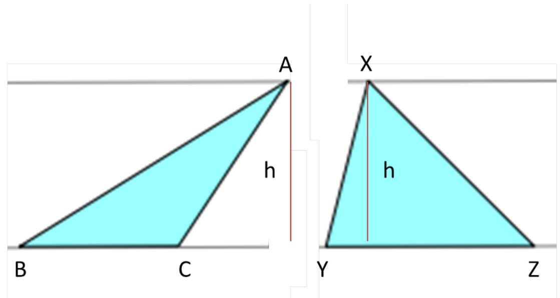
Proposición 1. *Si dos triángulos tienen la misma altura entonces sus áreas estan en la misma proporción que sus bases*

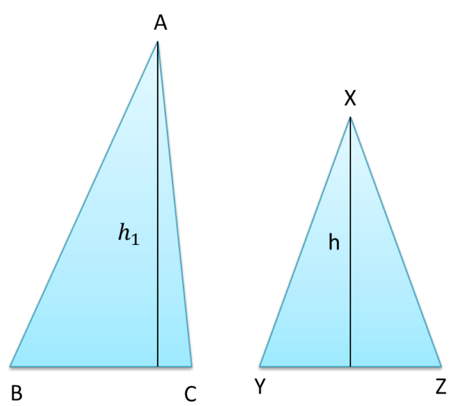


Demostración. En este caso se tiene

$$\frac{\text{área} \triangle ABC}{\text{área} \triangle XYZ} = \frac{\frac{BC \cdot h}{2}}{\frac{XZ \cdot h}{2}} = \frac{BC}{YZ}$$

$\square$

Proposición 2. *Si dos triángulos tienen la misma base entonces sus áreas estan en la misma proporción que sus alturas*



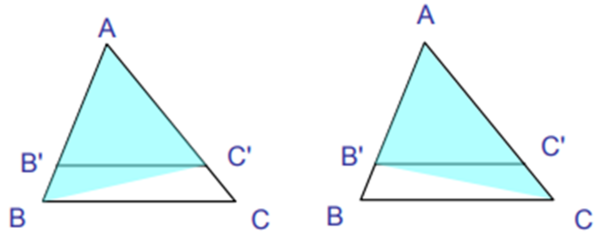
Demostración. En este caso se tiene

$$\frac{\text{área} \triangle ABC}{\text{área} \triangle XYZ} = \frac{\frac{BC \cdot h_1}{2}}{\frac{YZ \cdot h}{2}} = \frac{h_1}{h}$$

$\square$

Proposición 3. *Si dos triángulos tienen ángulos iguales, entonces sus lados correspondientes son proporcionales.*

Demostración. Se tiene que



Los triangulos azules tienen areas iguales Entonces por los resultados anteriores

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{\acute{a}rea \triangle AB'C'}{\acute{a}rea \triangle ABC'} = \frac{\acute{a}rea \triangle AB'C'}{\acute{a}rea \triangle ACB'} = \frac{AC'}{AC}$$

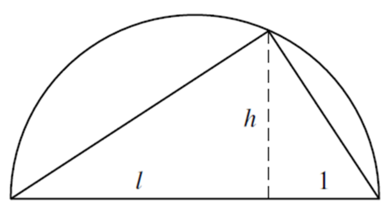
por lo tanto

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$$

□

Triángulos Semejantes Se dice que dos triángulos son semejantes, si tienen, sus ángulos iguales y sus lados pueden ser iguales ó sus lados pueden ser proporcionales

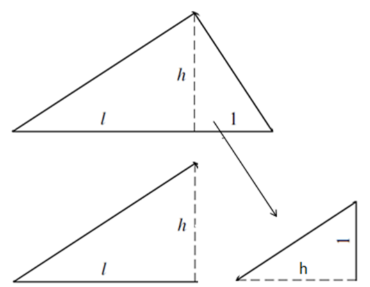
Construcción de la raíz cuadrada Dado cualquier segmento de línea ℓ, construya el semicírculo con diámetro $\ell + 1$, y la perpendicular al diámetro donde los segmentos ℓ y 1 se encuentran.



Entonces la longitud h de esta perpendicular es

$$h = \sqrt{\ell}$$

Demostración. Usando la semejanza de los triángulos se tiene



$$\frac{\ell}{h} = \frac{h}{1} \Rightarrow h^2 = \ell \Rightarrow h = \sqrt{\ell}$$

