión algebraica para la línea 4? \_\_\_\_\_
- ¿Qué estrategia utilizaste para encontrar estas expresiones? \_\_\_\_\_



- ¿Fue necesario que realizaras una tabla para encontrar la expresión algebraica? Justifica tu respuesta. \_\_\_\_\_
  - ¿Fue necesario construir una secuencia numérica con los valores de  $y$  para encontrar la expresión algebraica? ¿Por qué? \_\_\_\_\_
  - ¿Cómo se puede demostrar que las expresiones corresponden efectivamente a cada línea? \_\_\_\_\_
3. Compara tus respuestas con las de tus compañeros, y con la asesoría del profesor determina la importancia de saber hacer el análisis de una gráfica y sus elementos para que sea posible determinar la expresión que modela.

**Desarrolla tus habilidades**

1. Reúnanse en equipos y a partir de la gráfica dada, modelen una situación que pueda ser representada de esta manera; diseñen una estrategia para encontrar la expresión algebraica que representa.



- Escriban la situación que diseñaron. \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es la expresión algebraica que representa esta parábola? \_\_\_\_\_
- ¿Qué procedimiento emplearon para obtener el dato? \_\_\_\_\_
- ¿De qué manera se puede comprobar que la expresión corresponde a la parábola? \_\_\_\_\_

Comparen sus resultados con los de sus compañeros, y con la asesoría del profesor determinen qué situaciones presenta una relación de dos cantidades, la cual crea una gráfica con esta forma.

**USAS LAS TIC**



Visita la página <http://fooplot.com/?lang=es#W3sidHlwZSI6MCwiZXEiOiJ4XjJlLjJib2xvcil6IiMvMDAwMDAifSx7InR5cGUoJWwMdB9XQ> (Consultada el día 5 de diciembre de 2016, a las 13:03 horas), en ella encontrarás un graficador de funciones. Esta herramienta te servirá para comprobar tus resultados, para experimentar cambiando las cantidades y los signos, y para poner a prueba tus hipótesis al momento de practicar. Después de tu visita comenten en clase su experiencia y concluyan, ¿cuál es la ventaja de tener un recurso como éste y cuál es la utilidad que tiene en la vida cotidiana?

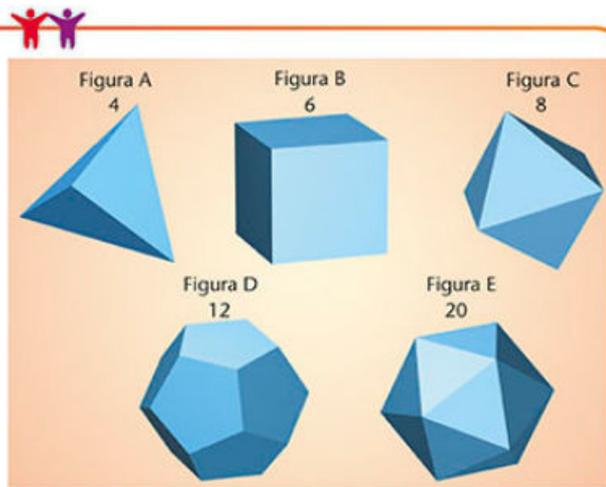
Eje temático	Manejo de la información
Tema	Nociones de probabilidad
Contenido 6	Análisis de las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables.

**ACUÉRDATE DE...**

Para un juego nuevo se diseñaron unos dados con distinto número de caras, se tomaron como base algunos **poliedros** regulares.

**Glosario**

**Poliedro.** Es un sólido que está formado por caras planas y tiene volumen. Los poliedros regulares tienen caras planas formadas por polígonos regulares.



1. Analicen las condiciones dadas y diseñen una estrategia que les permita conocer si el juego es justo o no, esto es, si ofrece o no condiciones iguales para cada jugador donde cada uno tenga las mismas posibilidades de ganar, y si el dado elegido es el adecuado, según las condiciones de cada situación.

El juego para todos los dados consiste en avanzar, sobre un tablero, el número de espacios que indique el número que quede en la cara superior del dado al ser lanzado y los puntos se van sumando. Gana el primero que llegue a 100.

- a) Juego 1: un jugador toma el dado E y el otro toma dos dados el C y el D.
  - ¿En estas condiciones el juego es justo? \_\_\_\_\_ Justifiquen su respuesta. \_\_\_\_\_
  - ¿Es posible modificar el juego para asegurarse de que sea justo? \_\_\_\_\_  
¿Por qué? \_\_\_\_\_
- b) Juego 2: un jugador toma los dados A y C, y el otro toma el dado D.
  - ¿En estas condiciones, el juego es justo? \_\_\_\_\_ Justifiquen su respuesta. \_\_\_\_\_
  - Es conveniente modificar el juego? \_\_\_\_\_ ¿Por qué? \_\_\_\_\_
- c) Juego 3: un jugador toma los dados A, B y C y el otro jugador el dado E.
  - ¿En estas condiciones el juego es justo? \_\_\_\_\_ Justifiquen su respuesta. \_\_\_\_\_
  - Es conveniente modificar el juego? \_\_\_\_\_ ¿Por qué? \_\_\_\_\_

2. De los eventos para cada dado, ¿cuáles son justos?, es decir, ¿cuáles tienen la misma probabilidad de ocurrir? Subráyenlos.

- a) Si se toma el dado C.
  - Que salga un 5.
  - Que salga un número par.
  - Que salga un 4.
  - Que salga un múltiplo de 2.
  - Que salga un 3.
- b) Si se toma el dado D.
  - Que salga un 7.
  - Que salga un 15.
  - Que salga un número primo.
  - Que salga un número non.
  - Que salga un número entre 6 y 12.
- c) Si se toma el dado E.
  - Que salga el 20.
  - Que salga un número impar.
  - Que salga un número par.
  - Que salga un número entre 5 y 15.
  - Que salga un múltiplo de 3.

3. Contrasten sus respuestas con las de sus compañeros, y con la ayuda del profesor determinen aspectos que se deben considerar al determinar la probabilidad de ocurrencia de un evento y en qué influye esto en determinar si un juego es justo o no para los participantes.

En estudios anteriores has analizado algunos eventos y juegos que dependen de la probabilidad, pero que con base en una condición, al analizarlos, puedes decidir si es más probable que ocurran o es menos probable.

**PRACTÍCALO**

**Actividad 6.1**

1. Analicen las situaciones planteadas y determinen una manera de saber si lo que indican es justo o injusto, según cada condición. Suponiendo que dos alumnos plantean cada evento como un experimento por realizar, completen la tabla.

Evento	¿Es justo o injusto?	Justificación
Lanzar dos monedas al aire (con sello y cara) si caen dos sellos uno gana, si no, gana el otro.		
Lanzar dos dados, si la suma de sus caras es más de 7 uno gana, si no, gana el otro.		
En una ruleta uno gana si cae un número par, el otro gana si cae un impar.		

Evento	¿Es justo o injusto?	Justificación
En una baraja, uno gana si primero sale un 4 y el segundo gana si primero sale un 6.		
Uno gana si al tomar una ficha de dominó la suma de sus puntos es mayor que 8; si no, gana el otro.		

- ¿Qué fue lo que les permitió poder juzgar si la condición dada para cada evento era justa o no? \_\_\_\_\_
- De los eventos que consideraron injustos, seleccionen uno y expliquen, ¿qué condición se necesitará para hacerlo justo? \_\_\_\_\_
- ¿Consideran que pueden utilizar este mismo criterio de la misma forma para todos los juegos de azar? Expliquen su respuesta. \_\_\_\_\_

2. Comparen sus respuestas con las de sus compañeros y con la ayuda del profesor determinen los indicadores que hacen notar si un juego de azar es justo o injusto, y de qué depende que una persona sea capaz de decidir esto.



**PRACTÍCALO**



**Actividad 6.2**

1. Preparen dos dados para hacer esta actividad, lean y preparen el juego y después contesten las preguntas.

Seleccionen cuatro objetos pequeños que puedan utilizar como fichas, pueden ser monedas, sacapuntas, gomas, tapas de plumas, etcétera. Coloquen los objetos en 4 de las casillas de su respectivo tablero, como el que se muestra a continuación.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12

Reglas.