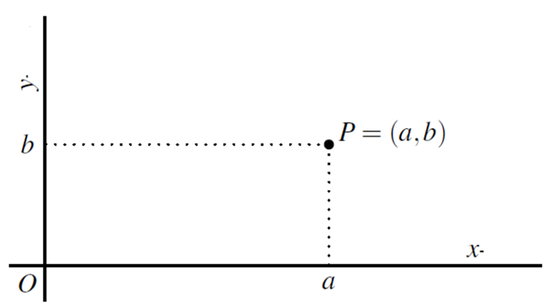
□

Coordenadas

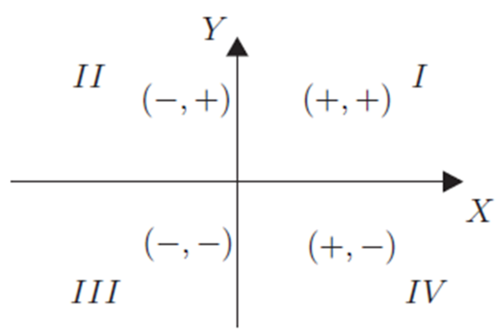
Alrededor de 1630, Pierre de Fermat y René Descartes de forma independiente descubrierón las ventajas de los números en geometría, como coordenadas. Descartes fue el primero en publicar una cuenta detallada, en su libro Géométrie de 1637. Por esta razón, obtiene la mayor parte del crédito por la idea y el enfoque coordenado de la geometría que se hicieron conocidos como Cartesiano (del antiguo modo de escribir su nombre: Descartes). Descartes pensó que la geometría era como la describió Euclides, y que los números simplemente ayudan a estudiar figuras geométricas. Pero luego los matemáticos objetos descubiertos con propiedades no euclidianas, tales como líneas que tienen más de un paralelo a través de un punto dado. Para aclarar esta situación, llegó a ser deseable definir puntos, líneas, longitud, y así sucesivamente, y para demostrar que satisfacen los axiomas de Euclides. Este programa, llevado a cabo con la ayuda de coordenadas, se llama aritmetización de la geometría.

La recta numérica y el plano numérico El conjunto $\mathbb{R}$ de números reales resulta de llenar los espacios en el conjunto $\mathbb{Q}$ de números racionales con números irracionales, como $\sqrt{2}$. Esta innovación nos permite considerar $\mathbb{R}$ como una línea, porque no tiene vacíos y los números en él están ordenados tal como imaginamos puntos en una línea. Decimos que $\mathbb{R}$, junto con su orden, es un modelo de la línea. Una de nuestras metas es usar $\mathbb{R}$ para construir un modelo para toda la geometría del plano euclidiano: una estructura que contiene "líneas", çírculos", "segmentos de línea", etc., con todos de las propiedades requeridas por los axiomas de Euclides o Hilbert.

El primer paso es construir el plano, y en esto nos guiamos por las propiedades de las paralelas en la geometría de Euclides. Imaginamos un par de líneas perpendiculares, llamadas el eje X y el eje Y, que se cruzan en un punto O llamado el origen.



Interpretamos los ejes como líneas numéricas, con O el número 0 en cada uno, y suponemos que la dirección positiva en el el eje x está a la derecha y la dirección positiva en el eje y es hacia arriba.
A través de cualquier punto P, existe (por el axioma paralelo) una línea única paralelo al eje y y una línea única paralela al eje x. Estos dos las líneas se encuentran con el eje x y el eje y con los números a y b llamados coordenada x e y de P, respectivamente. Es importante recordar qué número está en el eje x y que está en el eje y, porque obviamente el punto con coordenada x = 3 y coordenada y = 4 es diferente del punto con coordenada x = 4 y coordenada y = 3.
Para mantener la coordenada x=a y la coordenada y= b en su lugar, usamos el par ordenado (a, b). Por ejemplo, (3,4) es el punto con coordenada x = 3 y coordenada y = 4, mientras que (4,3) es el punto con coordenada x = 4 y coordenada y = 3. El par ordenado (a, b) especifica P únicamente porque cualquier otro punto tendrá al menos un paralelo diferente pasando por él y por lo tanto diferirá de P en la coordenada x_0 y. Por lo tanto, dada la existencia de una recta numérica $\mathbb{R}$ cuyos puntos son números reales, también tenemos un plano numérico cuyos puntos son pares ordenados de números reales. A menudo escribimos este plano numérico como $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ó $\mathbb{R}^2$. Las cuatro regiones se denominan cuadrantes.
Cada uno de los cuadrantes puede caracterizarse por los signos de las coordenadas de sus puntos, como lo ilustra la Figura



El cuadrante con el juego de signos $(+, +)$ se denomina primer cuadrante, el cuadrante con el juego de signos $(-, +)$ se denomina segundo cuadrante, el correspondiente al juego de signos $(-, -)$ es el tercer cuadrante, y el cuadrante con signos $(+, -)$ se denomina cuarto cuadrante.
Conviene notar que los puntos del plano cartesiano pertenecientes al eje X se caracterizan porque su ordenada es cero y, en consecuencia, $y = 0$ es la ecuación del eje X.
Análogamente, los puntos del eje Y se caracterizan porque su abscisa es cero y por tanto, $x = 0$ es la ecuación del eje Y.