1. Cada jugador tirará los dados por turnos.
2. En cada tirada deberán sumar los puntos que tengan los dados en la cara superior.
3. Si el número de puntos coincide con alguno de los números que tienen ficha, el jugador que tiró podrá pasar esa ficha al jugador del lado contrario y colocarla en una de sus casillas.
4. Si al tirar la suma de puntos no coincide con ninguno de sus números que tienen ficha, el turno pasa a otro jugador.
5. Gana el primero que logre deshacerse de todas las fichas.

Bajo la supervisión y coordinación del profesor, jueguen tratando de encontrar la mejor estrategia para ganar.

2. Analicen las condiciones que se van presentando, determinen si el juego es justo o no, argumenten su conclusión.
  - ¿Todos los números del tablero tienen la misma posibilidad de salir? \_\_\_\_\_
  - ¿Por qué ocurre esto? \_\_\_\_\_

- ¿Consideran que las condiciones de este juego son justas o injustas? Expliquen su respuesta. \_\_\_\_\_
  - ¿Tienen los dos jugadores la misma posibilidad de ganar? ¿Por qué? \_\_\_\_\_
  - Después de haber jugado varias partidas, ¿cuál puede ser una buena estrategia para ganar el juego? \_\_\_\_\_
  - ¿Por qué consideran que esta estrategia da alguna ventaja al jugador? \_\_\_\_\_
  - ¿Consideran que los dados les da cierta ventaja a algunos números del tablero o les da la misma oportunidad a todos? Justifiquen su respuesta. \_\_\_\_\_
  - ¿Qué estrategia sugieren que se utilice para tener la seguridad de que los números del tablero tienen la misma posibilidad, o no? \_\_\_\_\_
  - ¿Cuál sería una forma de plantear el juego de modo que sea justo para ambos jugadores? \_\_\_\_\_
- Expliquen su respuesta. \_\_\_\_\_

3. Contrasten sus resultados con los de sus compañeros, y con la ayuda del profesor expongan algunos puntos de vista acerca de este juego y determinen qué condiciones permiten evaluar si el juego es justo o no.



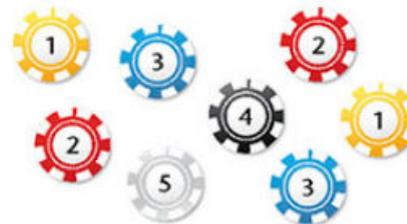
**PRACTÍCALO**



**Actividad 6.3**

1. Lean la situación planteada y contesten las preguntas.

a) En una urna tapada se encuentran colocadas fichas numeradas, analicen la imagen y diseñen una estrategia que les permita encontrar la probabilidad de ocurrencia de los eventos indicados del lado derecho, realizando las extracciones que sean necesarias.



- Un cuatro y un cinco
- Un uno y un dos
- Un dos y un tres
- Un uno
- Un uno, un dos y un tres
- Un tres y un cuatro
- Un uno, un dos, un tres y un cuatro

- ¿Consideran que todos los eventos tienen la misma probabilidad de ocurrir? Expliquen su respuesta. \_\_\_\_\_
- Si se le pide a dos personas que seleccionen cada uno un evento diferente, ¿es posible que escojan uno donde las dos tengan la misma posibilidad de ganar? ¿Por qué? \_\_\_\_\_

- ¿Cuál de los eventos consideran que tiene menos probabilidad de ocurrir? \_\_\_\_\_  
¿Cómo determinaron esto? \_\_\_\_\_
- De los eventos que requieren dos extracciones, ¿cómo se puede saber cuál de ellos tiene más probabilidad de ocurrir? \_\_\_\_\_ Entonces, ¿entre estos eventos cuál tiene mayor probabilidad? \_\_\_\_\_
- ¿Cómo modificarían las fichas de la urna y los eventos del recuadro para tener la seguridad de que el juego es justo? \_\_\_\_\_

2. Comparen sus resultados con los de los otros equipos, y con la asesoría del profesor determinen cómo se puede saber la probabilidad de ocurrencia de un evento donde las opciones presentan condiciones distintas.

**Para leer más**

Los eventos equiprobables son los que tienen la misma probabilidad de ocurrir. Los eventos que no cumplen con esta condición son llamados no equiprobables e indican que alguna de las condiciones no es igual para cada evento.

**Para tener en cuenta**

Recuerda que la probabilidad de un evento utiliza la regla de Laplace:

$$P(A) = \frac{\text{Número de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles}}$$

Y para que puedas determinar si un juego es justo o no, únicamente requieres calcular la probabilidad teórica (o clásica) del evento que interviene en el juego y analizarlo. Ten en cuenta que no es posible considerar, únicamente, los resultados que se obtienen jugando.



**LO QUE APRENDÍ**



1. Lee la siguiente situación y con base en lo que has aprendido hasta ahora, resuelve la actividad.
- a) En una clase de matemáticas el profesor lanzó un reto, el cual consistía en llevar a cabo un juego sencillo entre dos alumnos: a cada uno le dio 12 fichas y las colocó como se muestra en la imagen, luego dijo, lanzando una moneda, vamos a determinar quién inicia el juego. Se utilizarán turnos alternados, quitarán por cada uno, entre una y tres fichas, repetirán esta operación hasta que a un jugador le quede sólo una ficha; el que lo logre, gana.



- ¿Consideras que este juego es justo? \_\_\_\_\_ Explica tu respuesta. \_\_\_\_\_
- ¿Consideras que éste es un juego de azar bien elaborado? \_\_\_\_\_  
¿Por qué? \_\_\_\_\_
- ¿De qué depende que un jugador pueda ganar? \_\_\_\_\_
- ¿Es posible encontrar una estrategia para poder ganar de manera segura? \_\_\_\_\_
- ¿Qué se debe modificar en este juego para que sea de azar y sea justo? \_\_\_\_\_

b) Cambiemos las reglas del juego anterior, ahora, cada jugador participará arriesgando una ficha a la vez, si gana, se queda con la ficha del contrario, si pierde se la da.

Reglas del juego

El jugador uno gana si al lanzar dos dados la diferencia entre sus puntos es 0, 2 o 4, y gana el jugador dos si al lanzar dos dados la diferencia entre sus puntos es 1, 3 o 5.

- ¿En estas condiciones, el juego es justo? \_\_\_\_\_ Justifica tu respuesta. \_\_\_\_\_
- ¿Consideras que hay posibilidad de que algún jugador encuentre una estrategia para tener mayor probabilidad de ganar? \_\_\_\_\_ Explica tu respuesta. \_\_\_\_\_
- ¿Consideras que es conveniente modificar el juego? \_\_\_\_\_  
¿Por qué? \_\_\_\_\_

2. En la imagen se muestran todas las posibles permutaciones al lanzar dos dados.

6	(1, 6)	(2, 6)	(3, 6)	(4, 6)	(5, 6)	(6, 6)
5	(1, 5)	(2, 5)	(3, 5)	(4, 5)	(5, 5)	(6, 5)
4	(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)	(4, 4)	(5, 4)	(6, 4)
3	(1, 3)	(2, 3)	(3, 3)	(4, 3)	(5, 3)	(6, 3)
2	(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)	(4, 2)	(5, 2)	(6, 2)
1	(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)	(5, 1)	(6, 1)
	1	2	3	4	5	6

- a) Elabora en tu cuaderno una tabla en la que se muestren las diferencias para cada uno y una tabla de frecuencias.
- ¿Las diferencias obtenidas, tienen la misma probabilidad? \_\_\_\_\_  
¿Cómo llegaste a esta conclusión? \_\_\_\_\_
  - Entonces, ¿es posible asegurar si este juego es justo o no? \_\_\_\_\_  
Explica tu respuesta. \_\_\_\_\_

3. Compara tus resultados con los de tus compañeros, y con la asesoría del profesor determina cómo se identifican y comprenden las condiciones que son necesarias para que un juego de azar sea justo al analizar sus resultados y observar si son equiprobables o no.

**USA LAS TIC**



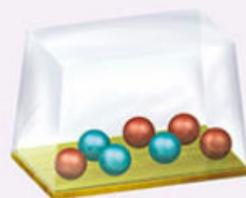
Visita la página <http://bibliotecadigital.ilce.edu.mx/sites/telesecundaria/tsa01g01v02/u03t04s02.html> (Consultada el día 5 de diciembre de 2016, a las 13:16 horas), en la que encontrarás una breve explicación acerca de los juegos de azar y podrás analizar si son justos o injustos, además de contener actividades que puedes practicar con tus compañeros. Después de tu visita es conveniente que intercambien impresiones en grupo, y con la asesoría de tu profesor determina: ¿qué ventajas tiene poder contrastar los conocimientos que tienes de este tema con otras fuentes de información?

**Desarrolla tus habilidades**

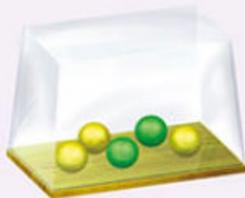
1. Reúnanse en equipos, analicen la situación dada y respondan las preguntas.

- a) Liliana fue a un campamento de verano en el cual se sortearon todos los quehaceres para que todos cooperaran. Hoy, van a sortear las guardias, cada una dura 6 horas, dos son de día y dos de noche; la regla es la siguiente:

El jefe de guardia lanza un volado, si cae cara, toca una guardia de día, y si es cruz, una guardia de noche; luego cada uno selecciona una bola de la urna que le tocó y dependiendo del color es el horario de su guardia. Roja, de 0 a 6 horas; azul, de 6 a 12 horas; amarillo, de 12 a 18 horas; y verde, de 18 a 24 horas.



Cara



Cruz

- ¿Consideran que el sistema del campamento es justo, es decir, les da la misma oportunidad a todos los participantes? \_\_\_\_\_  
Expliquen su respuesta. \_\_\_\_\_

- Según las condiciones que se pueden ver en las urnas, ¿qué es más probable para el siguiente participante, que le toque de día o de noche? \_\_\_\_\_  
Expliquen su respuesta. \_\_\_\_\_

- ¿Qué es más probable, que le toque al siguiente participante una bola verde o una roja si aún no ha tirado el volado? \_\_\_\_\_  
Expliquen su respuesta. \_\_\_\_\_

- Si Luis le dice a Francisco que hay la misma probabilidad de que le toque una bola amarilla o una azul, ¿tiene razón? \_\_\_\_\_  
¿Por qué? \_\_\_\_\_

- Pedro quiere que le toque la guardia de la tarde, de 12 a 18 horas, si él es el próximo en extraer una bola, ¿qué probabilidad tiene de cumplir su deseo? \_\_\_\_\_

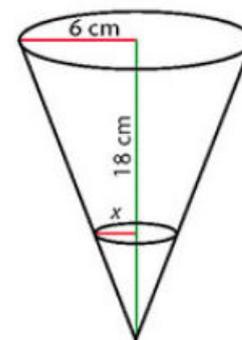
- ¿Cómo encontraron esta cantidad? \_\_\_\_\_

- ¿Hay alguna manera de mejorar este juego y hacerlo más justo? \_\_\_\_\_  
¿Por qué? \_\_\_\_\_

2. Contrasten su respuesta con la de sus compañeros, y con la asesoría del profesor determinen de qué manera influye en un evento el hecho de que dependa de otro para poder ocurrir.

**Evaluación tipo PISA**

1. En una fábrica de cajas de cartón refuerzan las dos tapas para brindar seguridad. Si se suman los perímetros de las dos tapas cuadradas de una caja, el resultado es 48 cm y si se suman sus áreas el resultado es 72 cm<sup>2</sup>. ¿Cuánto mide el lado de cada tapa?
2. Laura es repostera y para aplicar la cubierta de sus pasteles utiliza conos que corta, de acuerdo a sus necesidades. Si realiza un corte en un cono, de forma paralela a su base circular a un tercio de su altura partiendo de la cúspide, ¿cuánto mide el radio de la nueva base?



a)	3 cm
b)	1 cm
c)	4 cm
d)	2 cm

3. El señor Correa fabrica dulces tradicionales mexicanos, hoy va a hacer chupirules, para lo cual utiliza moldes como el que muestra la imagen. ¿Cuál es el volumen del cono?

Explica, ¿cuál fue la estrategia que utilizaste para encontrar estas medidas?

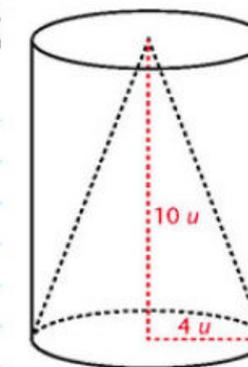
\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

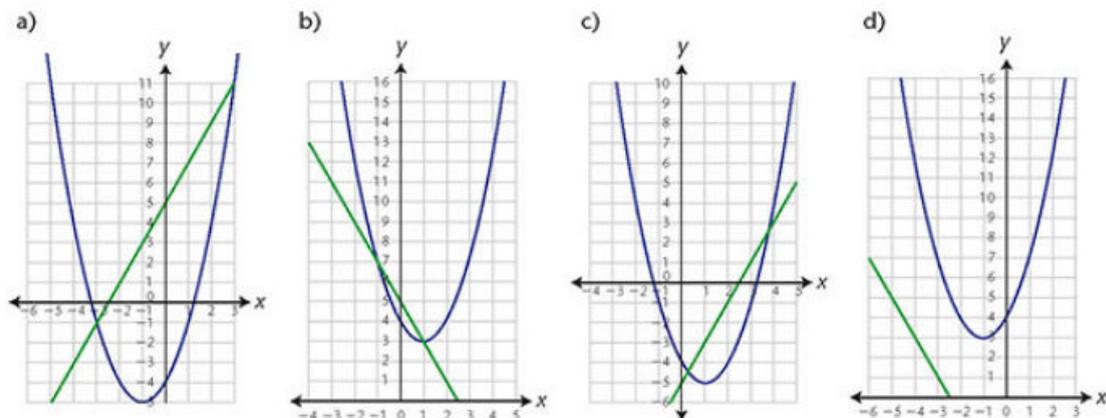


4. De las siguientes afirmaciones, selecciona la que describe de manera adecuada la relación que hay entre el volumen de un cono cuando se modifica una de sus dimensiones, ya sea la altura o el radio de la base.

a) Cuando se modifica alguna de las medidas de un cono, el volumen se incrementa o disminuye, dependiendo de la modificación hecha.	Sí	No
b) Cuando se modifica la altura de un cono se sabe que su volumen se modifica en una tercera parte del volumen original, y cuando se modifica su radio el volumen se modifica de manera proporcional.	Sí	No
c) Cuando se modifica la altura de un cono su volumen se modifica de manera proporcional, y cuando se altera la medida de su radio se modifica de forma cuadrática.	Sí	No
d) Cuando se modifica la altura de un cono se debe incrementar también el radio de su base para que el incremento de volumen sea proporcional.	Sí	No

**Evaluación tipo PISA**

5. La cantidad de residuos para reciclaje de una fábrica está dada por la sucesión 4, 11, 20, 31, 44, ... ¿Cuál de estas gráficas representa la razón de cambio de esta sucesión, así como la recta que se obtiene a partir de las diferencias?



• Explica qué estrategia utilizaste para determinar cuál es la gráfica correcta.

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

6. Josefina, Marielena y Francisca están jugando una carrera usando dos fichas marcadas cada una con los signos (+) y (-) sobre un tablero con tres carriles y 10 espacios por recorrer. Josefina avanza si en las dos fichas cae (+) y (+), Marielena avanza si cae (-) y (-) y Francisca avanza si caen los signos combinados en cualquier orden, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

	Condición	1	2	3	4	5	6	7	8	9	META
Josefina	(+) (+)										
Marielena	(-) (-)										
Francisca	(+) (-)										

- a) El juego es justo, ya que una las combinaciones con las que avanzan tienen la misma probabilidad de ocurrir.
- b) El juego es injusto porque Francisca tiene más probabilidades de avanzar.
- c) El juego es justo porque todas están jugando con las mismas fichas.
- d) El juego es injusto porque tiene la misma probabilidad de salir dos fichas con el mismo signo o bien con signos combinados.

**Bibliografía**

**Bibliografía consultada**

Asencio, Ma. J., *Estadística*, Madrid, McGraw-Hill, 2006.

Baldor, A., *Álgebra*, México, Publicaciones culturales, 2006.

Baldor, A., *Geometría plana y del espacio*, España, Cultural centroamericana, 2003.

Caballero, Arquímedes, *Matemáticas, tercer curso*, México, Esfinge, 2001.

Clemens, S. et al., *Geometría*, EUA, Addison-Wesley Iberoamericana, 2005.

Collins, W. et al., *Álgebra I*, EUA, Glencoe-McGraw-Hill, 2006.

Enciclopedia Estudiantil Visual, Barcelona-Colombia, Thema, 1997.

Enciclopedia Matemática, México, Grijalbo, 2009.

Goodson y Miertschin, *Álgebra con aplicaciones técnicas*, México, Limusa, 2004.

Jacobs, H., *Geometry*, EUA, Freeman, 2006.

Murray, R. S., *Estadística*, México, Schaum-McGraw-Hill, 2002.

Newman, J., *El mundo de las matemáticas tomo I*, Barcelona, Grijalbo, 1976 (Sigma, tomo 1).

Oteyza, L., *Álgebra*, México, Pearson Educación, 2003.

Sada, G., María Teresa, *Álgebra*, México, FCE, 2005.

Sánchez, O., *Probabilidad y estadística*, México, McGraw-Hill, 2000.

SEP, *Fichero de actividades didácticas matemáticas*, Educación secundaria, México, 2000.

SEP, *Geometría dinámica*. EMAT. Educación secundaria, México, 2000.

SEP, *Matemáticas con la hoja electrónica de cálculo*. EMAT. Educación secundaria, México, 2000.

SEP, *Plan de estudios*, Educación Básica. Secundaria, México, SEP, 2011.

SEP, *Programa de estudio*. Matemáticas. Educación Básica, México, SEP, 2011.

Seymour, L., *Probabilidad*, México, Schaum-McGraw-Hill, 1995.

Swokowski, E., *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*, EUA, Universidad de Missouri, 2006.

**Bibliografía para el estudiante**

Agnus, H., *El diablo de los números*, España, Siruela, 2003.

Asimov, I., *El libro de los sucesos*, México, Lasser Press, 2011.

Diccionario Esencial de Matemáticas, México, Larousse, 2006.

Escandón, Rafael, *Curiosidades matemáticas*, México, Diana, 2009.

Gonick, L. S., *La estadística en cómic*, Barcelona, Zendrea Zariquiey, 2003.

Gutiérrez, Yavé, *Acertijos matemáticos*, México, Editores Mexicanos Unidos, 2004.

Perero, Matiano, *Historia e historias de las matemáticas*, México, Grupo Editorial Iberoamérica, 2003.

Sagan, C., *Cosmos*, Barcelona, Planeta, 2004.

Tahan, Malba, *El hombre que calculaba*, México, Limusa, 2004.

**Bibliografía**

**Bibliografía para el profesor**

- Aebli, H., *Doce formas básicas de enseñar. Una didáctica basada en la psicología*, Madrid, Narcea, 1995.
- Asimov, I., *Nueva guía de la ciencia*, Barcelona, Plaza & Janés, 1997.
- Brousseau, G., "Educación y didáctica de las matemáticas", en *Educación matemática*, Vol. 12, No. 1, México, Iberoamericana, 2000, pp. 5-38.
- Carreher, T., *En la vida diez, en la escuela cero*, México, Siglo XXI, 1991.
- Hofstadter, D. y Escher Gödel, *Bach: una eterna trenza dorada*, México, CONACULTA, 1979.
- INTE, *PISA para docentes: la evaluación como oportunidad de aprendizaje*, México, 2005.
- Pereda, L., *Didáctica de la resolución de problemas*, Bilbao, Descloé De Brouwer, 1987.
- Peña, J. A. de la, *Algunos problemas de la educación en matemáticas en México*, México, Siglo XXI, 2002.
- Piaget, J., *Psicología y pedagogía*, Barcelona, Crítica, 2005.
- Sánchez, Octavio, *Probabilidad y estadística*, México, McGraw-Hill, 2000.
- SEP, *Fichero de actividades didácticas, Matemáticas*, México, SEP, 2001.
- Skinner, B. F., *Sobre el conductismo*, Barcelona, Fontanella, 1975.
- Stacey, K., *Resolver problemas: estrategias*, Madrid, Narcea, 1999.
- Vygotsky, L., *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*, Barcelona, Crítica, 2003.

**Fuentes electrónicas**

- <http://almez.pntic.mec.es/> (presenta un recorrido descriptivo, a lo largo de los siglos, de las diferentes civilizaciones que hicieron aportaciones al campo de las matemáticas).
- [http://www.sep.gob.mx/es/sep1/educacion\\_por\\_niveles](http://www.sep.gob.mx/es/sep1/educacion_por_niveles) (página oficial de la Secretaría de Educación Pública. Contiene orientaciones didácticas, bibliotecas y sitios de internet que pueden ser de interés para el docente o el alumno).
- <http://recursoslic.educacion.es/descartes/web/> (página interactiva con los contenidos de matemáticas en la enseñanza secundaria, juegos, trucos, etcétera).
- <http://www.ommerlinea.org/> (página oficial de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas).
- <http://sepiensa.org.mx/> (página de la SEP, con diversas actividades e información de matemáticas).
- <http://olimpiada.mat.uson.mx/> (página de las olimpiadas sonorenses de matemáticas; incluye exámenes y problemas).
- <http://www.thatquiz.org/es/> (página para realizar ejercicios de matemáticas de todo tipo).
- <http://www.matematicas.net/> (página dedicada al fascinante universo de las matemáticas; contiene apuntes, ejercicios, exámenes, juegos, enlaces, historia, etcétera).
- <http://www.mievitus.com/> (página de juegos, acertijos y recreaciones matemáticas).
- <http://bibliotecadigital.ilce.edu.mx/> (sitio del Instituto Latinoamericano de la Comunicación Educativa).

**Créditos iconográficos**

© Shutterstock pp. 14, 15, 28, 75, 122, 123, 164, 165, 178, 180, 202, 220, 221, 232. © Depositphotos pp. 15, 53, 74, 75, 117, 122, 123, 165, 178, 180, 221. Archivo Edimend pp. 15, 75, 180, 221.

# Matemáticas 3

Por competencias

El libro **Matemáticas 3. Por competencias** ha sido elaborado con el propósito de que el alumno desarrolle conocimientos, habilidades y actitudes matemáticas, a fin de que sea capaz de generar métodos y situaciones encaminadas a la solución de problemas en el aula y en la vida cotidiana.

Las actividades que propone **Matemáticas 3. Por competencias** proporcionan al alumno una guía para entender el contenido teórico de las matemáticas, lograr el aprendizaje esperado y por tanto, el desarrollo de competencias como: pensar, razonar, argumentar, comunicar, representar, elaborar modelos, plantear y resolver problemas, utilizar lenguaje y operaciones tanto simbólicas como formales y técnicas, por mencionar algunas.

**Matemáticas 3. Por competencias** incluye además secciones que permitirán al alumno complementar su aprendizaje haciendo uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC), poner a prueba sus competencias matemáticas mediante desafíos y retos para desarrollar más habilidades.

DISTRIBUCIÓN GRATUITA  
PROHIBIDA SU VENTA

ISBN 978-607-32-2680-6



Visítenos en:  
[www.pearsonenespañol.com](http://www.pearsonenespañol.com)